

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 1. (Inhalt von Funktionsflächen)

Sei $f : K \subset G \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion auf einem geeigneten Gebiet G und K eine kompakte Teilmenge von G . Zeigen Sie: Der Inhalt der durch $z = f(x, y)$ gegebenen Funktionsfläche über den Bereich K ist gegeben durch

$$\int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} d(x, y).$$

Lösung 1.

Die Funktion f beschreibt eine Fläche F im $\mathbb{R}^3$ mit der Parametrisierung

$$\vec{\Phi} : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor an die Fläche berechnet sich zu

$$\vec{n}(\vec{x}) = \left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial y} \right)(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und seine Länge ist

$$\|\vec{n}(\vec{x})\|_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\right)^2}.$$

Die infinitesimale Oberfläche an der Stelle $\vec{x}$ lautet

$$d\sigma(x, y) = \|\vec{n}(\vec{x})\|_2 d(x, y)$$

und damit folgt für die Fläche von F

$$|F| = \int_K d\sigma = \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\right)^2} d(x, y).$$

Da die partiellen Ableitungen von f stetig sind und K kompakt ist, existiert das Integral (es nimmt einen endlichen Wert an).

Aufgabe 2. (Oberflächenintegral)

Sei S die Oberfläche der Kugel mit dem Radius a um den Ursprung, die bereits in der Vorlesung betrachtet wurde. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

(Hinweis: Hier gibt es viele Wege, die zum Ziel führen. Man kann das Kugelbeispiel aus der Vorlesung erweitern; oder man kann etwas genauer darüber nachdenken, was man da eigentlich berechnet und dafür ganz schnell fertig sein!)

Lösung 2.

Die Kugeloberfläche S wird sinnigerweise mit Kugelkoordinaten parametrisiert

$$\vec{\Phi} : K \rightarrow S, \quad \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto a \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad K := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, 2\pi),$$

wobei die Pole ausgelassen werden, um Injektivität zu bewahren. (Die Pole spielen zur Berechnung keine Rolle, da es sich um diskrete Punkte handelt.) Der Normalenvektor bei (θ, ϕ) lautet

$$\vec{n}(\theta, \phi) = \left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \phi} \right)(\theta, \phi) = a^2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} -\cos^2 \theta \cos \phi \\ -\cos^2 \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

und das infinitesimale vektorielle Flächenelement ist daher

$$d\vec{\sigma}(\theta, \phi) = \vec{n}^0 \|\vec{n}(\theta, \phi)\|_2 d(\theta, \phi) = \vec{n}^0 a^2 \cos \theta d(\theta, \phi),$$

wobei $\vec{n}^0$ den äußeren Einheitsnormalenvektor bezeichne. Das ist in diesem Fall gerade der Vektor, der auf die Einheitskugeloberfläche mit den Winkeln θ, ϕ zeigt, also

$$\vec{n}^0(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Damit folgt insgesamt für das Oberflächenintegral von $\vec{f}(\vec{x}) = (x, y, z)^T$ über S

$$\begin{aligned} \int_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy &= \int_S \vec{f} \cdot d\vec{\sigma} = \int_K \langle \vec{f}, \vec{n}^0 \rangle \|\vec{n}\|_2 d(\theta, \phi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right\rangle a^2 \cos \theta d\theta d\phi \\ &= a^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta d\phi = 4\pi a^3. \end{aligned}$$

Der kurze Weg: Mit Hilfe des Satzes von Gauß kann man das Oberflächenintegral durch ein Volumenintegral über $\operatorname{div} \vec{f} = 3$ ersetzen. Daher erhält man gerade das dreifache Volumen der Kugel!

Aufgabe 3. (Donuts und Mega-Donuts)

Wie jeden Mittwoch gehen Sie vor der Vorlesung bei ihrer Bäckerei vorbei, um sich einen Donut zu kaufen. Dort stellen Sie fest, daß es neuerdings auch Mega-Donuts gibt mit doppelt so großem Radius, allerdings kostet er mehr als das Doppelte. Der Bäcker behauptet: „Mit dem doppelten Radius verdoppelt sich zwar auch genau das Volumen, allerdings wird die Oberfläche mehr als doppelt so groß, und da die Glasur deutlich teurer als Teig und Füllung ist, muß ich etwas mehr Geld dafür verlangen.“ Sie bezweifeln das und behaupten, die Oberfläche werde weniger als doppelt so groß, und berufen sich dabei auf die Verhältnisse bei einer Kugel. Wer hat Recht?

Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen eines Torus mit Ringradius R und Schlauchradius r ($r < R$). Parametrisieren Sie dazu zunächst einen Kreis in der x - z -Ebene um $(R, 0, 0)$ mit Radius r (Variable θ). Benutzen Sie dann die aus der linearen Algebra bekannte Drehung um die z -Achse

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

um den Kreis einmal um die z -Achse zu rotieren (Variable ϕ). Was passiert nun mit Oberfläche und Volumen, wenn der Ringradius R verdoppelt wird? Sind Sie überrascht?

Lösung 3.

Die Parametrisierung des Kreises ist

$$\vec{\Phi} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \theta \mapsto \begin{pmatrix} R + r \cos \theta \\ 0 \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Rotation mit $R_z(\phi)$ führt auf die Parametrisierung des Torus

$$\vec{\Psi} : [0, 2\pi) \times [0, 2\pi), \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto R_z(\phi) \cdot \vec{\Phi}(\theta) = \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ (R + r \cos \theta) \sin \phi \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor an der Stelle (θ, ϕ) ist

$$\vec{n}(\theta, \phi) = \left(\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \phi} \right)(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \cos \phi \\ -r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -(R + r \cos \theta) \sin \phi \\ (R + r \cos \theta) \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -r \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta) \cos \theta \cos \phi \\ (R + r \cos \theta) \cos \theta \sin \phi \\ (R + r \cos \theta) \sin \theta \end{pmatrix}$$

und das infinitesimale Flächenelement ist daher

$$d\sigma(\theta, \phi) = \|\vec{n}(\theta, \phi)\|_2 d(\theta, \phi) = r(R + r \cos \theta) d(\theta, \phi).$$

Für die Oberfläche $|F|$ des Torus folgt

$$|F| = \int_F d\sigma = \iint_F \|\vec{n}\|_2 d(\theta, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \cos \theta) d\theta d\phi = 4\pi^2 Rr.$$

Zur Parametrisierung des Volltorus wird der Schlauchradius r zur Variablen:

$$\vec{\Omega} : K \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + \rho \cos \theta) \cos \phi \\ (R + \rho \cos \theta) \sin \phi \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix}, \quad K := (0, r] \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$$

Wiederum wird $\rho > 0$ gefordert, um Injektivität zu bewahren. In diesem Fall fällt zwar ein ganzer Kreis aus der Mitte des Torus heraus, allerdings hat dieser kein Volumen, man macht also keinen Fehler. Es wird die Funktionaldeterminante von $\vec{\Omega}$ benötigt. Dazu zunächst die Ableitung von $\vec{\Omega}$:

$$\vec{\Omega}'(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\rho \sin \theta \cos \phi & -(R + \rho \cos \theta) \sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & (R + \rho \cos \theta) \cos \phi \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Funktionaldeterminante ist also

$$\det \vec{\Omega}'(\rho, \theta, \phi) = -\rho(R + \rho \cos \theta)$$

und damit folgt für das Volumen $|V|$ des Torus

$$|V| = \iiint_V 1 d(x, y, z) = \iiint_K |\det \vec{\Omega}'(\rho, \theta, \phi)| d(\rho, \theta, \phi) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(R + \rho \cos \theta) d\rho d\theta d\phi = 2\pi^2 Rr^2.$$

Offenbar sind Oberfläche *und* Volumen des Torus proportional zum Ringradius R . Daher verdoppeln sich beide Größen bei Verdopplung von R . Das ist bei genauerer Überlegung nicht besonders überraschend, da man den mit $\vec{\Phi}$ parametrisierten Kreis linear mit R verschiebt und Oberfläche bzw. Volumen aus dem Umfang $2\pi r$ bzw. der Fläche πr^2 des Kreises durch Rotation hervorgeht (Stichwort: GULDINSche Regeln).

Aufgabe 4. (*Lutschen eines Bonbons*)

Sei B ein kugelförmiges Hustenbonbon vom Radius r_0 , das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ der erkältete Student Florian Wirt-Meister in den Mund schiebt und zu lutschen beginnt. Da Florian ein ordentlicher Student ist, lutscht er B so, daß es immer schön kugelförmig bleibt. Dabei verkleinert sich der Radius zeitabhängig mit der Funktion $r(t)$. Die zeitliche Änderung des Volumens $V(t)$ von B ist proportional zur jeweiligen Oberfläche $F(t)$, an der seine Spucke angreifen kann:

$$\frac{dV}{dt}(t) = -\rho F(t)$$

(Hier ist ρ der sogenannte Ricola-Faktor, der von biochemischen Größen wie der Löslichkeit des Bonbons, der Speichelproduktion des Lutschenden und der allgemeinen Lutschnfreude abhängt. Auch hier ist Florian ausgesprochen ordentlich, da ρ völlig konstant bleibt!)

(a) Geben Sie $r(t)$ als explizite Funktion von t an.

(b) Nehmen wir an, nach einer Minute sei ein Volumenanteil von q weggelutscht (also $q \cdot 100$ Prozent verschwunden). Zeigen Sie, daß die gesamte Lutschzeit

$$T = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-q}} \quad \text{Minuten}$$

beträgt.

Lösung 4.

(a) Es ist eine Funktion $r(t)$ des Radius in Abhängigkeit von der Zeit gesucht mit der *Anfangsbedingung*

$$(4.1) \quad r(0) = r_0 > 0,$$

für welche die Gleichung

$$(4.2) \quad \frac{dV}{dt}(t) = -\rho F(t)$$

für jeden Zeitpunkt $t \geq 0$ (oder vielmehr bis B aufgelutscht ist) erfüllt ist. Volumen und Oberfläche des kugelförmigen Bonbons zum Zeitpunkt t sind

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{4}{3}\pi r^3(t) \\ F(t) &= 4\pi r^2(t). \end{aligned}$$

Ableiten von $V(t)$ liefert

$$\frac{dV}{dt}(t) = 4\pi r^2(t) \frac{dr}{dt}(t).$$

Einsetzen in (4.2)

$$4\pi r^2(t) \frac{dr}{dt}(t) = -\rho 4\pi r^2(t) \implies \frac{dr}{dt} = -\rho \implies r(t) = \int_0^t -\rho \, d\tau = -\rho t + C$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Gleichung (4.1) liefert schließlich

$$(4.3) \quad C = r_0 \implies r(t) = r_0 - \rho t.$$

Der Radius nimmt also linear ab.¹

(b) Es sei t die Lutschzeit in Minuten. Zum Zeitpunkt $t = 1$ sei ein Volumenanteil von q weggelutscht, das heißt

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r^3(1) &= V(1) = (1-q)V(0) = (1-q)\frac{4}{3}\pi r_0^3 \\ \implies r^3(1) &= (1-q)r_0^3 \\ \implies r(1) &= \sqrt[3]{1-q} r_0 \\ \stackrel{(4.3)}{\implies} r_0 - \rho &= \sqrt[3]{1-q} r_0 \\ \implies \rho &= r_0(1 - \sqrt[3]{1-q}). \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt T soll das Bonbon komplett weggelutscht sein, also

$$0 = r(T) = r_0 - \rho T = r_0 - r_0(1 - \sqrt[3]{1-q})T \stackrel{(4.1)}{\implies} T = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{1-q}}.$$

Es bleibt anzumerken, daß durchaus $q > 1$ gelten darf. Für eine Brausetablette kann man etwa $q = 28$ annehmen, womit sie schon nach 15 Sekunden aufgelöst ist.²

¹ Zerbeißen des Bonbons vergrößert übrigens bei gleichbleibendem Volumen die Oberfläche, womit der Radius schneller abnimmt. Teilt man es z. B. zum Zeitpunkt $t_{\text{beiß}}$ genau in zwei Hälften, so lautet die Funktion $r_{\text{beiß}}(t) = r(t_{\text{beiß}}) - \frac{3}{2}\rho(t - t_{\text{beiß}})$ für $t \geq t_{\text{beiß}}$.

² Gilt dagegen $q \approx 0$, so sollte man sich fragen, ob man nicht vielleicht doch einen Stein erwischt hat. . . Hauptsache man merkt es vor $t_{\text{beiß}}$!