

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 1. (GREEN bei der Arbeit)

Betrachten Sie das Kraftfeld

$$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 8x + 9y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die dieses Kraftfeld leistet, wenn ein Massepunkt die Ellipse

$$\vec{c}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \phi \mapsto \begin{pmatrix} 3 \cos \phi \\ 2 \sin \phi \end{pmatrix}$$

durchläuft.

(a) Berechnen Sie das Wegintegral direkt.

(b) Verwenden Sie den Satz von GREEN.

Lösung 1.

Zunächst folgende Vorbetrachtungen. Es gilt

$$\int_0^\pi \sin \phi \cos \phi \, d\phi = \underbrace{\sin^2 \phi \Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \sin \phi \cos \phi \, d\phi \implies \int_0^\pi \sin \phi \cos \phi \, d\phi = 0$$

(partielle Integration) und damit

$$(1.1) \quad \int_0^{k\pi} \sin \phi \cos \phi \, d\phi = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

wegen $\sin(\phi + \pi) \cos(\phi + \pi) = \sin \phi \cos \phi$. Außerdem folgen aus

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} d\phi = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \, d\phi = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \, d\phi + \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \, d\phi$$

und

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \, d\phi = -\underbrace{\sin \phi \cos \phi \Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \, d\phi = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \, d\phi$$

die Identitäten

$$(1.2) \quad \int_0^{k\pi/2} \sin^2 \phi \, d\phi = \int_0^{k\pi/2} \cos^2 \phi \, d\phi = \frac{k\pi}{4}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

wegen $\sin^2(\phi + \frac{\pi}{2}) = \cos^2 \phi$ und $\sin^2(\phi + \pi) = \sin^2 \phi$.

Im folgenden sei γ die Ellipse mit der angegebenen Parametrisierung. Die vom Kraftfeld geleistete Arbeit bei Bewegen eines Massepunktes entlang der Ellipse ist dann

$$\oint_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{x}.$$

(a) Die Ableitung der Parametrisierung lautet

$$\vec{c}'(\phi) := \frac{d\vec{c}}{d\phi}(\phi) = \begin{pmatrix} -3 \sin \phi \\ 2 \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Daher gilt mit (1.1) und (1.2)

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \vec{f}(\vec{c}(\phi)), \vec{c}'(\phi) \rangle d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} ((9 \cos \phi + 8 \sin \phi)(-3 \sin \phi) + (24 \cos \phi + 18 \sin \phi)2 \cos \phi) d\phi \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi - 24 \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi + 48 \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = 24\pi. \end{aligned}$$

(b) Es sei E das von γ umschriebene Gebiet. Der Satz von GREEN liefert die Identität

$$\oint_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{x} = \iint_E \operatorname{rot} \vec{f} d(x, y).$$

Es ist eine Beschreibung des Gebietes E gesucht. Die x -Komponente durchläuft die Werte von -3 bis 3 . Wie verhält sich die y -Komponente bei variablem x ? Offenbar gilt

$$(2x)^2 + (3y)^2 = 36(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = 36$$

und damit erhält man die y -Grenzen des Gebietes in Abhängigkeit von x durch $|y| = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$. Das Gebiet E wird also beschrieben durch

$$E := \{(x, y)^T \mid |x| \leq 3, |y| \leq \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\}.$$

Die vom Kraftfeld geleistete Arbeit berechnet sich nach dem Satz von GREEN demnach zu

$$\iint_E \operatorname{rot} \vec{f} d(x, y) = \int_{-3}^3 \int_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} (8-4) dy dx = 4 \int_{-3}^3 \frac{4}{3}\sqrt{9-x^2} dx$$

(Substitution $x =: 3 \sin \xi \implies \xi = \arcsin \frac{x}{3}, dx = 3 \cos \xi d\xi$)

$$\begin{aligned} &= \frac{16}{3} \int_{\arcsin -1}^{\arcsin 1} 3\sqrt{1-\sin^2 \xi} 3 \cos \xi d\xi \\ &= 48 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \xi d\xi = 96 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \xi d\xi \stackrel{(1.2)}{=} 24\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. (Rotation und Divergenz)

Betrachten Sie die folgenden Vektorfelder $\vec{f}_i$ und die Mengen B_i . Berechnen Sie jeweils das Wegintegral bei Durchlaufen des Randes ∂B_i von B_i und das Flußintegral aus B_i heraus. Sie haben jeweils die Wahl, ob Sie die entsprechenden Integrale direkt über den Rand berechnen oder mit den Sätzen von GREEN bzw. GAUSS in Flächenintegrale verwandeln.

$$(a) \quad \vec{f}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2y \\ 6x \end{pmatrix}, \quad B_1 := [0, 1] \times [0, 1]$$

$$(b) \quad \vec{f}_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad B_2 := [0, 1] \times [0, 1]$$

$$(c) \quad \vec{f}_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ x-y \end{pmatrix}, \quad B_3 := [0, 1] \times [0, 3]$$

$$(d) \quad \vec{f}_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y^3 \\ x^3-y^2 \end{pmatrix}, \quad B_4 := \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$(e) \quad \vec{f}_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x \sin y \\ e^x \cos y \end{pmatrix}, \quad B_5 := [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \cap \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- (a) Es ist $\text{rot } \vec{f}_1 = 4$ und $\text{div } \vec{f}_1 = 0$. Aufgrund der Einfachheit des Gebietes B_1 bietet es sich an, das Wegintegral mit dem Satz von GREEN zu berechnen (das Flußintegral verschwindet selbstverständlich):

$$\oint_{\partial B_1} \vec{f}_1 \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \int_0^1 4 \, dy \, dx = 4$$

- (b) Hier gilt $\text{rot } \vec{f}_2 = 2 - 2y$ und $\text{div } \vec{f}_2 = 0$. Auch hier ist es sinnvoll, den Satz von GREEN zu verwenden:

$$\oint_{\partial B_2} \vec{f}_2 \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \int_0^1 (2 - 2y) \, dy \, dx = 2 - 1 = 1$$

- (c) Es gilt $\text{rot } \vec{f}_3 = 1 - x$ und $\text{div } \vec{f}_3 = y - 1$. Wieder gilt das oben Gesagte:

$$\oint_{\partial B_3} \vec{f}_3 \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \int_0^3 (1 - x) \, dy \, dx = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\oint_{\partial B_3} \langle \vec{f}_3, \vec{n}^0 \rangle \, ds = \int_0^1 \int_0^3 (y - 1) \, dy \, dx = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

- (d) Es ist $\text{rot } \vec{f}_4 = 3x^2 + 3y^2$ und $\text{div } \vec{f}_4 = 1 - 2y$. Das Gebiet B_4 besonders einfach durch *Polarkoordinaten* ausgedrückt werden:

$$B'_4 = \{(r, \phi)^T \mid 0 < r \leq 1, 0 \leq \phi < 2\pi\}$$

Beachte: Der Ursprung wird herausgenommen. Das ist für die Integration nicht wesentlich, da einzelne Punkte das Jordan-Maß Null haben, jedoch Voraussetzung für die Injektivität des Übergangs von Polar- zu kartesischen Koordinaten. Er werde durch die Funktion $\vec{g}$ beschrieben:

$$\vec{g}: \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi), \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

Sie ist injektiv, stetig differenzierbar und die Funktionaldeterminante lautet

$$\det \vec{g}'(r, \phi) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r}(r, \phi) & \frac{\partial g_1}{\partial \phi}(r, \phi) \\ \frac{\partial g_2}{\partial r}(r, \phi) & \frac{\partial g_2}{\partial \phi}(r, \phi) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} = r > 0,$$

ist also insbesondere positiv. Daher kann die Substitutionsregel angewendet werden und es gilt

$$d(x, y) = |\det \vec{g}'(r, \phi)| \, d(r, \phi) = r \, d(r, \phi)$$

Damit lassen sich die Integrale wiederum leicht mit den Integralsätzen berechnen. Das Wegintegral liefert

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B_4} \vec{f} \cdot d\vec{x} &= \iint_{B_4} \text{rot } \vec{f}(x, y) \, d(x, y) = \iint_{B'_4} \text{rot } \vec{f}(\vec{g}(r, \phi)) \, r \, d(r, \phi) \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\phi = \frac{3}{4} 2\pi = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

und für das Flußintegral folgt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial B_4} \langle \vec{f}, \vec{n}^0 \rangle \, ds &= \iint_{B_4} \text{div } \vec{f}(x, y) \, d(x, y) = \iint_{B'_4} \text{div } \vec{f}(\vec{g}(r, \phi)) \, r \, d(r, \phi) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - 2r \sin \phi) \, r \, dr \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin \phi \right) \, d\phi = \pi. \end{aligned}$$

- (e) Hier gilt $\text{rot } \vec{f}_5 = 0$ und $\text{div } \vec{f}_5 = 0$. Beide Integrale verschwinden daher.

Aufgabe 3. (Fläche eines Zyklolds)

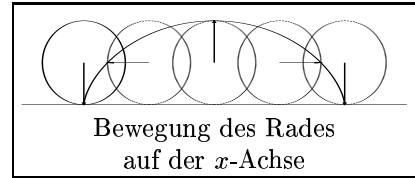
Betrachten Sie ein Rad vom Radius r , das zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Punkt P den Ursprung $(0, 0)$ berührt, während sein Mittelpunkt sich im Punkt $(0, r)$ befindet. Nun rollt dieses Rad entlang der x -Achse, bis P wieder den „Boden“ berührt.

Bestimmen Sie die Fläche, die zwischen der von P beschriebenen Kurve und der x -Achse liegt.

(Tip: Parametrisieren Sie die Kurve durch die Position t des Mittelpunktes. Verwenden Sie dann die Flächenformel aus der Vorlesung, während Sie den Rand der Fläche durchlaufen.)

Lösung 3.

Wenn der Punkt P zum ersten Mal wieder den Boden berührt, hat das Rad (und damit natürlich auch der Mittelpunkt) die Strecke zurückgelegt, die seinem Umfang entspricht, also $2\pi r$. Betrachte nun den Weg, den der Punkt P auf dem *nicht translatierten* Rad zurücklegen würde (man sagt auch, man betrachtet das mit dem Rad mitbewegte Koordinatensystem). Dort beschreibt der Punkt P den Weg



$$\tilde{P}(\phi) = \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r - r \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Es besteht offensichtlich der Zusammenhang $\phi = t/r$ und daher beschreibt P auf dem *translatierten* Rad den Weg γ_1 mit der Parametrisierung

$$\vec{c}_1 : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{P}\left(\frac{t}{r}\right) = \begin{pmatrix} t - r \sin \frac{t}{r} \\ r - r \cos \frac{t}{r} \end{pmatrix} \implies \vec{c}'_1(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos \frac{t}{r} \\ \sin \frac{t}{r} \end{pmatrix}.$$

Um die Fläche des Gebietes, das zwischen dem Weg γ_1 und der x -Achse liegt, berechnen zu können, benötigt man noch den Rückweg γ_2 mit der Parametrisierung

$$\vec{c}_2 : [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 2\pi r - t \\ 0 \end{pmatrix} \implies \vec{c}'_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Flächenformel für ein Gebiet G lautet

$$|G| = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} \vec{f} \cdot d\vec{x} \quad \text{mit} \quad \vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Der Gesamtweg $\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2$ durchläuft den Rand des Gebietes G im negativen Durchlaufsinne (das heißt, das Gebiet liegt rechts vom Weg). Daher folgt für die Fläche

$$\begin{aligned} |G| &= -\frac{1}{2} \oint_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{x} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi r} \langle \vec{f}(\vec{c}_1(t)), \vec{c}'_1(t) \rangle dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r} \langle \vec{f}(\vec{c}_2(t)), \vec{c}'_2(t) \rangle dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi r} \left[\left(r \cos \frac{t}{r} - r \right) \left(1 - \cos \frac{t}{r} \right) + \left(t - r \sin \frac{t}{r} \right) \left(\sin \frac{t}{r} \right) \right] dt - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi r} 0 dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi r} \left[(r-1) \cos \frac{t}{r} - r - r \underbrace{\left(\cos^2 \frac{t}{r} + \sin^2 \frac{t}{r} \right)}_{=1} + t \sin \frac{t}{r} \right] dt \end{aligned}$$

($t \sin \frac{t}{r}$ partiell integrieren)

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \underbrace{\left(r-1 \right) r \sin \frac{t}{r} \Big|_{t=0}^{2\pi r}}_{=0} + 2\pi r^2 + \underbrace{\frac{1}{2} t r \cos \frac{t}{r} \Big|_{t=0}^{2\pi r}}_{=\pi r^2} - \underbrace{\int_0^{2\pi r} r \cos \frac{t}{r} dt}_{=0} \\ &= 3\pi r^2. \end{aligned}$$