

Praktische Analysis WS 2001/02

Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1. (Rotation und Potential)

(a) Zeigen Sie: Die Funktion

$$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

ist stetig differenzierbar und erfüllt das Rotationskriterium

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y}.$$

Trotzdem gibt es geschlossene Wege, auf denen das Wegintegral nicht verschwindet.
(Tip: Betrachten Sie einen Kreis vom Radius 1 um den Ursprung.)

(b) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{g}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Interpretieren Sie $\vec{g}$ und bestimmen und erläutern Sie $\text{rot } \vec{g}$.

Lösung 1.

(a) Die Ableitungen lauten

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}.$$

Sie sind stetig auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und daher ist $\vec{f}$ eine C^1 -Funktion (stetig differenzierbar). Wie man leicht abliest, ist das Rotationskriterium erfüllt. Dennoch ist das Vektorfeld nicht rotationsfrei: Sei etwa $\vec{c}(\phi)$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ eine Parametrisierung des geschlossenen Weges γ , der auf dem Kreis mit dem Radius 1 um den Ursprung verläuft, also

$$\vec{c}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi \mapsto \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}.$$

Es gilt offenbar

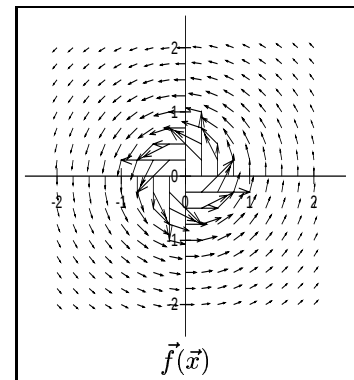
$$\vec{c}'(\phi) := \frac{d\vec{c}}{d\phi}(\phi) = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{f}(\vec{c}(\phi)) = \frac{1}{(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} = \vec{c}'(\phi).$$

Damit folgt

$$\oint_{\gamma} \vec{f} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \langle \vec{f}(\vec{c}(\phi)), \vec{c}'(\phi) \rangle d\phi = \int_0^{2\pi} \langle \vec{c}'(\phi), \vec{c}'(\phi) \rangle d\phi = \int_0^{2\pi} \|\vec{c}'(\phi)\|_2^2 d\phi = 2\pi \neq 0$$

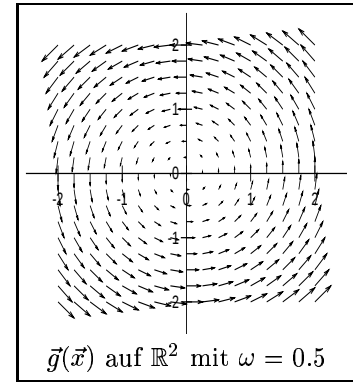


wegen $\|\vec{c}'(\phi)\|_2^2 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$. Das Rotationskriterium schlägt fehl, da das Gebiet, auf dem $\vec{f}$ definiert ist, nicht einfach zusammenhängend ist. (Anmerkung: Dieses Ergebnis ist dem *Residuensatz* der Funktionentheorie sehr ähnlich.)

(b) Für $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$ liefert $\vec{g}$ das klassische Beispiel eines Rotationsvektorfeldes.

ω gibt dabei die *Winkelgeschwindigkeit* an. Positive Werte bedeuten dabei Rotation im mathematisch positiven Sinn, also *gegen* den Uhrzeigersinn. (Anmerkung: Für $\omega = 1$ erhält man für den unter (a) angegebenen Weg γ offenbar dasselbe Ergebnis, wenn man $\mathbb{R}^2$ auf natürliche Weise als x - y -Ebene in den $\mathbb{R}^3$ einbettet.) Das Vektorfeld ist für konstante x, y invariant. Es genügt daher, es auf der x - y -Ebene zu betrachten. Die Rotation berechnet sich zu

$$\operatorname{rot} \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}.$$



Es ergibt sich ein konstanter Vektor, der in z -Richtung zeigt. Seine *Länge* ist ein Maß für die Rotationsgeschwindigkeit und mit seiner Richtung läßt sich die Rotationsrichtung feststellen: Hält man an der rechten Hand den Daumen in Richtung $\operatorname{rot} \vec{g}$ und krümmt die übrigen Finger, so zeigen die Finger in Richtung der Rotation – für $\omega > 0$ gegen den Uhrzeigersinn, wie vorausgesagt. (Anmerkung: Voraussetzung für die Einsetzbarkeit der beschriebenen *Rechte-Hand-Regel* ist, daß auch das Koordinatensystem ein *Rechts-System* ist: Zeigt der Daumen in x -Richtung und der Zeigefinger in y -Richtung, so muß der Mittelfinger in z -Richtung weisen. Dafür ist wiederum die rechte Hand zu verwenden, versteht sich.)

Warum ist nun der Rotationsvektor konstant, obwohl offensichtlich das Vektorfeld selbst mit wachsendem Abstand von der z -Achse größer wird? Das liegt an der Tatsache, daß $\operatorname{rot} \vec{g}$ (genauer $\|\operatorname{rot} \vec{g}\|_2$) ein Maß für die *Winkelgeschwindigkeit* ist. Ein Objekt, das sich weiter von der Drehachse entfernt, muß sich schneller bewegen, um die Winkelgeschwindigkeit konstant zu halten.

Zusammengefaßt ergibt sich: Das Vektorfeld $\vec{g}$ gibt an jedem Punkt des $\mathbb{R}^3$ den Geschwindigkeitsvektor an, den ein Objekt dort besitzen muß, um sich in einer Kreisbahn um die z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω zu bewegen.

Aufgabe 2. (Das FERMAT-WEBER-Problem ist algebraisch schwer)

Betrachten Sie die Punktmenge

$$P = \{(3, 0), (-3, 0), (1, 3), (-1, 3), (0, 4)\}.$$

Zeigen Sie: Die Lösung des FERMAT-WEBER-Problems, das heißt ein optimaler Zentralpunkt $z = (0, y)$, der bezüglich der $\|\cdot\|_2$ -Norm die Summe der euklidischen Abstände minimiert, erfüllt die Bedingung

$$p(y) := 15y^8 - 180y^7 + 1030y^6 - 4128y^5 + 11907y^4 - 15876y^3 - 17928y^2 + 75816y - 54756 = 0.$$

(Tip: Betrachten Sie die Ableitung nach y und formen Sie diese geeignet um.)

Lösung 2.

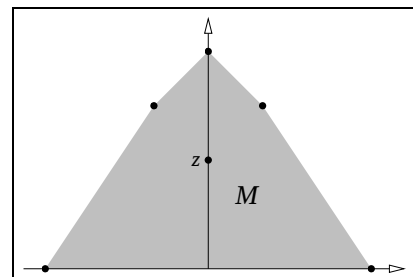
Zunächst folgende Überlegung: Offenbar liegt ein optimaler Punkt des FERMAT-WEBER-Problems innerhalb der konvexen Menge M , die von den Punkten in P aufgespannt wird, denn entfernt man sich aus dieser, vergrößert sich der Abstand zu allen Punkten. Aus Symmetriegründen liegt er zudem sicher auf der y -Achse. Damit gilt auf jeden Fall

$$0 \leq y \leq 4 \quad (2.1)$$

für den gesuchten Punkt $z = (0, y)$. Diese Menge ist zudem kompakt, daher wird das Minimum angenommen.

Die Punkte aus P seien mit $p^{(k)}$, $k = 1, \dots, 5$ bezeichnet. Definiere $D(y)$ als die Summe aller euklidischen Abstände zu den Punkten aus P in Abhängigkeit von y :

$$D(y) := \sum_{k=1}^5 \|p^{(k)} - (0, y)\|_2 = \sum_{k=1}^5 \sqrt{(p_x^{(k)})^2 + (p_y^{(k)} - y)^2} = 2\sqrt{9 + y^2} + 2\sqrt{1 + (3 - y)^2} + |4 - y|.$$



Wegen (2.1) können die Betragsstriche beim letzten Term wegfallen. Eine notwendige Bedingung für ein Minimum ist das Verschwinden der ersten Ableitung.

$$0 = D'(y) = \frac{2y}{\sqrt{9+y^2}} + \frac{2(y-3)}{\sqrt{1+(y-3)^2}} - 1$$

Sämtliche Nenner sind positiv, man kann also mit ihnen multiplizieren und erhält

$$0 = 2y\sqrt{1+(y-3)^2} + 2(y-3)\sqrt{9+y^2} - \sqrt{(9+y^2)(1+(y-3)^2)}.$$

Zur Abkürzung definiere $\alpha = 1 + (y-3)^2 = y^2 - 6y + 10$ und $\beta = y^2 + 9$. Isolieren des reinen Wurzelterms und anschließendes Quadrieren liefert

$$\alpha\beta = 4y^2\alpha + 4(y-3)^2\beta + 8y(y-3)\sqrt{\alpha\beta} \iff 8y(y-3)\sqrt{\alpha\beta} = \alpha\beta - 4y^2\alpha - 4(y-3)^2\beta$$

und erneutes Quadrieren

$$\begin{aligned} 64y^2(y-3)^2\alpha\beta &= \alpha^2\beta^2 + 16y^4\alpha^2 + 16(y-3)^4\beta^2 - 8y^2\alpha^2\beta - 8(y-3)^2\alpha\beta^2 + 32y^2(y-3)^2\alpha\beta \\ \iff 0 &= \alpha^2\beta^2 + 16y^4\alpha^2 + 16(y-3)^4\beta^2 - 8y^2\alpha^2\beta - 8(y-3)^2\alpha\beta^2 - 32y^2(y-3)^2\alpha\beta. \end{aligned}$$

Nun sind alle Wurzelterme eliminiert und das „lustige“ Auflösen nach Potenzen kann beginnen. Dazu zunächst einige Zwischenrechnungen:

$$\alpha^2 = (y^2 - 6y + 10)^2 = y^4 + 36y^2 + 100 - 12y^3 + 20y^2 - 120y$$

$$= y^4 - 12y^3 + 56y^2 - 120y + 100$$

$$\beta^2 = (9 + y^2)^2 = y^4 + 18y^2 + 81$$

$$\boxed{\alpha^2\beta^2} = \boxed{y^8 - 12y^7 + 74y^6 - 336y^5 + 1189y^4 - 3132y^3 + 6336y^2 - 9720y + 8100}$$

$$\alpha\beta = (y^2 - 6y + 10)(9 + y^2) = y^4 - 6y^3 + 19y^2 - 54y + 90$$

$$\boxed{-8y^2\alpha^2\beta} = -8y^2(y^4 - 12y^3 + 56y^2 - 120y + 100)(9 + y^2)$$

$$= \boxed{-8y^8 + 96y^7 - 520y^6 + 1824y^5 - 4832y^4 + 8640y^3 - 7200y^2}$$

$$-8(y-3)^2\alpha\beta = -8(y^2 - 6y + 9)(y^4 - 6y^3 + 19y^2 - 54y + 90)$$

$$= -8y^6 + 96y^5 - 512y^4 + 1776y^3 - 4680y^2 + 8208y - 6480$$

$$\boxed{-8(y-3)^2\alpha\beta^2} = (-8y^6 + 96y^5 - 512y^4 + 1776y^3 - 4680y^2 + 8208y - 6480)(y^2 + 9)$$

$$= \boxed{-8y^8 + 96y^7 - 584y^6 + 2640y^5 - 9288y^4 + 24192y^3 - 48600y^2 + 73872y - 58320}$$

$$\boxed{-32y^2(y-3)^2\alpha\beta} = 4y^2(-8y^6 + 96y^5 - 512y^4 + 1776y^3 - 4680y^2 + 8208y - 6480)$$

$$= \boxed{-32y^8 + 384y^7 - 2048y^6 + 7104y^5 - 18720y^4 + 32832y^3 - 25920y^2}$$

$$\boxed{16y^4\alpha^2} = 16y^4(y^4 - 12y^3 + 56y^2 - 120y + 100) = \boxed{16y^8 - 192y^7 + 896y^6 - 1920y^5 + 1600y^4}$$

$$\boxed{16(y-3)^4\beta^2} = 16(y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81)(y^4 + 18y^2 + 81)$$

$$= \boxed{16y^8 - 192y^7 + 1152y^6 - 5184y^5 + 18144y^4 - 46656y^3 + 93312y^2 - 139968y + 104976}$$

Damit erhält man durch Aufsummieren der Koeffizienten schließlich das Polynom

$$p(y) = -15y^8 + 180y^7 - 1030y^6 + 4128y^5 - 11907y^4 + 15876y^3 + 17928y^2 - 75816y + 54756,$$

welches sich von dem angegebenen nur durch das Vorzeichen unterscheidet, also dieselben Nullstellen besitzt.

Offenbar gilt $D'(y_0) = 0 \implies p(y_0) = 0$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, da durch das Quadrieren neue Nullstellen hinzugefügt werden (können).

Es bleibt noch anzumerken, daß ich (a) mich mindestens n -mal ($n > 5$) verrechnet habe, (b) alles nur mit einem Stift und Zettel bewaffnet gerechnet habe und (c) wohl demnächst doch mal Mathematica kaufen werde...

Aufgabe 3. (Lokale Optimalität für das FERMAT-WEBER-Problem)

Es sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ eine endliche Menge von Punkten in $\mathbb{R}^2$ und z eine Optimallösung des FERMAT-WEBER-Problems, die nicht mit einem Punkt in P zusammenfällt. Sei ϕ_k der Winkel, der zwischen der positiven x -Achse und dem Strahl von z durch p_k gebildet wird.

(a) Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^n \sin \phi_k = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n \cos \phi_k = 0.$$

(Tip: Verifizieren Sie zunächst, daß der Gradient bezüglich eines einzelnen Punktes p ein Einheitsvektor mit Richtung von p nach z ist. Interpretieren Sie dann den gesamten Gradienten geometrisch als die Summe von n Einheitsvektoren und betrachten Sie die x - und y -Komponenten.)

(b) Für den Fall $n = 3$ liegen zwischen den drei Strahlen von z nach p_1, p_2, p_3 genau 120° .

(Tip: Betrachten Sie die Winkel bezüglich eines Strahls von z durch p_1 statt zur x -Achse. Folgern Sie durch Betrachtung senkrecht zu diesem Strahl, daß die Lage von p_2 und p_3 symmetrisch bezüglich dieses Strahls ist. Schließen Sie durch Betrachtung parallel zum Strahl auf die gesuchten Winkel.)

Lösung 3.

(a) Die Punkte seien wieder mit $p^{(k)}$ bezeichnet. Für alle $p^{(k)} \in P$ sei die Abstandsfunktion D_k definiert durch

$$D_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = (x, y) \mapsto \|z - p^{(k)}\|_2 = \sqrt{(x - p_x^{(k)})^2 + (y - p_y^{(k)})^2}.$$

Der Gradient dieser Funktionen ist

$$\text{grad } D_k(z) = \frac{1}{\sqrt{(x - p_x^{(k)})^2 + (y - p_y^{(k)})^2}} \begin{pmatrix} x - p_x^{(k)} \\ y - p_y^{(k)} \end{pmatrix} = \frac{z - p^{(k)}}{\|z - p^{(k)}\|_2},$$

also ein Einheitsvektor, der von dem jeweiligen Punkt $p^{(k)}$ in Richtung z zeigt, solange z nicht der Punkt $p^{(k)}$ selber ist. Das ist aber laut Voraussetzung für die zu untersuchende Optimallösung ausgeschlossen.

Definiere nun die Funktion

$$D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \sum_{k=1}^n D_k(z).$$

Gesucht ist das Minimum dieser stetigen Funktion und mit den gleichen Argumenten wie in Aufgabe 2 wird es auch auf der konvexen und insbesondere kompakten Hülle der Punkte aus P angenommen. Die Bedingung dafür ist, daß $\text{grad } D$ verschwindet. Aufgrund der Linearität der Gradientenbildung ist das gleichbedeutend mit

$$0 = \text{grad } D(z) = \text{grad} \sum_{k=1}^n D_k(z) = \sum_{k=1}^n \text{grad } D_k(z).$$

Sei nun z eine Optimallösung. Dann gilt für einen beliebigen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$$0 = \langle \text{grad } D(z), \vec{v} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \text{grad } D_k(z), \vec{v} \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle \text{grad } D_k(z), \vec{v} \rangle,$$

insbesondere für die Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ in x - bzw. y -Richtung. Für diese gilt aber gerade

$$\left\langle \frac{z - p^{(k)}}{\|z - p^{(k)}\|_2}, \vec{e}_x \right\rangle = -\cos \phi_k \quad \text{bzw.} \quad \left\langle \frac{z - p^{(k)}}{\|z - p^{(k)}\|_2}, \vec{e}_y \right\rangle = -\sin \phi_k$$

und damit folgt die Behauptung.

(b) Man kann ohne Einschränkungen annehmen, daß z und p_1 auf der x -Achse liegen. Dann gilt $\cos \phi_1 = 1$ und $\sin \phi_1 = 0$. Nach Teil (a) gilt dann

$$\cos \phi_2 + \cos \phi_3 = -1 \quad \text{und} \quad \sin \phi_2 + \sin \phi_3 = 0.$$

Behauptung: Für keinen der Winkel ϕ_2, ϕ_3 gilt $\cos \phi_k = -1$. Dann wäre nämlich $\sin \phi_k = 0$ und damit für den anderen Winkel $\sin \phi_l = 0$ und $\cos \phi_l = 0$, was nicht sein kann. Daraus folgt auch, daß für keinen der Winkel $\cos \phi_k = 0$ gelten kann. Also gilt für beide Winkel $-1 < \cos \phi_k < 0$ und daher auch $0 < |\sin \phi_k| < 1$. Damit liegen die Strahlen von z durch p_2 und p_3 symmetrisch zur x -Achse, das heißt sie bilden mit der x -Achse betragsmäßig gleiche Winkel. Das bedeutet aber $\cos \phi_2 = \cos \phi_3$ und damit $\cos \phi_k = -\frac{1}{2}$. Daraus folgt $\phi_k = \pm 120^\circ$.