Technische Universität Braunschweig

Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Algorithmik

Mathematische Methoden der Algorithmik
Dualer Simplex-Algorithmus

Wintersemester 2026/27

Letzte Woche: Dualität

Primal (P)

$$\max\ c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

Dual (D)

$$\min\ b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0$$

Letzte Woche: Dualität

Primal (P)

$$\max\ c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

Dual (D)

$$\min\ b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0$$

- **Schwache Dualität:** $c^\top x \leq b^\top y$ für alle primal zulässigen x und dual zulässigen y.

Letzte Woche: Dualität

Primal (P)

$$\max\ c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

Dual (D)

$$\min\ b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0$$

- **Schwache Dualität:** $c^\top x \leq b^\top y$ für alle primal zulässigen x und dual zulässigen y.
- **Starke Dualität:** Hat (P) eine optimale Lösung x^*, so auch (D) eine, y^*, mit $c^\top x^* = b^\top y^*$.

Letzte Woche: Dualität

Primal (P)

$$\max\ c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

Dual (D)

$$\min\ b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0$$

- **Schwache Dualität:** $c^\top x \leq b^\top y$ für alle primal zulässigen x und dual zulässigen y.
- **Starke Dualität:** Hat (P) eine optimale Lösung x^*, so auch (D) eine, y^*, mit $c^\top x^* = b^\top y^*$.
- y^* steht im optimalen primalen Dictionary: $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$ (Koeffizienten der w_i in der Zielfunktion).

Letzte Woche: Dualität

Primal (P)

$$\max\ c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

Dual (D)

$$\min\ b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0$$

- **Schwache Dualität:** $c^\top x \leq b^\top y$ für alle primal zulässigen x und dual zulässigen y.
- **Starke Dualität:** Hat (P) eine optimale Lösung x^*, so auch (D) eine, y^*, mit $c^\top x^* = b^\top y^*$.
- y^* steht im optimalen primalen Dictionary: $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$ (Koeffizienten der w_i in der Zielfunktion).
- **Komplementärer Schlupf:** x, y zulässig sind optimal $\Leftrightarrow$ $x_j z_j = 0$ für alle j und $w_i y_i = 0$ für alle i.

Letzte Woche: duale Dictionaries

Primales Dictionary

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

Duales Dictionary

$$\begin{aligned} -\xi &= -\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ z_j &= -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Letzte Woche: duale Dictionaries

Primales Dictionary

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

Duales Dictionary

$$\begin{aligned} -\xi &= -\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ z_j &= -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

- Koeffizienten als Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & -b^\top \\ -c & A^\top \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}^\top$

Letzte Woche: duale Dictionaries

Primales Dictionary

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

Duales Dictionary

$$\begin{aligned} -\xi &= -\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ z_j &= -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

- Koeffizienten als Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & -b^\top \\ -c & A^\top \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}^\top$
- Das duale Dictionary ist das **negativ Transponierte** des primalen.

Letzte Woche: duale Dictionaries

Primales Dictionary

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

Duales Dictionary

$$\begin{aligned} -\xi &= -\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ z_j &= -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

- Koeffizienten als Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & -b^\top \\ -c & A^\top \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}^\top$
- Das duale Dictionary ist das **negativ Transponierte** des primalen.
- Am Beispiel beobachtet: Das bleibt beim Pivotieren so. **Heute:** Warum? Und was bringt uns das?

Primal und dual pivotieren

Beispiel

Primal

$$
\begin{aligned}
\max\ & -x_1 - x_2 \\
\text{s.t. } & -2x_1 - x_2 \leq 4 \\
& -2x_1 + 4x_2 \leq -8 \\
& -x_1 + 3x_2 \leq -7 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
\min\ & 4y_1 - 8y_2 - 7y_3 \\
\text{s.t. } & -2y_1 - 2y_2 - y_3 \geq -1 \\
& -y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq -1 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ & -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 + 4x_2 \leq -8 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq -7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min\ & 4y_1 - 8y_2 - 7y_3 \\ \text{s.t.}\ & -2y_1 - 2y_2 - y_3 \geq -1 \\ & -y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq -1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Primal: $b_2, b_3 < 0$, $x = 0$ ist **unzulässig** $\Rightarrow$ Phase I nötig.

Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t. } & -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 + 4x_2 \leq -8 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq -7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min\ & 4y_1 - 8y_2 - 7y_3 \\ \text{s.t. } & -2y_1 - 2y_2 - y_3 \geq -1 \\ & -y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq -1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Primal: $b_2, b_3 < 0$, $x = 0$ ist **unzulässig** $\Rightarrow$ Phase I nötig.
- Dual in Standardform: rechte Seiten $1, 1 \geq 0$, $y = 0$ **zulässig** $\Rightarrow$ Simplex auf dem dualen LP!

Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & -x_1 - x_2 \\ \text{s.t. } & -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 + 4x_2 \leq -8 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq -7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min\ & 4y_1 - 8y_2 - 7y_3 \\ \text{s.t. } & -2y_1 - 2y_2 - y_3 \geq -1 \\ & -y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq -1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Primal: $b_2, b_3 < 0$, $x = 0$ ist **unzulässig** $\Rightarrow$ Phase I nötig.
- Dual in Standardform: rechte Seiten $1, 1 \geq 0$, $y = 0$ **zulässig** $\Rightarrow$ Simplex auf dem dualen LP!
- Was passiert dabei im primalen Dictionary?

Beispiel: Pivotschritte

Primal

$$\begin{aligned} \zeta &= -x_1 - x_2 \\ \hline w_1 &= 4 + 2x_1 + x_2 \\ w_2 &= -8 + 2x_1 - 4x_2 \\ w_3 &= -7 + x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} -\xi &= -4y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\ \hline z_1 &= 1 - 2y_1 - 2y_2 - y_3 \\ z_2 &= 1 - y_1 + 4y_2 + 3y_3 \end{aligned}$$

Beispiel: Pivotschritte

Primal

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & - x_1 - x_2 \\
\hline
w_1 &= 4 + 2x_1 + x_2 \\
w_2 &= -8 + 2x_1 - 4x_2 \\
w_3 &= -7 + x_1 - 3x_2
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
-\xi &= & - 4y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\
\hline
z_1 &= 1 - 2y_1 - 2y_2 - y_3 \\
z_2 &= 1 - y_1 + 4y_2 + 3y_3
\end{aligned}
$$

Dual: Simplex wie gewohnt, y_2 tritt ein, z_1 tritt aus $\leftrightarrow$ primal: w_2 tritt aus, x_1 tritt ein.

Beispiel: Pivotschritte

Primal

$$\begin{aligned} \zeta &= -x_1 - x_2 \\ \hline w_1 &= 4 + 2x_1 + x_2 \\ w_2 &= -8 + \boxed{2x_1} - 4x_2 \\ w_3 &= -7 + x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} -\xi &= -4y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\ \hline z_1 &= 1 - 2y_1 - \boxed{2y_2} - y_3 \\ z_2 &= 1 - y_1 + 4y_2 + 3y_3 \end{aligned}$$

Dual: Simplex wie gewohnt, y_2 tritt ein, z_1 tritt aus $\leftrightarrow$ primal: w_2 tritt aus, x_1 tritt ein.

Beispiel: Pivotschritte

Primal

$$\begin{aligned} \zeta &= -4 - \tfrac{1}{2}w_2 - 3x_2 \\ \hline w_1 &= 12 + w_2 + 5x_2 \\ x_1 &= 4 + \tfrac{1}{2}w_2 + 2x_2 \\ w_3 &= -3 + \tfrac{1}{2}w_2 - x_2 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} -\xi &= 4 - 12y_1 - 4z_1 + 3y_3 \\ \hline y_2 &= \tfrac{1}{2} - y_1 - \tfrac{1}{2}z_1 - \tfrac{1}{2}y_3 \\ z_2 &= 3 - 5y_1 - 2z_1 + y_3 \end{aligned}$$

Wieder negativ transponiert! Primal weiter unzulässig (w_3), aber alle $\bar{c}_j \leq 0$.

Beispiel: Pivotschritte

Primal

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -4 - \tfrac{1}{2}w_2 - 3x_2 \\
\hline
w_1 &= 12 + w_2 + 5x_2 \\
x_1 &= 4 + \tfrac{1}{2}w_2 + 2x_2 \\
w_3 &= -3 + \tfrac{1}{2}w_2 - x_2
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
-\xi &= 4 - 12y_1 - 4z_1 + 3y_3 \\
\hline
y_2 &= \tfrac{1}{2} - y_1 - \tfrac{1}{2}z_1 - \tfrac{1}{2}y_3 \\
z_2 &= 3 - 5y_1 - 2z_1 + y_3
\end{aligned}
$$

Dual: y_3 tritt ein, y_2 tritt aus $\leftrightarrow$ primal: w_3 tritt aus, w_2 tritt ein.

Beispiel: Pivotschritte

Primal

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -4 - \tfrac{1}{2}w_2 - 3x_2 \\
\hline
w_1 &= 12 + w_2 + 5x_2 \\
x_1 &= 4 + \tfrac{1}{2}w_2 + 2x_2 \\
w_3 &= -3 + \tfrac{1}{2}w_2 - x_2
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
-\xi &= 4 - 12y_1 - 4z_1 + 3y_3 \\
\hline
y_2 &= \tfrac{1}{2} - y_1 - \tfrac{1}{2}z_1 - \tfrac{1}{2}y_3 \\
z_2 &= 3 - 5y_1 - 2z_1 + y_3
\end{aligned}
$$

Dual: y_3 tritt ein, y_2 tritt aus $\leftrightarrow$ primal: w_3 tritt aus, w_2 tritt ein.

Beispiel: Pivotschritte

Primal

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -7 - w_3 - 4x_2 \\
\hline
w_1 &= 18 + 2w_3 + 7x_2 \\
x_1 &= 7 + w_3 + 3x_2 \\
w_2 &= 6 + 2w_3 + 2x_2
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
-\xi &= 7 - 18y_1 - 7z_1 - 6y_2 \\
\hline
y_3 &= 1 - 2y_1 - z_1 - 2y_2 \\
z_2 &= 4 - 7y_1 - 3z_1 - 2y_2
\end{aligned}
$$

Dual: y_3 tritt ein, y_2 tritt aus $\leftrightarrow$ primal: w_3 tritt aus, w_2 tritt ein.

Beispiel: Pivotschritte

Primal

$$\begin{aligned} \zeta &= -7 - w_3 - 4x_2 \\ \hline w_1 &= 18 + 2w_3 + 7x_2 \\ x_1 &= 7 + w_3 + 3x_2 \\ w_2 &= 6 + 2w_3 + 2x_2 \end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

Dual

$$\begin{aligned} -\xi &= 7 - 18y_1 - 7z_1 - 6y_2 \\ \hline y_3 &= 1 - 2y_1 - z_1 - 2y_2 \\ z_2 &= 4 - 7y_1 - 3z_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

alle Koeffizienten in $-\xi$ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

Beide optimal: $x^* = (7, 0)$, $y^* = (0, 0, 1)$, $\zeta^* = \xi^* = -7$ – ganz ohne Phase I.

Dictionaries als Matrizen

Aktuelles Dictionary mit Basis $\mathcal{B}$ und Nichtbasis $\mathcal{N}$:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j, \qquad x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i \in \mathcal{B})$$

	1	x_j
ζ	$\bar{\zeta}$	$\bar{c}_j$
x_i	$\bar{b}_i$	$-\bar{a}_{ij}$

$(m+1) \times (n+1)$, Zeilen $i \in \mathcal{B}$, Spalten $j \in \mathcal{N}$

Dictionaries als Matrizen

Aktuelles Dictionary mit Basis $\mathcal{B}$ und Nichtbasis $\mathcal{N}$:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j, \qquad x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i \in \mathcal{B})$$

	1	x_j
ζ	$\bar{\zeta}$	$\bar{c}_j$
x_i	$\bar{b}_i$	$-\bar{a}_{ij}$

$(m+1) \times (n+1)$, Zeilen $i \in \mathcal{B}$, Spalten $j \in \mathcal{N}$

	1	x_1	x_2
ζ	0	-1	-1
w_1	4	2	1
w_2	-8	2	-4
w_3	-7	1	-3

Primales Dictionary des Beispiels

Dictionaries als Matrizen

Aktuelles Dictionary mit Basis $\mathcal{B}$ und Nichtbasis $\mathcal{N}$:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j, \qquad x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i \in \mathcal{B})$$

	1	x_j
ζ	$\bar{\zeta}$	$\bar{c}_j$
x_i	$\bar{b}_i$	$-\bar{a}_{ij}$

$(m+1) \times (n+1)$, Zeilen $i \in \mathcal{B}$, Spalten $j \in \mathcal{N}$

	1	x_1	x_2
ζ	0	-1	-1
w_1	4	2	1
w_2	-8	2	-4
w_3	-7	1	-3

Primales Dictionary des Beispiels

- Einträge = Koeffizienten so, wie sie im Dictionary stehen (mit Vorzeichen).

Dictionaries als Matrizen

Aktuelles Dictionary mit Basis $\mathcal{B}$ und Nichtbasis $\mathcal{N}$:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j, \qquad x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i \in \mathcal{B})$$

	1	x_j
ζ	$\bar{\zeta}$	$\bar{c}_j$
x_i	$\bar{b}_i$	$-\bar{a}_{ij}$

$(m+1) \times (n+1)$, Zeilen $i \in \mathcal{B}$, Spalten $j \in \mathcal{N}$

	1	x_1	x_2
ζ	0	-1	-1
w_1	4	2	1
w_2	-8	2	-4
w_3	-7	1	-3

Primales Dictionary des Beispiels

- Einträge = Koeffizienten so, wie sie im Dictionary stehen (mit Vorzeichen).
- Die Konstanten sind die Koeffizienten der „Variablen“ 1; die Zielfunktion ζ ist eine weitere Zeile.

Was macht ein Pivotschritt?

	x_j	x_l
x_i	p	q
x_k	r	s

x_j tritt ein, x_i tritt aus. Benenne die Einträge:

- $p \neq 0$: **Pivotelement** (Zeile i, Spalte j)
- q: Pivotzeile, beliebige andere Spalte l (auch die Konstante 1)
- r: Pivotspalte, beliebige andere Zeile k (auch ζ)
- s: Zeile k, Spalte l

Was macht ein Pivotschritt?

	x_j	x_l
x_i	p	q
x_k	r	s

x_j tritt ein, x_i tritt aus. Benenne die Einträge:

- $p \neq 0$: **Pivotelement** (Zeile i, Spalte j)
- q: Pivotzeile, beliebige andere Spalte l (auch die Konstante 1)
- r: Pivotspalte, beliebige andere Zeile k (auch ζ)
- s: Zeile k, Spalte l

Pivotzeile nach x_j auflösen:

Was macht ein Pivotschritt?

	x_j	x_l
x_i	p	q
x_k	r	s

x_j tritt ein, x_i tritt aus. Benenne die Einträge:

- $p \neq 0$: **Pivotelement** (Zeile i, Spalte j)
- q: Pivotzeile, beliebige andere Spalte l (auch die Konstante 1)
- r: Pivotspalte, beliebige andere Zeile k (auch ζ)
- s: Zeile k, Spalte l

Pivotzeile nach x_j auflösen:

$$x_i = \cdots + p\,x_j + q\,x_l + \cdots \quad \Longleftrightarrow \quad x_j = \cdots + \frac{1}{p}\,x_i - \frac{q}{p}\,x_l + \cdots$$

Was macht ein Pivotschritt?

	x_j	x_l
x_i	p	q
x_k	r	s

x_j tritt ein, x_i tritt aus. Benenne die Einträge:

- $p \neq 0$: **Pivotelement** (Zeile i, Spalte j)
- q: Pivotzeile, beliebige andere Spalte l (auch die Konstante 1)
- r: Pivotspalte, beliebige andere Zeile k (auch ζ)
- s: Zeile k, Spalte l

Pivotzeile nach x_j auflösen:

$$x_i = \cdots + p\,x_j + q\,x_l + \cdots \quad \Longleftrightarrow \quad x_j = \cdots + \frac{1}{p}\,x_i - \frac{q}{p}\,x_l + \cdots$$

In jede andere Zeile einsetzen:

Was macht ein Pivotschritt?

	x_j	x_l
x_i	p	q
x_k	r	s

x_j tritt ein, x_i tritt aus. Benenne die Einträge:

- $p \neq 0$: **Pivotelement** (Zeile i, Spalte j)
- q: Pivotzeile, beliebige andere Spalte l (auch die Konstante 1)
- r: Pivotspalte, beliebige andere Zeile k (auch ζ)
- s: Zeile k, Spalte l

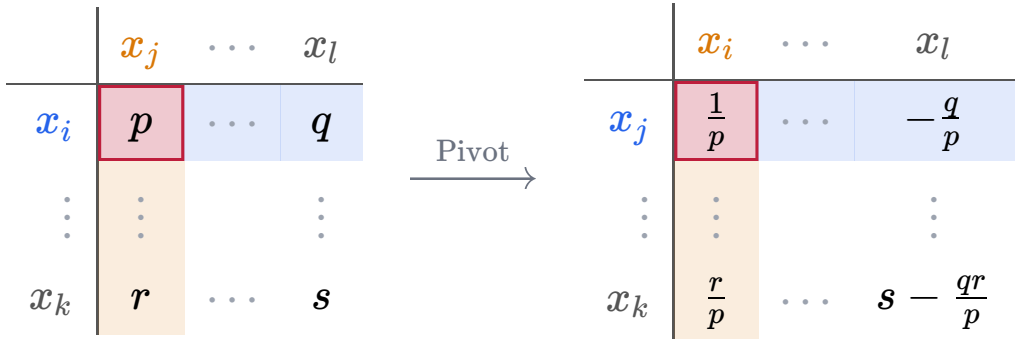
Pivotzeile nach x_j auflösen:

$$x_i = \cdots + p\,x_j + q\,x_l + \cdots \quad \Longleftrightarrow \quad x_j = \cdots + \frac{1}{p}\,x_i - \frac{q}{p}\,x_l + \cdots$$

In jede andere Zeile einsetzen:

$$x_k = \cdots + r\,x_j + s\,x_l + \cdots \quad = \quad \cdots + \frac{r}{p}\,x_i + \left(s - \frac{qr}{p}\right) x_l + \cdots$$

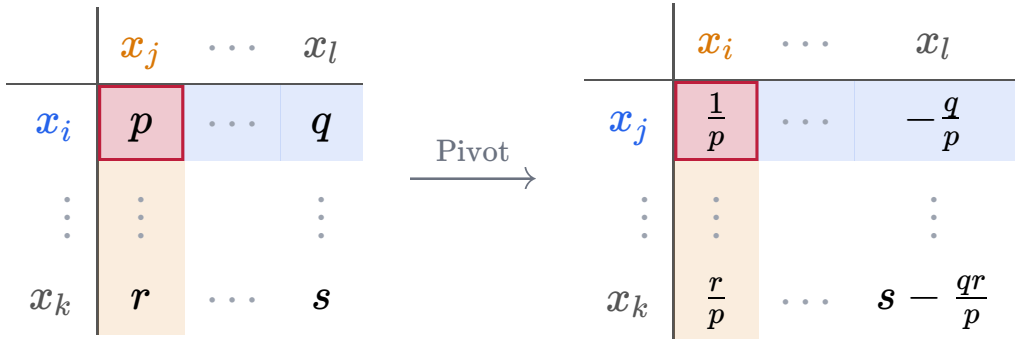
Rechteckregel



Rechteckregel (Pivotschritt in der Koeffizientenmatrix)

Pivotelement	Pivotzeile	Pivotspalte	Rest
$p \mapsto \frac{1}{p}$	$q \mapsto -\frac{q}{p}$	$r \mapsto \frac{r}{p}$	$s \mapsto s - \frac{qr}{p}$

Rechteckregel

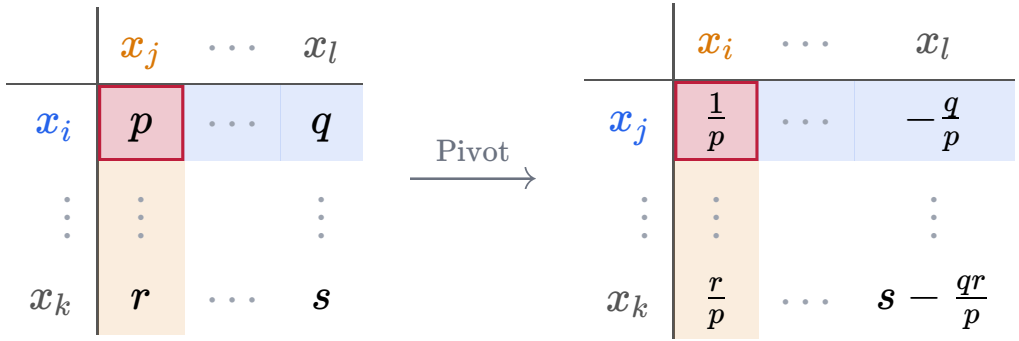


Rechteckregel (Pivotschritt in der Koeffizientenmatrix)

Pivotelement	Pivotzeile	Pivotspalte	Rest
$p \mapsto \frac{1}{p}$	$q \mapsto -\frac{q}{p}$	$r \mapsto \frac{r}{p}$	$s \mapsto s - \frac{qr}{p}$

- Für s: q und r sind die Einträge, die mit p und s ein Rechteck bilden.

Rechteckregel



Rechteckregel (Pivotschritt in der Koeffizientenmatrix)

Pivotelement	Pivotzeile	Pivotspalte	Rest
$p \mapsto \frac{1}{p}$	$q \mapsto -\frac{q}{p}$	$r \mapsto \frac{r}{p}$	$s \mapsto s - \frac{qr}{p}$

- Für s: q und r sind die Einträge, die mit p und s ein Rechteck bilden.
- Konstanten und Zielfunktion folgen derselben Regel – keine Sonderfälle!

Rechteckregel am Beispiel

Primal: x_1 tritt ein, w_2 tritt aus, Pivotelement $p = 2$.

	1	x_1	x_2
ζ	0	-1	-1
w_1	4	2	1
w_2	-8	2	-4
w_3	-7	1	-3

$\xrightarrow{\text{Pivot}}$

Rechteckregel am Beispiel

Primal: x_1 tritt ein, w_2 tritt aus, Pivotelement $p = 2$.

	1	x_1	x_2
ζ	0	-1	-1
w_1	4	2	1
w_2	-8	2	-4
w_3	-7	1	-3

$\xrightarrow{\text{Pivot}}$

- Pivotzeile: $-8 \mapsto -\frac{-8}{2} = 4,\ -4 \mapsto 2.$ Pivotspalte: $-1 \mapsto -\frac{1}{2},\ 2 \mapsto 1,\ 1 \mapsto \frac{1}{2}.$

Rechteckregel am Beispiel

Primal: x_1 tritt ein, w_2 tritt aus, Pivotelement $p = 2$.

	1	x_1	x_2
ζ	0	-1	-1
w_1	4	2	1
w_2	-8	2	-4
w_3	-7	1	-3

$\xrightarrow{\text{Pivot}}$

- Pivotzeile: $-8 \mapsto -\frac{-8}{2} = 4,\ -4 \mapsto 2.$ Pivotspalte: $-1 \mapsto -\frac{1}{2},\ 2 \mapsto 1,\ 1 \mapsto \frac{1}{2}.$
- Rest, z. B. Konstante von w_1: $s - \frac{qr}{p} = 4 - \frac{(-8)\cdot 2}{2} = 12.$ Zielfunktionswert: $0 - \frac{(-8)\cdot(-1)}{2} = -4.$

Rechteckregel am Beispiel

Primal: x_1 tritt ein, w_2 tritt aus, Pivotelement $p = 2$.

	1	x_1	x_2
ζ	0	-1	-1
w_1	4	2	1
w_2	-8	2	-4
w_3	-7	1	-3

$\xrightarrow{\text{Pivot}}$

	1	w_2	x_2
ζ	-4	$-\frac{1}{2}$	-3
w_1	12	1	5
x_1	4	$\frac{1}{2}$	2
w_3	-3	$\frac{1}{2}$	-1

- Pivotzeile: $-8 \mapsto -\frac{-8}{2} = 4,\ -4 \mapsto 2.$ Pivotspalte: $-1 \mapsto -\frac{1}{2},\ 2 \mapsto 1,\ 1 \mapsto \frac{1}{2}.$
- Rest, z. B. Konstante von w_1: $s - \frac{qr}{p} = 4 - \frac{(-8)\cdot 2}{2} = 12.$ Zielfunktionswert: $0 - \frac{(-8)\cdot(-1)}{2} = -4.$
- Ergebnis: das neue primale Dictionary von vorhin.

Das duale Dictionary

Das duale Dictionary allgemein

Notation: $z_{n+i} := y_i$. Dann gehören x_j und z_j zusammen ($j = 1, \ldots, n+m$; kompl. Schlupf: $x_j z_j = 0$).

Primales Dictionary (Basis B)

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$
$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i \in \mathcal{B})$$

	1	x_j
ζ	$\bar{\zeta}$	$\bar{c}_j$
x_i	$\bar{b}_i$	$-\bar{a}_{ij}$

Negativ transponiert (Basis N)

$$-\xi = -\bar{\zeta} - \sum_{i \in \mathcal{B}} \bar{b}_i z_i$$
$$z_j = -\bar{c}_j + \sum_{i \in \mathcal{B}} \bar{a}_{ij} z_i \quad (j \in \mathcal{N})$$

	1	z_i
$-\xi$	$-\bar{\zeta}$	$-\bar{b}_i$
z_j	$-\bar{c}_j$	$\bar{a}_{ij}$

Das duale Dictionary allgemein

Notation: $z_{n+i} := y_i$. Dann gehören x_j und z_j zusammen ($j = 1, \ldots, n+m$; kompl. Schlupf: $x_j z_j = 0$).

Primales Dictionary (Basis B)

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$
$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i \in \mathcal{B})$$

Negativ transponiert (Basis N)

$$-\xi = -\bar{\zeta} - \sum_{i \in \mathcal{B}} \bar{b}_i z_i$$
$$z_j = -\bar{c}_j + \sum_{i \in \mathcal{B}} \bar{a}_{ij} z_i \quad (j \in \mathcal{N})$$

	1	x_j
ζ	$\bar{\zeta}$	$\bar{c}_j$
x_i	$\bar{b}_i$	$-\bar{a}_{ij}$

	1	z_i
$-\xi$	$-\bar{\zeta}$	$-\bar{b}_i$
z_j	$-\bar{c}_j$	$\bar{a}_{ij}$

- Basisvariablen rechts: z_j mit $j \in \mathcal{N}$ – genau die Partner der primalen Nichtbasisvariablen.

Das duale Dictionary allgemein

Notation: $z_{n+i} := y_i$. Dann gehören x_j und z_j zusammen ($j = 1, \ldots, n+m$; kompl. Schlupf: $x_j z_j = 0$).

Primales Dictionary (Basis B)

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$
$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \quad (i \in \mathcal{B})$$

Negativ transponiert (Basis N)

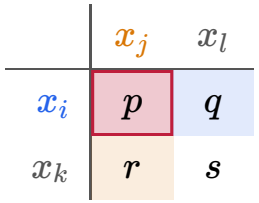
$$-\xi = -\bar{\zeta} - \sum_{i \in \mathcal{B}} \bar{b}_i z_i$$
$$z_j = -\bar{c}_j + \sum_{i \in \mathcal{B}} \bar{a}_{ij} z_i \quad (j \in \mathcal{N})$$

	1	x_j
ζ	$\bar{\zeta}$	$\bar{c}_j$
x_i	$\bar{b}_i$	$-\bar{a}_{ij}$

	1	z_i
$-\xi$	$-\bar{\zeta}$	$-\bar{b}_i$
z_j	$-\bar{c}_j$	$\bar{a}_{ij}$

- Basisvariablen rechts: z_j mit $j \in \mathcal{N}$ – genau die Partner der primalen Nichtbasisvariablen.
- Zu Beginn ($\mathcal{B} = \{n+1, \ldots, n+m\}$) ist das das duale Dictionary. Auch nach jedem Pivotschritt?

Pivotschritte erhalten das negative Transponieren



$\xrightarrow{\text{Pivot}}$

x_j ein, x_i aus

Pivotschritte erhalten das negative Transponieren

	x_j	x_l
x_i	p	q
x_k	r	s

Pivot

x_j ein, x_i aus

	x_i	x_l
x_j	$\frac{1}{p}$	$-\frac{q}{p}$
x_k	$\frac{r}{p}$	$s - \frac{qr}{p}$

Pivotschritte erhalten das negative Transponieren

	x_j	x_l
x_i	p	q
x_k	r	s

$\downarrow -(\cdot)^\top$

	z_i	z_k
z_j	$-p$	$-r$
z_l	$-q$	$-s$

Pivot $\longrightarrow$

x_j ein, x_i aus

	x_i	x_l
x_j	$\frac{1}{p}$	$-\frac{q}{p}$
x_k	$\frac{r}{p}$	$s - \frac{qr}{p}$

Pivotschritte erhalten das negative Transponieren

	x_j	x_l
x_i	p	q
x_k	r	s

Pivot

x_j ein, x_i aus

	x_i	x_l
x_j	$\frac{1}{p}$	$-\frac{q}{p}$
x_k	$\frac{r}{p}$	$s - \frac{qr}{p}$

$\downarrow -(\cdot)^\top$

	z_i	z_k
z_j	$-p$	$-r$
z_l	$-q$	$-s$

Pivot

z_i ein, z_j aus

	z_j	z_k
z_i	$-\frac{1}{p}$	$-\frac{r}{p}$
z_l	$\frac{q}{p}$	$-s + \frac{qr}{p}$

Pivotschritte erhalten das negative Transponieren

	x_j	x_l
x_i	p	q
x_k	r	s

$\downarrow -(\cdot)^\top$

	z_i	z_k
z_j	$-p$	$-r$
z_l	$-q$	$-s$

Pivot $\rightarrow$

x_j ein, x_i aus

Pivot $\rightarrow$

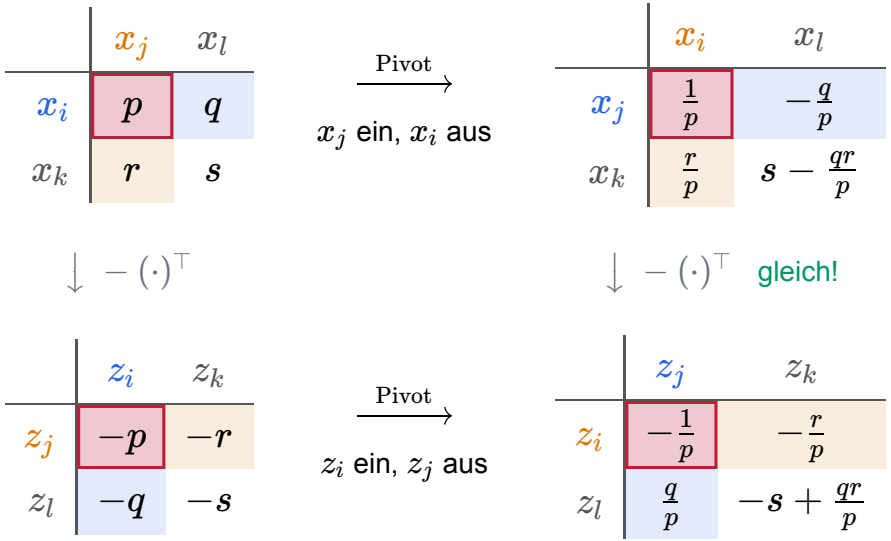
z_i ein, z_j aus

	x_i	x_l
x_j	$\frac{1}{p}$	$-\frac{q}{p}$
x_k	$\frac{r}{p}$	$s - \frac{qr}{p}$

$\downarrow -(\cdot)^\top$ gleich!

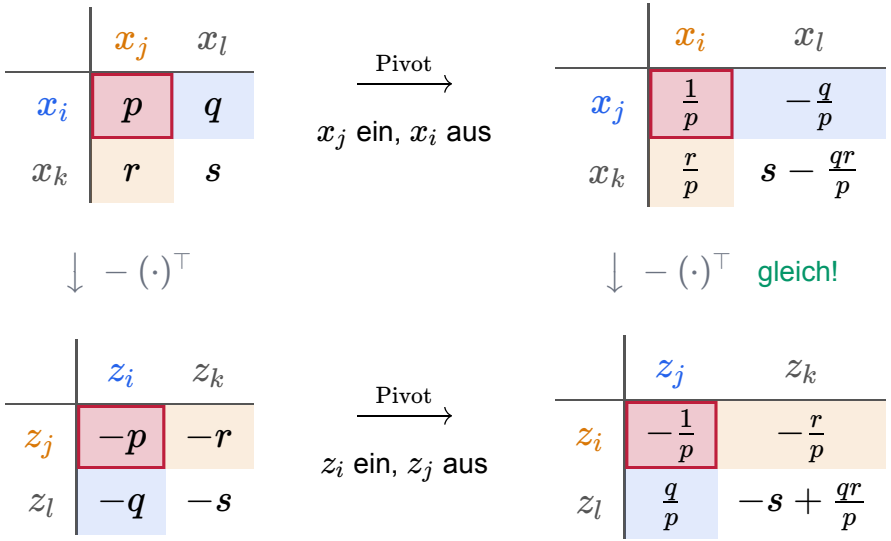
	z_j	z_k
z_i	$-\frac{1}{p}$	$-\frac{r}{p}$
z_l	$\frac{q}{p}$	$-s + \frac{qr}{p}$

Pivotschritte erhalten das negative Transponieren



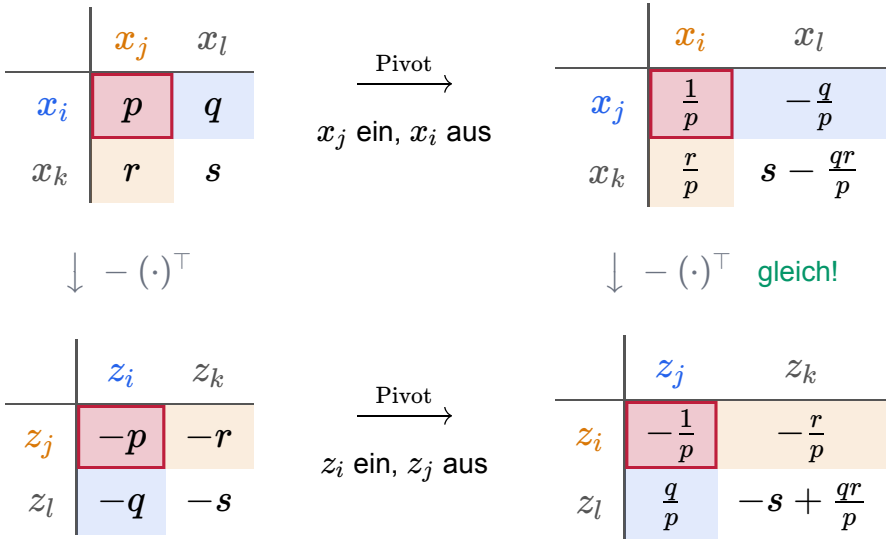
Also gilt: Zu Beginn (Startbasis) ist das duale Dictionary das negativ Transponierte des primalen Dictionaries.

Pivotschritte erhalten das negative Transponieren



Also gilt: Zu Beginn (Startbasis) ist das duale Dictionary das negativ Transponierte des primalen Dictionaries.
Weiter: Dies bleibt erhalten nach jedem Pivotschritt: x_j ein, x_i aus (primal), z_i ein, z_j aus (dual)

Pivotschritte erhalten das negative Transponieren



Also gilt: Zu Beginn (Startbasis) ist das duale Dictionary das negativ Transponierte des primalen Dictionaries.
Weiter: Dies bleibt erhalten nach jedem Pivotschritt: x_j ein, x_i aus (primal), z_i ein, z_j aus (dual)
Also: Wir führen implizit immer Pivotschritte auf primalem/dualen Dictionary gleichzeitig aus!

Folgerungen

Folgerungen

- Jeder primale Pivotschritt ist zugleich ein dualer Pivotschritt (und umgekehrt).

Folgerungen

- Jeder primale Pivotschritt ist zugleich ein dualer Pivotschritt (und umgekehrt).
- Was bedeuten Zulässigkeit und Optimalität im jeweils anderen Dictionary?

Folgerungen

- Jeder primale Pivotschritt ist zugleich ein dualer Pivotschritt (und umgekehrt).
- Was bedeuten Zulässigkeit und Optimalität im jeweils anderen Dictionary?

primales Dictionary		duales Dictionary
zulässig: $\bar{b}_i \geq 0$	$\Leftrightarrow$	Zielfunktionskoeffizienten $-\bar{b}_i \leq 0$: optimal, falls zulässig
Zielfunktionskoeffizienten $\bar{c}_j \leq 0$	$\Leftrightarrow$	zulässig: Konstanten $-\bar{c}_j \geq 0$
optimal	$\Leftrightarrow$	optimal, mit $\xi^* = \bar{\zeta} = \zeta^*$

Folgerungen

- Jeder primale Pivotschritt ist zugleich ein dualer Pivotschritt (und umgekehrt).
- Was bedeuten Zulässigkeit und Optimalität im jeweils anderen Dictionary?

primales Dictionary		duales Dictionary
zulässig: $\bar{b}_i \geq 0$	$\Leftrightarrow$	Zielfunktionskoeffizienten $-\bar{b}_i \leq 0$: optimal, falls zulässig
Zielfunktionskoeffizienten $\bar{c}_j \leq 0$	$\Leftrightarrow$	zulässig: Konstanten $-\bar{c}_j \geq 0$
optimal	$\Leftrightarrow$	optimal, mit $\xi^* = \bar{\zeta} = \zeta^*$

- Im Beispiel: primal unzulässig, aber alle $\bar{c}_j \leq 0$ – das duale Dictionary ist zulässig.

Folgerungen

- Jeder primale Pivotschritt ist zugleich ein dualer Pivotschritt (und umgekehrt).
- Was bedeuten Zulässigkeit und Optimalität im jeweils anderen Dictionary?

primales Dictionary		duales Dictionary
zulässig: $\bar{b}_i \geq 0$	$\Leftrightarrow$	Zielfunktionskoeffizienten $-\bar{b}_i \leq 0$: optimal, falls zulässig
Zielfunktionskoeffizienten $\bar{c}_j \leq 0$	$\Leftrightarrow$	zulässig: Konstanten $-\bar{c}_j \geq 0$
optimal	$\Leftrightarrow$	optimal, mit $\xi^* = \bar{\zeta} = \zeta^*$

- Im Beispiel: primal unzulässig, aber alle $\bar{c}_j \leq 0$ – das duale Dictionary ist zulässig.
- Simplex auf dem dualen LP:

  Pivotschritte im primalen Dictionary, die $\bar{c}_j \leq 0$ erhalten und auf $\bar{b}_i \geq 0$ hinarbeiten.

Folgerungen

- Jeder primale Pivotschritt ist zugleich ein dualer Pivotschritt (und umgekehrt).
- Was bedeuten Zulässigkeit und Optimalität im jeweils anderen Dictionary?

primales Dictionary		duales Dictionary
zulässig: $\bar{b}_i \geq 0$	$\Leftrightarrow$	Zielfunktionskoeffizienten $-\bar{b}_i \leq 0$: optimal, falls zulässig
Zielfunktionskoeffizienten $\bar{c}_j \leq 0$	$\Leftrightarrow$	zulässig: Konstanten $-\bar{c}_j \geq 0$
optimal	$\Leftrightarrow$	optimal, mit $\xi^* = \bar{\zeta} = \zeta^*$

- Im Beispiel: primal unzulässig, aber alle $\bar{c}_j \leq 0$ – das duale Dictionary ist zulässig.
- Simplex auf dem dualen LP:

  Pivotschritte im primalen Dictionary, die $\bar{c}_j \leq 0$ erhalten und auf $\bar{b}_i \geq 0$ hinarbeiten.

  $\Rightarrow$ **Dualer Simplex-Algorithmus**

Folgerungen

- Jeder primale Pivotschritt ist zugleich ein dualer Pivotschritt (und umgekehrt).
- Was bedeuten Zulässigkeit und Optimalität im jeweils anderen Dictionary?

primales Dictionary		duales Dictionary
zulässig: $\bar{b}_i \geq 0$	$\Leftrightarrow$	Zielfunktionskoeffizienten $-\bar{b}_i \leq 0$: optimal, falls zulässig
Zielfunktionskoeffizienten $\bar{c}_j \leq 0$	$\Leftrightarrow$	zulässig: Konstanten $-\bar{c}_j \geq 0$
optimal	$\Leftrightarrow$	optimal, mit $\xi^* = \bar{\zeta} = \zeta^*$

- Im Beispiel: primal unzulässig, aber alle $\bar{c}_j \leq 0$ – das duale Dictionary ist zulässig.
- Simplex auf dem dualen LP:

  Pivotschritte im primalen Dictionary, die $\bar{c}_j \leq 0$ erhalten und auf $\bar{b}_i \geq 0$ hinarbeiten.

  $\Rightarrow$ **Dualer Simplex-Algorithmus**
- Dictionaries mit $\bar{b}_i \geq 0$ heißen **primal zulässig**, mit $\bar{c}_j \leq 0$ heißen **dual zulässig**

Dualer Simplex: Beispiel

$$\max\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 \ \text{ s.t. } \ -x_1 - x_3 \leq -3, \quad -x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -8, \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \quad -2x_1 - x_2 - 5x_3 \\ \hline w_1 &= -3 + x_1 \quad + x_3 \\ w_2 &= -8 + x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Primal **unzulässig** ($\bar{b}_1, \bar{b}_2 < 0$), aber alle $\bar{c}_j \leq 0$:
das duale Dictionary ist **zulässig**.

Dualer Simplex: Beispiel

$$\max\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 \ \text{ s.t. } \ -x_1 - x_3 \le -3, \quad -x_1 - x_2 - 2x_3 \le -8, \quad x \ge 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= && -2x_1 - x_2 - 5x_3 \\ \hline w_1 &= -3 + x_1 && + x_3 \\ w_2 &= -8 + x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Austretend: eine Zeile mit $\bar{b}_i < 0$,
z. B. die kleinste: $w_2 = -8$.

Dualer Simplex: Beispiel

$$\max\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 \ \text{ s.t. } \ -x_1 - x_3 \le -3, \quad -x_1 - x_2 - 2x_3 \le -8, \quad x \ge 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -2x_1 - x_2 - 5x_3 \\ \hline w_1 &= -3 + x_1 + x_3 \\ w_2 &= -8 + x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Eintretend: nur x_j mit Koeffizient > 0 in Zeile w_2 (sonst kann w_2 nicht auf 0 steigen).

Dualer Quotiententest: kleinstes $\dfrac{|\bar{c}_j|}{\text{Koeffizient}}$

$x_1 : \frac{2}{1} = 2, \quad x_2 : \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 : \frac{5}{2} \ \Rightarrow \ x_2$

Dualer Simplex: Beispiel

$$\max\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 \ \text{ s.t. } \ -x_1 - x_3 \leq -3, \quad -x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -8, \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -8 - x_1 - w_2 - 3x_3 \\ \hline w_1 &= -3 + x_1 + x_3 \\ x_2 &= 8 - x_1 + w_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

Alle $\bar{c}_j \leq 0$ geblieben (dual zulässig),
$\bar{\zeta}$ von 0 auf -8 gefallen. $w_1 = -3$ noch negativ.

Dualer Simplex: Beispiel

$$\max\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 \ \text{ s.t. } \ -x_1 - x_3 \leq -3, \quad -x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -8, \quad x \geq 0$$

$$\zeta = -8 - x_1 - w_2 - 3x_3$$

$$w_1 = -3 + x_1 + x_3$$

$$x_2 = 8 - x_1 + w_2 - 2x_3$$

Austretend: $w_1 = -3$

Dualer Simplex: Beispiel

$$\max\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 \ \text{ s.t. } \ -x_1 - x_3 \le -3, \quad -x_1 - x_2 - 2x_3 \le -8, \quad x \ge 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -8 - x_1 - w_2 - 3x_3 \\ \hline w_1 &= -3 + x_1 + x_3 \\ x_2 &= 8 - x_1 + w_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

Eintretend: Koeffizient > 0 nur bei x_1, x_3 (w_2 hat 0)

$x_1 : \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 : \frac{3}{1} = 3 \ \Rightarrow \ x_1$

Dualer Simplex: Beispiel

$$\max\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 \ \text{ s.t. } \ -x_1 - x_3 \leq -3, \quad -x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -8, \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -11 - w_1 - w_2 - 2x_3 \\ \hline x_1 &= 3 + w_1 - x_3 \\ x_2 &= 5 - w_1 + w_2 - x_3 \end{aligned}$$

Alle $\bar{b}_i \geq 0$: jetzt auch primal zulässig.

Dualer Simplex: Beispiel

$\max\ -2x_1 - x_2 - 5x_3$ s.t. $-x_1 - x_3 \le -3,\quad -x_1 - x_2 - 2x_3 \le -8,\quad x \ge 0$

$$\begin{aligned}
\zeta &= -11 - w_1 - w_2 - 2x_3 \\
\hline
x_1 &= 3 + w_1 - x_3 \\
x_2 &= 5 - w_1 + w_2 - x_3
\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\le 0 \Rightarrow$ optimal

$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (3, 5, 0, 0, 0), \quad \zeta = -11$

Optimal nach zwei Pivotschritten:
$x^* = (3, 5, 0)$ mit $\zeta^* = -11$
(ganz ohne Phase I).

Dualer Simplex: weiteres Beispiel

$$\max\ -x_1 - x_2 - 4x_3 \ \text{ s.t. } \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \quad -x_2 - x_3 \leq -4, \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= - x_1 - x_2 - 4x_3 \\ \hline w_1 &= 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\ w_2 &= -4 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Primal **unzulässig** ($\bar{b}_2 < 0$), aber alle $\bar{c}_j \leq 0$: dual zulässig, also dualer Simplex.

Dualer Simplex: weiteres Beispiel

$$\max\ -x_1 - x_2 - 4x_3 \ \text{ s.t. } \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \quad -x_2 - x_3 \leq -4, \quad x \geq 0$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta &=& & & -x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 \\
\hline
w_1 &=& 3 & - & x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\
w_2 &=& -4 & & & + & x_2 & + & x_3
\end{array}$$

Austretend: $w_2 = -4$

Dualer Simplex: weiteres Beispiel

$$\max\ -x_1 - x_2 - 4x_3 \ \text{ s.t. } \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \quad -x_2 - x_3 \leq -4, \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -x_1 - x_2 - 4x_3 \\ \hline w_1 &= 3 - x_1 - x_2 - x_3 \\ w_2 &= -4 + x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Eintretend: Koeffizient > 0 nur bei x_2, x_3 (x_1 hat 0)

$x_2 \colon \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 \colon \frac{4}{1} = 4 \ \Rightarrow \ x_2$

Dualer Simplex: weiteres Beispiel

$\max\ -x_1 - x_2 - 4x_3$ s.t. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3,\quad -x_2 - x_3 \leq -4,\quad x \geq 0$

$$\begin{aligned}\zeta &= -4 - x_1 - w_2 - 3x_3\\ \hline w_1 &= -1 - x_1 - w_2\\ x_2 &= 4 + w_2 - x_3\end{aligned}$$

Alle $\bar{c}_j \leq 0$ geblieben, aber jetzt $w_1 = -1$.

Dualer Simplex: weiteres Beispiel

$$\max\ -x_1 - x_2 - 4x_3 \ \text{ s.t. } \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \quad -x_2 - x_3 \leq -4, \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -4 - x_1 - w_2 - 3x_3 \\ \hline w_1 &= -1 - x_1 - w_2 \\ x_2 &= 4 + w_2 - x_3 \end{aligned}$$

Austretend: $w_1 = -1$. **Eintretend:** kein Koeffizient > 0!

Dualer Simplex: weiteres Beispiel

$\max\ -x_1 - x_2 - 4x_3$ s.t. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3,\quad -x_2 - x_3 \leq -4,\quad x \geq 0$

$$\begin{aligned}
\zeta &= -4 - x_1 - w_2 - 3x_3 \\
\hline
w_1 &= -1 - x_1 - w_2 \\
x_2 &= 4 + w_2 - x_3
\end{aligned}$$

Austretend: $w_1 = -1$. **Eintretend:** kein Koeffizient > 0!

Für alle $x_1, w_2 \geq 0$ gilt $w_1 = -1 - x_1 - w_2 \leq -1 < 0$

$\Rightarrow$ das primale LP ist **unzulässig**.

Dualer Simplex: weiteres Beispiel

$$\max\ -x_1 - x_2 - 4x_3 \ \text{ s.t. } \ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \quad -x_2 - x_3 \leq -4, \quad x \geq 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -4 - x_1 - w_2 - 3x_3 \\ \hline w_1 &= -1 - x_1 - w_2 \\ x_2 &= 4 + w_2 - x_3 \end{aligned}$$

Austretend: $w_1 = -1$. **Eintretend:** kein Koeffizient > 0!

Für alle $x_1, w_2 \geq 0$ gilt $w_1 = -1 - x_1 - w_2 \leq -1 < 0$

$\Rightarrow$ das primale LP ist **unzulässig**.

Dual: keine Schranke für die eintretende Variable

$\Rightarrow$ das duale LP ist **unbeschränkt**.

Dualer Simplex: weiteres Beispiel

$\max\ -x_1 - x_2 - 4x_3$ s.t. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3,\quad -x_2 - x_3 \leq -4,\quad x \geq 0$

$$\begin{aligned}
\zeta &= -4 - x_1 - w_2 - 3x_3 \\
\hline
w_1 &= -1 - x_1 - w_2 \\
x_2 &= 4 + w_2 - x_3
\end{aligned}$$

Austretend: $w_1 = -1$. **Eintretend:** kein Koeffizient > 0!

Für alle $x_1, w_2 \geq 0$ gilt $w_1 = -1 - x_1 - w_2 \leq -1 < 0$

$\Rightarrow$ das primale LP ist **unzulässig**.

Dual: keine Schranke für die eintretende Variable

$\Rightarrow$ das duale LP ist **unbeschränkt**.

Hier auch direkt sichtbar: $x_2 + x_3 \geq 4$, aber $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$.

Dualer Simplex: weiteres Beispiel

$\max\ -x_1 - x_2 - 4x_3$ s.t. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3,\quad -x_2 - x_3 \leq -4,\quad x \geq 0$

$$\begin{aligned} \zeta &= -4 - x_1 - w_2 - 3x_3 \\ \hline w_1 &= -1 - x_1 - w_2 \\ x_2 &= 4 + w_2 - x_3 \end{aligned}$$

Austretend: $w_1 = -1$. **Eintretend:** kein Koeffizient > 0!

Für alle $x_1, w_2 \geq 0$ gilt $w_1 = -1 - x_1 - w_2 \leq -1 < 0$

$\Rightarrow$ das primale LP ist **unzulässig**.

Dual: keine Schranke für die eintretende Variable

$\Rightarrow$ das duale LP ist **unbeschränkt**.

Hier auch direkt sichtbar: $x_2 + x_3 \geq 4$, aber $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$.

Frage

Was, wenn das initiale Dictionary primal **und** dual unzulässig ist?

Dualer Simplex als Phase I

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Dualer Simplex als Phase I

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

Dualer Simplex als Phase I

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\zeta} &= -x_1 - x_2 \\
\hline
w_1 &= 5 - x_2 \\
w_2 &= 2 - x_1 + x_2 \\
w_3 &= -2 + x_2
\end{aligned}
$$

Mit $\tilde{\zeta}$: dual zulässig $\Rightarrow$ dualer Simplex.

Dualer Simplex als Phase I

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcrrr} \tilde{\zeta} & = & & -x_1 & -x_2 \\ \hline w_1 & = & 5 & & -x_2 \\ w_2 & = & 2 & -x_1 & +x_2 \\ w_3 & = & -2 & & +x_2 \end{array}$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

Phase I (dualer Simplex):

$w_3 = -2$ tritt aus; Koeffizient > 0 nur bei x_2

$\Rightarrow x_2$ tritt ein.

Dualer Simplex als Phase I

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcrrr} \tilde{\zeta} & = & & -x_1 & -x_2 \\ \hline w_1 & = & 5 & & -x_2 \\ w_2 & = & 2 & -x_1 & +x_2 \\ w_3 & = & -2 & & +x_2 \end{array}$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

Phase I (dualer Simplex):

$w_3 = -2$ tritt aus; Koeffizient > 0 nur bei x_2

$\Rightarrow x_2$ tritt ein.

Dualer Simplex als Phase I

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} &= -2 - x_1 - w_3 \\ \hline w_1 &= 3 - w_3 \\ w_2 &= 4 - x_1 + w_3 \\ x_2 &= 2 + w_3 \end{aligned}$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

Alle $\bar{b}_i \geq 0$: **primal zulässig**.
Die Hilfszielfunktion hat ihren Zweck erfüllt.

Dualer Simplex als Phase I

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & -x_2 \leq -2 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -2 + 2x_1 - w_3 \\ \hline w_1 &= 3 - w_3 \\ w_2 &= 4 - x_1 + w_3 \\ x_2 &= 2 + w_3 \end{aligned}$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

Ursprüngliche Zielfunktion einsetzen:

$$\zeta = 2x_1 - \underbrace{x_2}_{2+w_3} = -2 + 2x_1 - w_3$$

Die Zeilen hängen nicht von der Zielfunktion ab, also bleibt das Dictionary primal zulässig.

Dualer Simplex als Phase I

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -2 + 2x_1 - w_3 \\
\hline
w_1 &= 3 - w_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
w_2 &= 4 - x_1 + w_3 && w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 4 \\
x_2 &= 2 + w_3 && x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty
\end{aligned}
$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

Phase II (primaler Simplex) wie gewohnt.

Dualer Simplex als Phase I

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -2 + 2x_1 - w_3 \\
\hline
w_1 &= 3 - w_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
w_2 &= 4 - x_1 + w_3 && w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 4 \\
x_2 &= 2 + w_3 && x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty
\end{aligned}
$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

Phase II (primaler Simplex) wie gewohnt.

Dualer Simplex als Phase I

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 6 - 2w_2 + w_3 \\
\hline
w_1 &= 3 - w_3 \\
x_1 &= 4 - w_2 + w_3 \\
x_2 &= 2 + w_3
\end{aligned}
$$

Phase II (primaler Simplex) wie gewohnt.

Dualer Simplex als Phase I

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 6 - 2w_2 + w_3 \\
\hline
w_1 &= 3 - w_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow w_3 \leq 3 \\
x_1 &= 4 - w_2 + w_3 && x_1 \geq 0 \Rightarrow w_3 \leq \infty \\
x_2 &= 2 + w_3 && x_2 \geq 0 \Rightarrow w_3 \leq \infty
\end{aligned}
$$

Phase II (primaler Simplex) wie gewohnt.

Dualer Simplex als Phase I

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 6 - 2w_2 + w_3 \\
\hline
w_1 &= 3 - w_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow w_3 \leq 3 \\
x_1 &= 4 - w_2 + w_3 && x_1 \geq 0 \Rightarrow w_3 \leq \infty \\
x_2 &= 2 + w_3 && x_2 \geq 0 \Rightarrow w_3 \leq \infty
\end{aligned}
$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

Phase II (primaler Simplex) wie gewohnt.

Dualer Simplex als Phase I

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 9 - 2w_2 - w_1 \\
\hline
w_3 &= 3 - w_1 \\
x_1 &= 7 - w_2 - w_1 \\
x_2 &= 5 - w_1
\end{aligned}
$$

Phase II (primaler Simplex) wie gewohnt.

Dualer Simplex als Phase I

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_2 \leq 5 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& -x_2 \leq -2 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 9 - 2w_2 - w_1 \\
\hline
w_3 &= 3 - w_1 \\
x_1 &= 7 - w_2 - w_1 \\
x_2 &= 5 - w_1
\end{aligned}
$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

Mit $\zeta = 2x_1 - x_2$ ist das Dictionary primal **und** dual unzulässig ($b_3 < 0$, $c_1 > 0$).

Idee: Zielfunktion $\zeta \rightarrow$ Hilfsfunktion $\tilde{\zeta} = -x$

Optimal: $x^* = (7, 5)$ mit $\zeta^* = 9$.

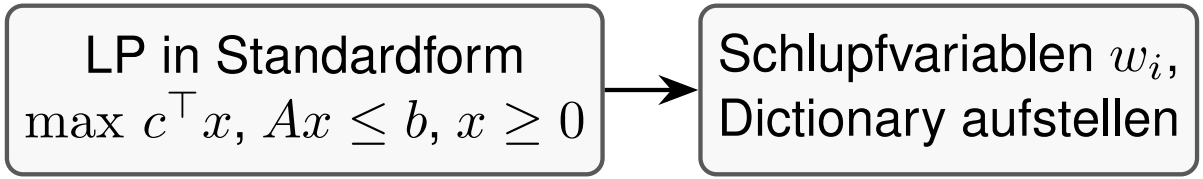
Phase I mit dem dualen Simplex, ganz ohne Hilfsvariable x_0.

Überblick: Simplex mit dualer Phase I

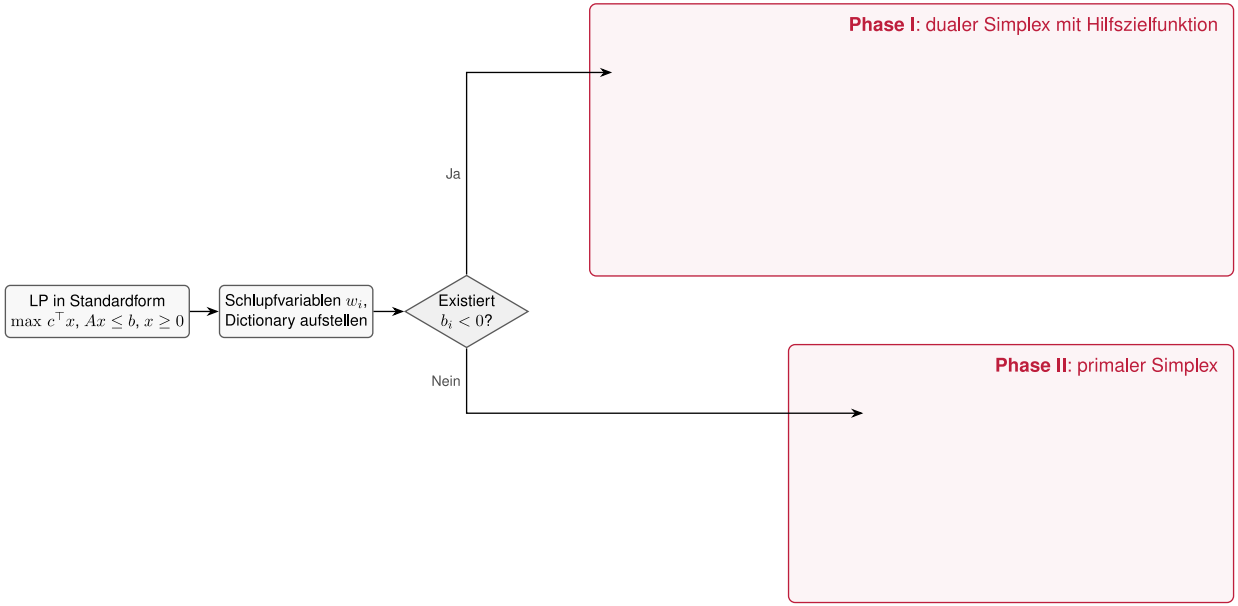
LP in Standardform

$\max\ c^\top x,\ Ax \leq b,\ x \geq 0$

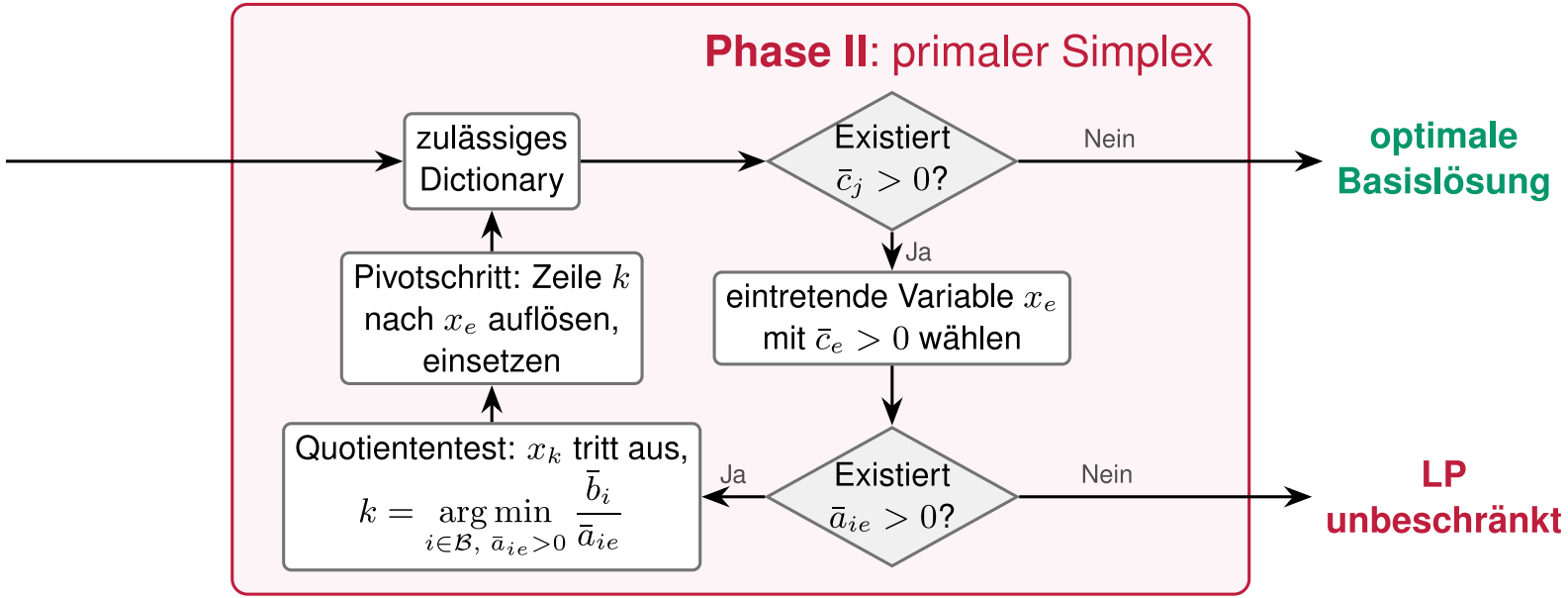
Überblick: Simplex mit dualer Phase I



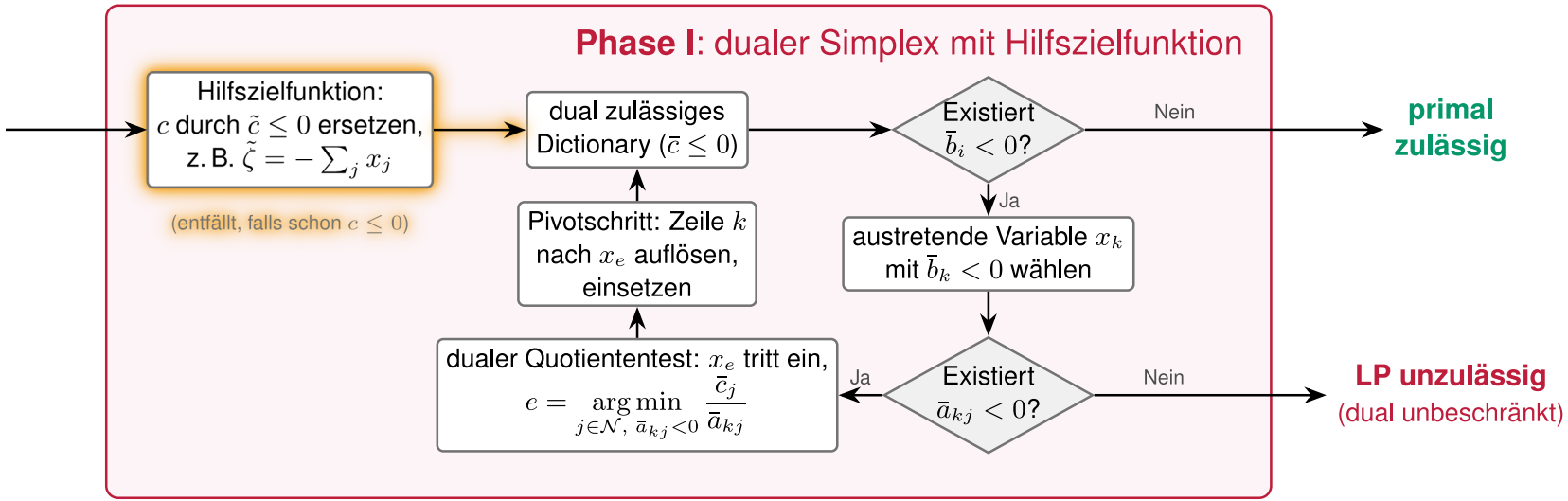
Überblick: Simplex mit dualer Phase I



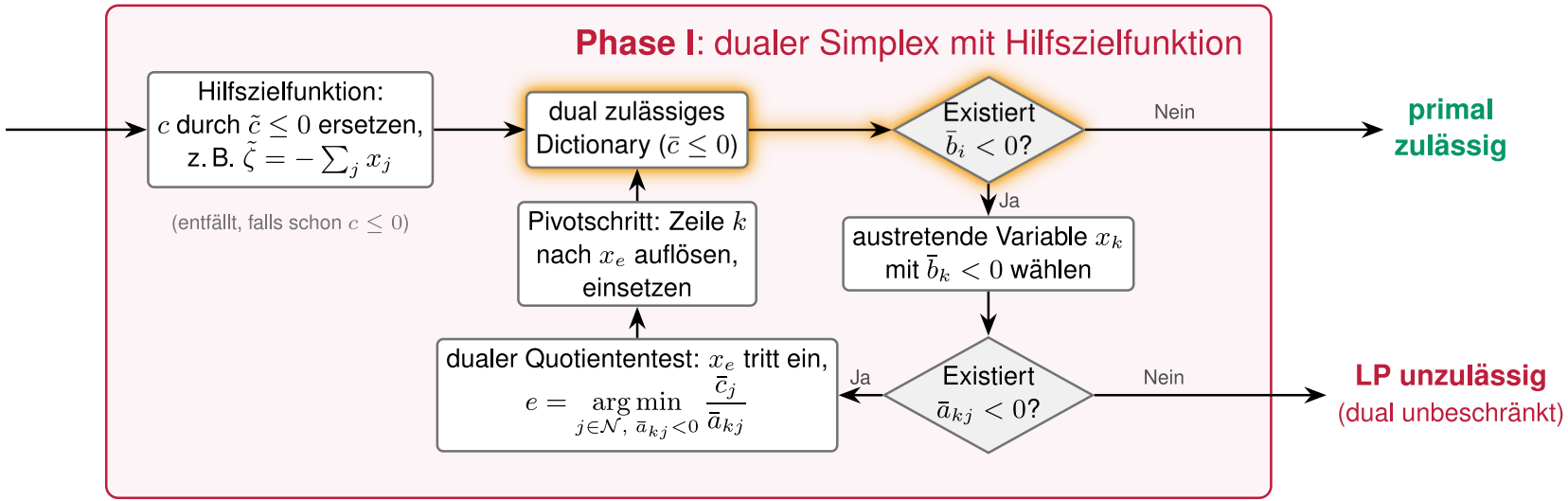
Überblick: Simplex mit dualer Phase I



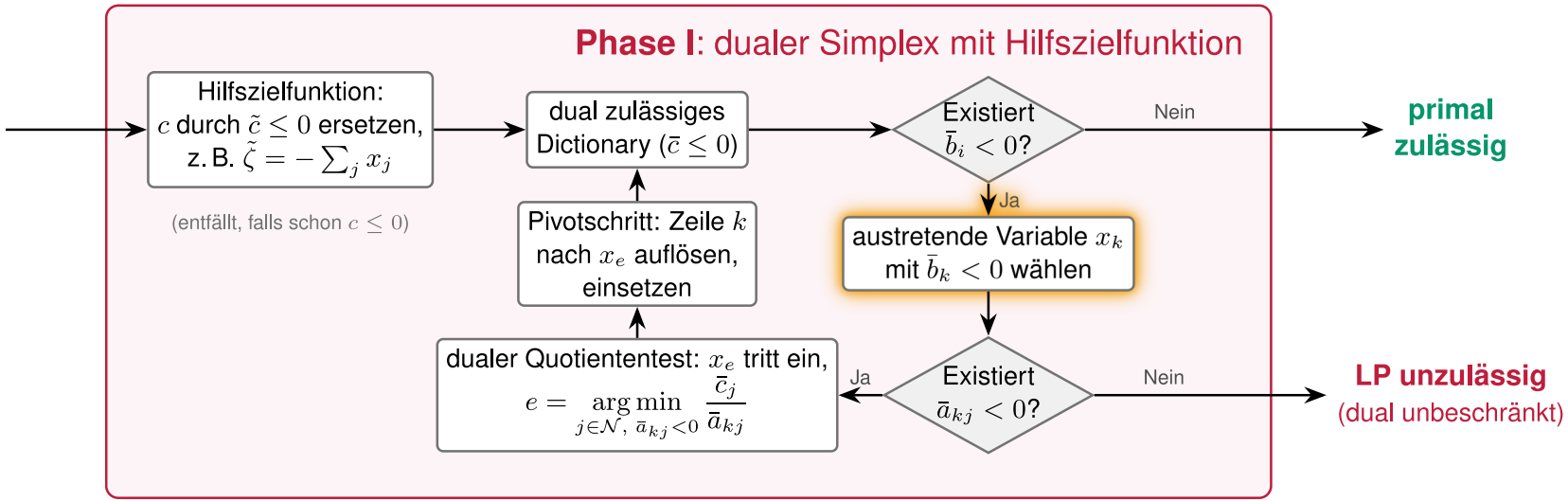
Überblick: Simplex mit dualer Phase I



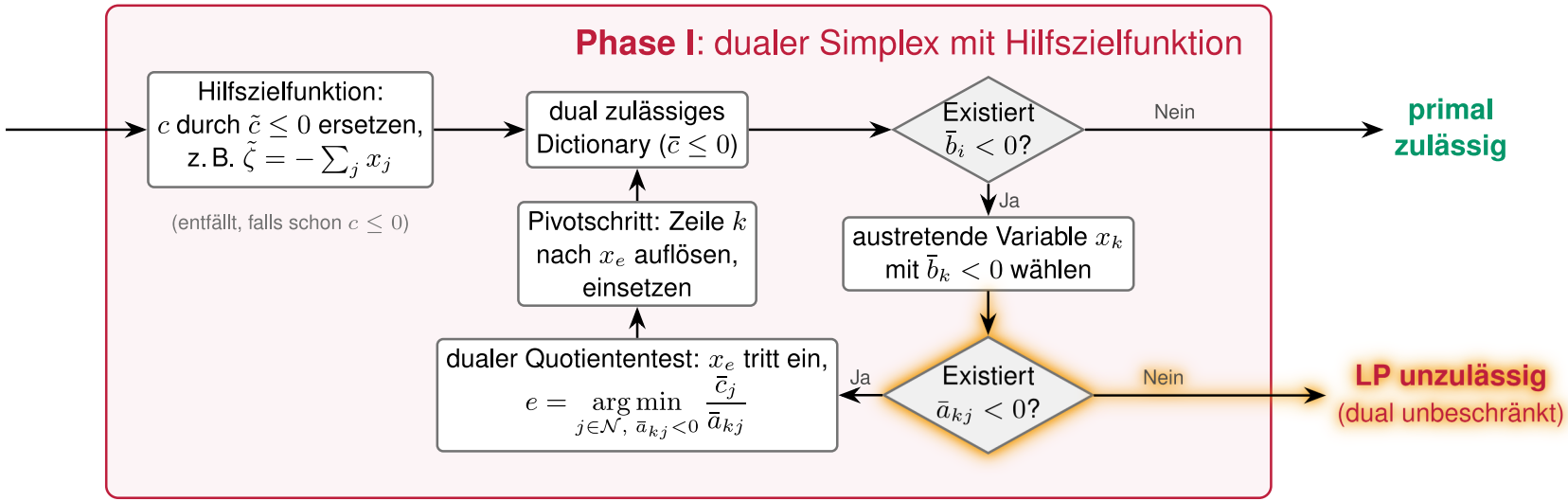
Überblick: Simplex mit dualer Phase I



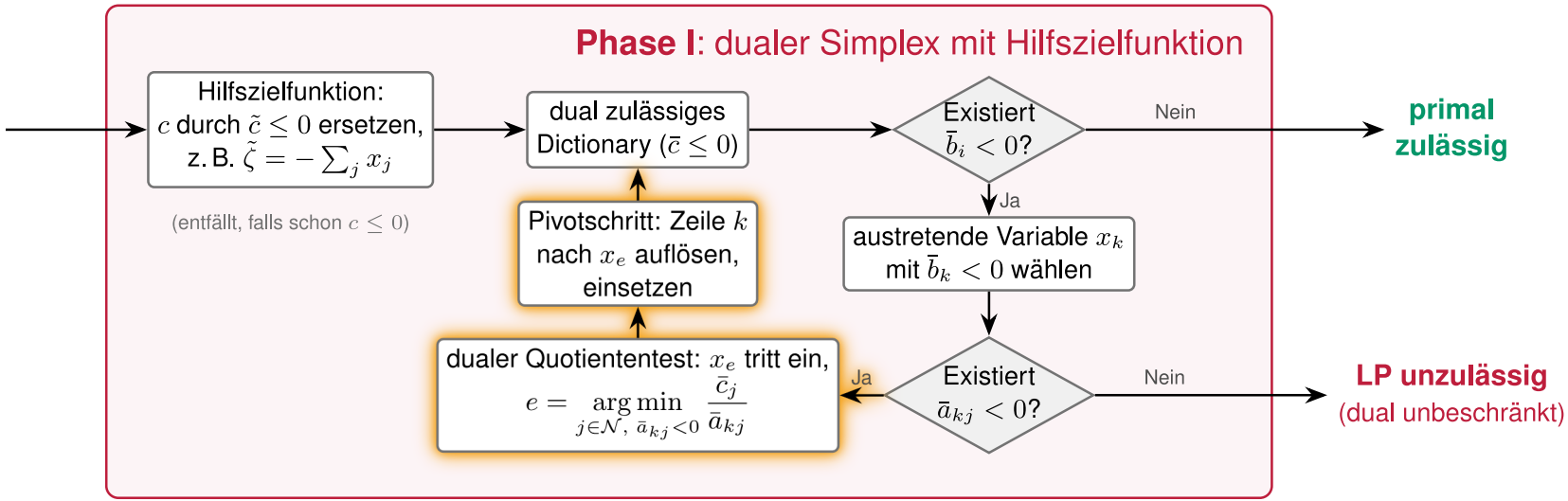
Überblick: Simplex mit dualer Phase I



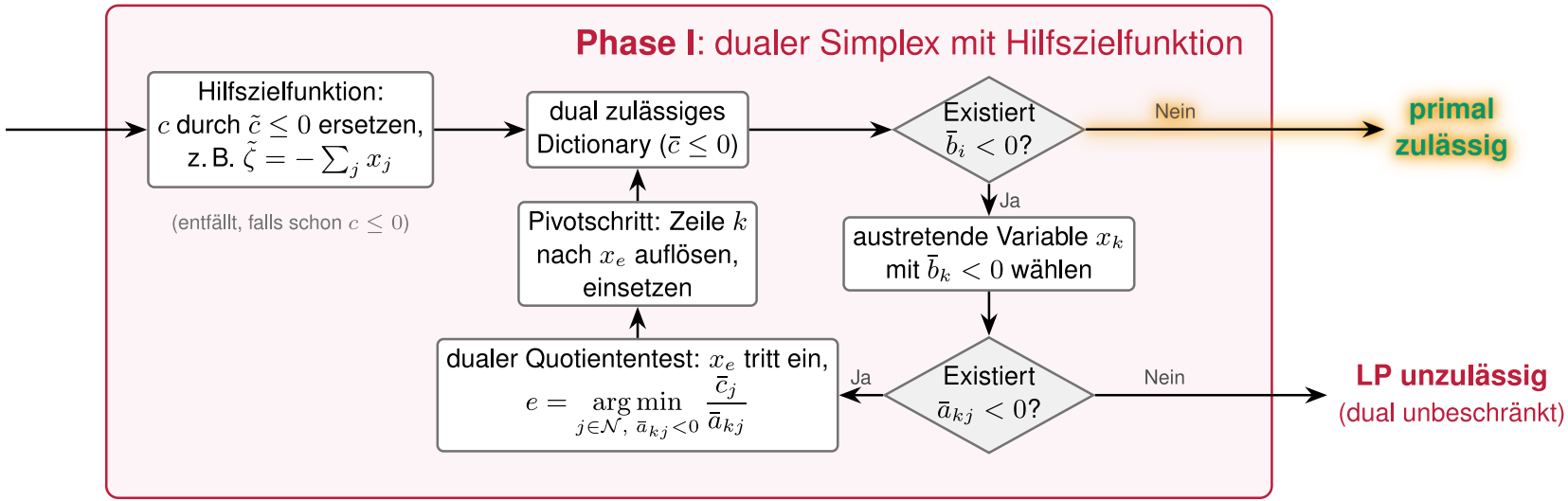
Überblick: Simplex mit dualer Phase I



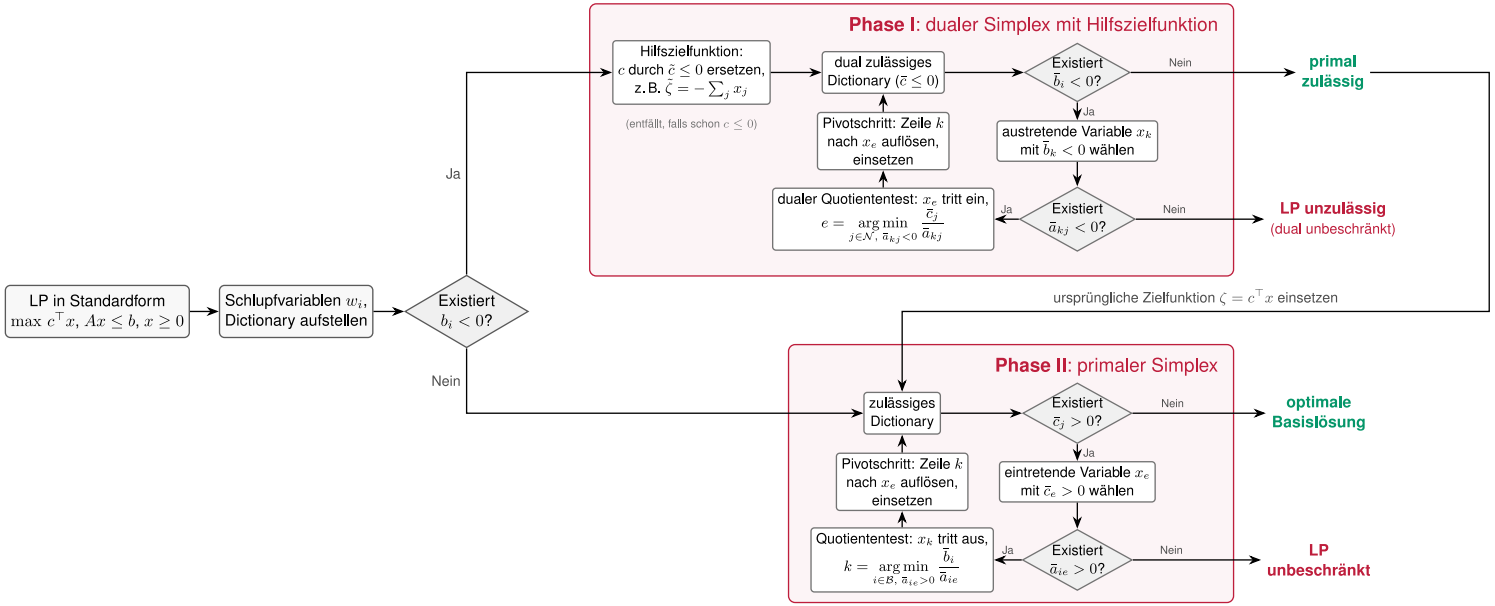
Überblick: Simplex mit dualer Phase I



Überblick: Simplex mit dualer Phase I



Überblick: Simplex mit dualer Phase I



Fälle

Fälle

- LP unzulässig: wir *müssen* in der dualen Phase I auf duale Unbeschränktheit treffen!

Fälle

- LP unzulässig: wir *müssen* in der dualen Phase I auf duale Unbeschränktheit treffen!
- Sonst kriegen wir immer eine primal zulässige Lösung.

Fälle

- LP unzulässig: wir *müssen* in der dualen Phase I auf duale Unbeschränktheit treffen!
- Sonst kriegen wir immer eine primal zulässige Lösung.
- Zertifikat der Unzulässigkeit: Gleichung der Form $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, \bar{b}_i < 0, \bar{a}_{ij} \geq 0$

Fälle

- LP unzulässig: wir *müssen* in der dualen Phase I auf duale Unbeschränktheit treffen!
- Sonst kriegen wir immer eine primal zulässige Lösung.
- Zertifikat der Unzulässigkeit: Gleichung der Form $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, \bar{b}_i < 0, \bar{a}_{ij} \geq 0$
- LP unbeschränkt: finden wir in Phase II

Fälle

- LP unzulässig: wir *müssen* in der dualen Phase I auf duale Unbeschränktheit treffen!
- Sonst kriegen wir immer eine primal zulässige Lösung.
- Zertifikat der Unzulässigkeit: Gleichung der Form $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, \bar{b}_i < 0, \bar{a}_{ij} \geq 0$
- LP unbeschränkt: finden wir in Phase II
- LP optimal lösbar: finden wir in Phase II

Fälle

- LP unzulässig: wir *müssen* in der dualen Phase I auf duale Unbeschränktheit treffen!
- Sonst kriegen wir immer eine primal zulässige Lösung.
- Zertifikat der Unzulässigkeit: Gleichung der Form $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, \bar{b}_i < 0, \bar{a}_{ij} \geq 0$
- LP unbeschränkt: finden wir in Phase II
- LP optimal lösbar: finden wir in Phase II
- Wenn zu Beginn dual zulässig: nach Phase I direkt optimal (starke Dualität)

Fälle

- LP unzulässig: wir *müssen* in der dualen Phase I auf duale Unbeschränktheit treffen!
- Sonst kriegen wir immer eine primal zulässige Lösung.
- Zertifikat der Unzulässigkeit: Gleichung der Form $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, \bar{b}_i < 0, \bar{a}_{ij} \geq 0$
- LP unbeschränkt: finden wir in Phase II
- LP optimal lösbar: finden wir in Phase II
- Wenn zu Beginn dual zulässig: nach Phase I direkt optimal (starke Dualität)
- Mit Pivotregeln, die Terminierung sicherstellen: vollständiger Algorithmus für LPs

Dualisierungsregeln

Dualisieren ohne Standardform

Frage

Wie sieht das Duale aus, wenn wir keine Standardform haben?

Dualisieren ohne Standardform

Frage

Wie sieht das Duale aus, wenn wir keine Standardform haben?

Bemerkung: Zuerst in Standardform transformieren kann das Duale unnötig kompliziert machen (siehe z. B. Übung 2).

Obere Schranken in Standardform

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Obere Schranken in Standardform

$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$

Nebenbedingung i mit Gewicht y_i multiplizieren und alle addieren:

Obere Schranken in Standardform

$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$

Nebenbedingung i mit Gewicht y_i multiplizieren und alle addieren:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Obere Schranken in Standardform

$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$

Nebenbedingung i mit Gewicht y_i multiplizieren und alle addieren:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Gilt nur für $y_i \geq 0$: Multiplikation mit $y_i < 0$ dreht „$\leq$“ zu „$\geq$“!

Obere Schranken in Standardform

$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$

Nebenbedingung i mit Gewicht y_i multiplizieren und alle addieren:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Gilt nur für $y_i \geq 0$: Multiplikation mit $y_i < 0$ dreht „$\leq$“ zu „$\geq$“!

Nach Variablen sortieren:

Obere Schranken in Standardform

$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$

Nebenbedingung i mit Gewicht y_i multiplizieren und alle addieren:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Gilt nur für $y_i \geq 0$: Multiplikation mit $y_i < 0$ dreht „$\leq$“ zu „$\geq$“!

Nach Variablen sortieren:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Obere Schranken in Standardform

$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$

Nebenbedingung i mit Gewicht y_i multiplizieren und alle addieren:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Gilt nur für $y_i \geq 0$: Multiplikation mit $y_i < 0$ dreht „$\leq$“ zu „$\geq$“!

Nach Variablen sortieren:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Schranke für die Zielfunktion, falls termweise $c_j x_j \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$ für alle j.

Obere Schranken in Standardform

$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ s.t. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n)$

Nebenbedingung i mit Gewicht y_i multiplizieren und alle addieren:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Gilt nur für $y_i \geq 0$: Multiplikation mit $y_i < 0$ dreht „$\leq$“ zu „$\geq$“!

Nach Variablen sortieren:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Schranke für die Zielfunktion, falls termweise $c_j x_j \leq \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$ für alle j.

Für $x_j \geq 0$ folgt das aus $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$ (duale Nebenbedingung).

Ohne $x_j \geq 0$ nicht: z. B. $2x_j \leq 3x_j$ ist falsch für $x_j = -1$.

Wo die Vorzeichen gebraucht werden

Für x primal zulässig und y mit $y \geq 0$, $A^\top y \geq c$:

$$c^\top x \overset{(1)}{\leq} (A^\top y)^\top x = y^\top A x \overset{(2)}{\leq} y^\top b$$

Wo die Vorzeichen gebraucht werden

Für x primal zulässig und y mit $y \geq 0$, $A^\top y \geq c$:

$$c^\top x \overset{(1)}{\leq} (A^\top y)^\top x = y^\top A x \overset{(2)}{\leq} y^\top b$$

- **(1)** termweise $c_j x_j \leq \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j$: braucht $x_j \geq 0$ **und** $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$

Wo die Vorzeichen gebraucht werden

Für x primal zulässig und y mit $y \geq 0$, $A^\top y \geq c$:

$$c^\top x \overset{(1)}{\leq} (A^\top y)^\top x = y^\top A x \overset{(2)}{\leq} y^\top b$$

- **(1)** termweise $c_j x_j \leq \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j$: braucht $x_j \geq 0$ **und** $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$
- **(2)** termweise $y_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) \leq y_i b_i$: braucht $y_i \geq 0$ **und** $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$

Wo die Vorzeichen gebraucht werden

Für x primal zulässig und y mit $y \geq 0$, $A^\top y \geq c$:

$$c^\top x \overset{(1)}{\leq} (A^\top y)^\top x = y^\top A x \overset{(2)}{\leq} y^\top b$$

- **(1)** termweise $c_j x_j \leq \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j$: braucht $x_j \geq 0$ **und** $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$
- **(2)** termweise $y_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) \leq y_i b_i$: braucht $y_i \geq 0$ **und** $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$
- $x_j \leq 0$ braucht $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$, x_j frei braucht $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$

Wo die Vorzeichen gebraucht werden

Für x primal zulässig und y mit $y \geq 0$, $A^\top y \geq c$:

$$c^\top x \overset{(1)}{\leq} (A^\top y)^\top x = y^\top A x \overset{(2)}{\leq} y^\top b$$

- **(1)** termweise $c_j x_j \leq \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j$: braucht $x_j \geq 0$ **und** $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$
- **(2)** termweise $y_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) \leq y_i b_i$: braucht $y_i \geq 0$ **und** $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$
- $x_j \leq 0$ braucht $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$, x_j frei braucht $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ braucht $y_i \leq 0$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ erlaubt y_i frei

Wo die Vorzeichen gebraucht werden

Für x primal zulässig und y mit $y \geq 0$, $A^\top y \geq c$:

$$c^\top x \overset{(1)}{\leq} (A^\top y)^\top x = y^\top A x \overset{(2)}{\leq} y^\top b$$

- **(1)** termweise $c_j x_j \leq \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j$: braucht $x_j \geq 0$ **und** $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$
- **(2)** termweise $y_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) \leq y_i b_i$: braucht $y_i \geq 0$ **und** $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$
- $x_j \leq 0$ braucht $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$, x_j frei braucht $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ braucht $y_i \leq 0$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ erlaubt y_i frei
- Bei $\min$ statt $\max$: wollen *untere* Schranke $c^T x \geq \ell$ statt *oberer* Schranke $c^T x \leq u$

Wo die Vorzeichen gebraucht werden

Für x primal zulässig und y mit $y \geq 0$, $A^\top y \geq c$:

$$c^\top x \overset{(1)}{\leq} (A^\top y)^\top x = y^\top A x \overset{(2)}{\leq} y^\top b$$

- **(1)** termweise $c_j x_j \leq \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j$: braucht $x_j \geq 0$ **und** $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$
- **(2)** termweise $y_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) \leq y_i b_i$: braucht $y_i \geq 0$ **und** $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$
- $x_j \leq 0$ braucht $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$, x_j frei braucht $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ braucht $y_i \leq 0$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ erlaubt y_i frei
- Bei $\min$ statt $\max$: wollen *untere* Schranke $c^T x \geq \ell$ statt *oberer* Schranke $c^T x \leq u$
- Dadurch drehen sich die benötigten Vorzeichen der y_i und die Richtung der dualen Ungleichungen

Wo die Vorzeichen gebraucht werden

Für x primal zulässig und y mit $y \geq 0$, $A^\top y \geq c$:

$$c^\top x \overset{(1)}{\leq} (A^\top y)^\top x = y^\top A x \overset{(2)}{\leq} y^\top b$$

- **(1)** termweise $c_j x_j \leq \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j$: braucht $x_j \geq 0$ **und** $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$
- **(2)** termweise $y_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) \leq y_i b_i$: braucht $y_i \geq 0$ **und** $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$
- $x_j \leq 0$ braucht $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j$, x_j frei braucht $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ braucht $y_i \leq 0$, $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ erlaubt y_i frei
- Bei $\min$ statt $\max$: wollen *untere* Schranke $c^T x \geq \ell$ statt *oberer* Schranke $c^T x \leq u$
- Dadurch drehen sich die benötigten Vorzeichen der y_i und die Richtung der dualen Ungleichungen
- Außerdem ist das Duale dann ein Maximierungsproblem (größte untere Schranke)

Dualisierungstabelle

	primal: max	**dual:** min	**primal:** min	**dual:** max
Zielfunktion	$\max\ c^\top x$	$\min\ b^\top y$	$\min\ c^\top x$	$\max\ b^\top y$
Nebenbedingung i	$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \geq 0$	$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \geq 0$
	$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \leq 0$	$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \leq 0$
	$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	y_i frei	$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	y_i frei
Variable j	$x_j \geq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$	$x_j \geq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$
	$x_j \leq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$	$x_j \leq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$
	x_j frei	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$	x_j frei	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$

Dualisierungstabelle

	primal: $\max$	**dual:** $\min$	**primal:** $\min$	**dual:** $\max$
Zielfunktion	$\max\ c^\top x$	$\min\ b^\top y$	$\min\ c^\top x$	$\max\ b^\top y$
Nebenbedingung i	$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \geq 0$	$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \geq 0$
	$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \leq 0$	$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \leq 0$
	$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	y_i frei	$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	y_i frei
Variable j	$x_j \geq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$	$x_j \geq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$
	$x_j \leq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$	$x_j \leq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$
	x_j frei	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$	x_j frei	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$

- **Merkregel:** „natürliche“ Richtung ($\leq$ bei $\max$, $\geq$ bei $\min$) $\leftrightarrow \geq 0$, umgekehrt $\leftrightarrow \leq 0$, Gleichung $\leftrightarrow$ frei.

Dualisierungstabelle

	primal: $\max$	**dual:** $\min$	**primal:** $\min$	**dual:** $\max$
Zielfunktion	$\max\ c^\top x$	$\min\ b^\top y$	$\min\ c^\top x$	$\max\ b^\top y$
Nebenbedingung i	$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \geq 0$	$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \geq 0$
	$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \leq 0$	$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \leq 0$
	$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	y_i frei	$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	y_i frei
Variable j	$x_j \geq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$	$x_j \geq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$
	$x_j \leq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$	$x_j \leq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$
	x_j frei	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$	x_j frei	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$

- **Merkregel:** „natürliche“ Richtung ($\leq$ bei $\max$, $\geq$ bei $\min$) $\leftrightarrow \geq 0$, umgekehrt $\leftrightarrow \leq 0$, Gleichung $\leftrightarrow$ frei.
- Merkregel heißt auch SOB-Regel (sensible/odd/bizarre); sensible = ≥ 0, odd = frei, bizarre = ≤ 0

Dualisierungstabelle

	primal: $\max$	dual: $\min$	primal: $\min$	dual: $\max$
Zielfunktion	$\max\ c^\top x$	$\min\ b^\top y$	$\min\ c^\top x$	$\max\ b^\top y$
Nebenbedingung i	$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \geq 0$	$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \geq 0$
	$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \leq 0$	$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \leq 0$
	$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	y_i frei	$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	y_i frei
Variable j	$x_j \geq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$	$x_j \geq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$
	$x_j \leq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$	$x_j \leq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$
	x_j frei	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$	x_j frei	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$

- **Merkregel:** „natürliche“ Richtung ($\leq$ bei $\max$, $\geq$ bei $\min$) $\leftrightarrow \geq 0$, umgekehrt $\leftrightarrow \leq 0$, Gleichung $\leftrightarrow$ frei.
- Merkregel heißt auch SOB-Regel (sensible/odd/bizarre); sensible = ≥ 0, odd = frei, bizarre = ≤ 0
- Die $\min$-Hälfte ist die $\max$-Hälfte von rechts nach links gelesen (Duales des Dualen).

Dualisierungstabelle

	primal: $\max$	**dual:** $\min$	**primal:** $\min$	**dual:** $\max$
Zielfunktion	$\max\ c^\top x$	$\min\ b^\top y$	$\min\ c^\top x$	$\max\ b^\top y$
Nebenbedingung i	$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \geq 0$	$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \geq 0$
	$\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$	$y_i \leq 0$	$\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$	$y_i \leq 0$
	$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	y_i frei	$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	y_i frei
Variable j	$x_j \geq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$	$x_j \geq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$
	$x_j \leq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$	$x_j \leq 0$	$\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$
	x_j frei	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$	x_j frei	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$

- **Merkregel:** „natürliche“ Richtung ($\leq$ bei $\max$, $\geq$ bei $\min$) $\leftrightarrow \geq 0$, umgekehrt $\leftrightarrow \leq 0$, Gleichung $\leftrightarrow$ frei.
- Merkregel heißt auch SOB-Regel (sensible/odd/bizarre); sensible = ≥ 0, odd = frei, bizarre = ≤ 0
- Die $\min$-Hälfte ist die $\max$-Hälfte von rechts nach links gelesen (Duales des Dualen).
- Diese Tabelle erhält man auch durch Transformation in Standardform und Vereinfachung.

Beispiel: Gleichung $\leftrightarrow$ freie Variable

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung $\leftrightarrow$ freie Variable

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Standardform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 4 && \mid y_1^+ \\ & -x_1 - x_2 \leq -4 && \mid y_1^- \\ & x_1 - x_2 \leq 2 && \mid y_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung $\leftrightarrow$ freie Variable

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Standardform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 4 && \mid y_1^+ \\ & -x_1 - x_2 \leq -4 && \mid y_1^- \\ & x_1 - x_2 \leq 2 && \mid y_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Duales der Standardform

$$\begin{aligned} \min\ & 4(y_1^+ - y_1^-) + 2y_2 \\ \text{s.t. } & (y_1^+ - y_1^-) + y_2 \geq 3 \\ & (y_1^+ - y_1^-) - y_2 \geq 2 \\ & y_1^+, y_1^-, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung $\leftrightarrow$ freie Variable

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Standardform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 4 && \mid y_1^+ \\ & -x_1 - x_2 \leq -4 && \mid y_1^- \\ & x_1 - x_2 \leq 2 && \mid y_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Duales der Standardform

$$\begin{aligned} \min\ & 4(y_1^+ - y_1^-) + 2y_2 \\ \text{s.t. } & (y_1^+ - y_1^-) + y_2 \geq 3 \\ & (y_1^+ - y_1^-) - y_2 \geq 2 \\ & y_1^+, y_1^-, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

y_1^+ und y_1^- kommen nur als Differenz $y_1^+ - y_1^-$ vor

$\Rightarrow$ ersetze sie durch $y_1 := y_1^+ - y_1^-$ frei.

Beispiel: Gleichung $\leftrightarrow$ freie Variable

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Standardform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 4 && \mid y_1^+ \\ & -x_1 - x_2 \leq -4 && \mid y_1^- \\ & x_1 - x_2 \leq 2 && \mid y_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Duales der Standardform

$$\begin{aligned} \min\ & 4(y_1^+ - y_1^-) + 2y_2 \\ \text{s.t. } & (y_1^+ - y_1^-) + y_2 \geq 3 \\ & (y_1^+ - y_1^-) - y_2 \geq 2 \\ & y_1^+, y_1^-, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

y_1^+ und y_1^- kommen nur als Differenz $y_1^+ - y_1^-$ vor

$\Rightarrow$ ersetze sie durch $y_1 := y_1^+ - y_1^-$ frei.

Vereinfacht

$$\begin{aligned} \min\ & 4y_1 + 2y_2 \\ \text{s.t. } & y_1 + y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \geq 2 \\ & y_1 \text{ frei}, \ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung $\leftrightarrow$ freie Variable

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Standardform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 4 && \mid y_1^+ \\ & -x_1 - x_2 \leq -4 && \mid y_1^- \\ & x_1 - x_2 \leq 2 && \mid y_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Duales der Standardform

$$\begin{aligned} \min\ & 4(y_1^+ - y_1^-) + 2y_2 \\ \text{s.t. } & (y_1^+ - y_1^-) + y_2 \geq 3 \\ & (y_1^+ - y_1^-) - y_2 \geq 2 \\ & y_1^+, y_1^-, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

y_1^+ und y_1^- kommen nur als Differenz $y_1^+ - y_1^-$ vor

$\Rightarrow$ ersetze sie durch $y_1 := y_1^+ - y_1^-$ frei.

Das ist die Transformation „freie Variable $y_1 \to y_1^+ - y_1^-$ mit $y_1^+, y_1^- \geq 0$“ **rückwärts**.

Vereinfacht

$$\begin{aligned} \min\ & 4y_1 + 2y_2 \\ \text{s.t. } & y_1 + y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \geq 2 \\ & y_1 \text{ frei}, \ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Gleichung $\leftrightarrow$ freie Variable

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 = 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Standardform

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 + x_2 \leq 4 && \mid y_1^+ \\ & -x_1 - x_2 \leq -4 && \mid y_1^- \\ & x_1 - x_2 \leq 2 && \mid y_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Duales der Standardform

$$\begin{aligned} \min\ & 4(y_1^+ - y_1^-) + 2y_2 \\ \text{s.t. } & (y_1^+ - y_1^-) + y_2 \geq 3 \\ & (y_1^+ - y_1^-) - y_2 \geq 2 \\ & y_1^+, y_1^-, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

y_1^+ und y_1^- kommen nur als Differenz $y_1^+ - y_1^-$ vor

$\Rightarrow$ ersetze sie durch $y_1 := y_1^+ - y_1^-$ frei.

Das ist die Transformation „freie Variable $y_1 \to y_1^+ - y_1^-$ mit $y_1^+, y_1^- \geq 0$“ **rückwärts**.

Dualisierungstabelle liefert das direkt.

Vereinfacht

$$\begin{aligned} \min\ & 4y_1 + 2y_2 \\ \text{s.t. } & y_1 + y_2 \geq 3 \\ & y_1 - y_2 \geq 2 \\ & y_1 \text{ frei}, \ y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dualisierung: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq -4 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 10 \\
& 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_3 \text{ frei}
\end{aligned}
$$

Dualisierung: Beispiel

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & -4 & & y_1 \geq 0 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 & \leq & 10 & & y_2 \geq 0 \\
& 3x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & -2 & & y_3 \geq 0 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0 & & \\
& x_3 & \text{frei} & & & \\
\end{array}
\qquad
y_1, y_2, y_3 \geq 0
$$

- Alle Nebenbedingungen „$\leq$“ in einem $\max$-Problem $\Rightarrow$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

Dualisierung: Beispiel

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & -4 \quad y_1 \geq 0 \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & \leq & 10 \quad y_2 \geq 0 \\
& 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & -2 \quad y_3 \geq 0 \\
& & & x_1, x_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & x_3 & & \text{frei}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{s.t.} & y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & \geq & 3 \quad (x_1) \\
& & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Alle Nebenbedingungen „$\leq$“ in einem $\max$-Problem $\Rightarrow$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
- $x_1, x_2 \geq 0$ $\Rightarrow$ duale Nebenbedingungen 1 und 2 mit „$\geq$“.

Dualisierung: Beispiel

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & -4 \quad y_1 \geq 0 \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & \leq & 10 \quad y_2 \geq 0 \\
& 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \leq & -2 \quad y_3 \geq 0 \\
& & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \\
& & & & & x_3 & & \text{frei}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{s.t.} & y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & \geq & 3 \quad (x_1) \\
& y_1 & + & 3y_2 & - & 2y_3 & \geq & 4 \quad (x_2) \\
& & & & & y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Alle Nebenbedingungen „$\leq$“ in einem $\max$-Problem $\Rightarrow$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
- $x_1, x_2 \geq 0$ $\Rightarrow$ duale Nebenbedingungen 1 und 2 mit „$\geq$“.

Dualisierung: Beispiel

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & -4 \quad y_1 \geq 0 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 & \leq & 10 \quad y_2 \geq 0 \\
& 3x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & -2 \quad y_3 \geq 0 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0 \\
& x_3 & & \text{frei}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{s.t.} & y_1 + 2y_2 + 3y_3 & \geq & 3 & (x_1) \\
& y_1 + 3y_2 - 2y_3 & \geq & 4 & (x_2) \\
& 3y_1 - 2y_2 + y_3 & = & -2 & (x_3) \\
& y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

- Alle Nebenbedingungen „$\leq$“ in einem $\max$-Problem $\Rightarrow$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
- $x_1, x_2 \geq 0$ $\Rightarrow$ duale Nebenbedingungen 1 und 2 mit „$\geq$“.
- x_3 frei $\Rightarrow$ duale Nebenbedingung 3 ist eine **Gleichung**.

Dualisierung: Beispiel

$$
\begin{array}{lrcll}
\max & 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 & & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & -4 & y_1 \geq 0 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 & \leq & 10 & y_2 \geq 0 \\
& 3x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & -2 & y_3 \geq 0 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0 & \\
& x_3 & \text{frei} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcll}
\min & -4y_1 + 10y_2 - 2y_3 & & & \\
\text{s.t.} & y_1 + 2y_2 + 3y_3 & \geq & 3 & (x_1) \\
& y_1 + 3y_2 - 2y_3 & \geq & 4 & (x_2) \\
& 3y_1 - 2y_2 + y_3 & = & -2 & (x_3) \\
& y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

- Alle Nebenbedingungen „$\leq$“ in einem $\max$-Problem $\Rightarrow$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
- $x_1, x_2 \geq 0$ $\Rightarrow$ duale Nebenbedingungen 1 und 2 mit „$\geq$“.
- x_3 frei $\Rightarrow$ duale Nebenbedingung 3 ist eine **Gleichung**.

Dualisierung: Beispiel

$$
\begin{array}{lrcrl}
\max & 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 & & & \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & -4 & y_1 \geq 0 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 & \leq & 10 & y_2 \geq 0 \\
& 3x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & -2 & y_3 \geq 0 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0 & \\
& x_3 & \text{frei} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lrcrl}
\min & -4y_1 + 10y_2 - 2y_3 & & & \\
\text{s.t.} & y_1 + 2y_2 + 3y_3 & \geq & 3 & (x_1) \\
& y_1 + 3y_2 - 2y_3 & \geq & 4 & (x_2) \\
& 3y_1 - 2y_2 + y_3 & = & -2 & (x_3) \\
& y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

- Alle Nebenbedingungen „$\leq$“ in einem $\max$-Problem $\Rightarrow$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.
- $x_1, x_2 \geq 0$ $\Rightarrow$ duale Nebenbedingungen 1 und 2 mit „$\geq$“.
- x_3 frei $\Rightarrow$ duale Nebenbedingung 3 ist eine **Gleichung**.

Optimalität als Zulässigkeit

Satz

Für $(P)\colon\ \max\ c^\top x$ s.t. $Ax \leq b, x \geq 0$ und $(D)\colon\ \min\ b^\top y$ s.t. $A^\top y \geq c, y \geq 0$ sind äquivalent:

(i) x ist optimal für (P) und y ist optimal für (D);

(ii) $Ax \leq b,\ \ x \geq 0,\ \ A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0,\ \ c^\top x \geq b^\top y.$

Optimalität als Zulässigkeit

Satz

Für $(P)\colon\ \max c^\top x$ s.t. $Ax \le b, x \ge 0$ und $(D)\colon\ \min b^\top y$ s.t. $A^\top y \ge c, y \ge 0$ sind äquivalent:
(i) x ist optimal für (P) und y ist optimal für (D);
(ii) $Ax \le b,\ \ x \ge 0,\ \ A^\top y \ge c,\ \ y \ge 0,\ \ c^\top x \ge b^\top y.$

- **(ii)** $\Rightarrow$ **(i):** schwache Dualität liefert $c^\top x \le b^\top y$, also $c^\top x = b^\top y \ \Rightarrow$ beide optimal (Korollar).

Optimalität als Zulässigkeit

Satz

Für $(P)\colon\ \max c^\top x$ s.t. $Ax \le b, x \ge 0$ und $(D)\colon\ \min b^\top y$ s.t. $A^\top y \ge c, y \ge 0$ sind äquivalent:

(i) x ist optimal für (P) und y ist optimal für (D);

(ii) $Ax \le b,\ \ x \ge 0,\ \ A^\top y \ge c,\ \ y \ge 0,\ \ c^\top x \ge b^\top y.$

- **(ii)** $\Rightarrow$ **(i):** schwache Dualität liefert $c^\top x \le b^\top y$, also $c^\top x = b^\top y \ \Rightarrow$ beide optimal (Korollar).
- **(i)** $\Rightarrow$ **(ii):** starke Dualität liefert $c^\top x = b^\top y$. $\square$

Optimalität als Zulässigkeit

Satz

Für $(P)\colon\ \max c^\top x$ s.t. $Ax \le b, x \ge 0$ und $(D)\colon\ \min b^\top y$ s.t. $A^\top y \ge c, y \ge 0$ sind äquivalent:
(i) x ist optimal für (P) und y ist optimal für (D);
(ii) $Ax \le b,\ \ x \ge 0,\ \ A^\top y \ge c,\ \ y \ge 0,\ \ c^\top x \ge b^\top y.$

- **(ii) $\Rightarrow$ (i):** schwache Dualität liefert $c^\top x \le b^\top y$, also $c^\top x = b^\top y \ \Rightarrow$ beide optimal (Korollar).
- **(i) $\Rightarrow$ (ii):** starke Dualität liefert $c^\top x = b^\top y$. $\square$
- Ein einziges System **ohne Zielfunktion**, dessen zulässige Lösungen genau die optimalen Paare sind:

Optimalität als Zulässigkeit

Satz

Für $(P)\colon\ \max c^\top x$ s.t. $Ax \le b, x \ge 0$ und $(D)\colon\ \min b^\top y$ s.t. $A^\top y \ge c, y \ge 0$ sind äquivalent:
(i) x ist optimal für (P) und y ist optimal für (D);
(ii) $Ax \le b,\ \ x \ge 0,\ \ A^\top y \ge c,\ \ y \ge 0,\ \ c^\top x \ge b^\top y.$

- **(ii) $\Rightarrow$ (i):** schwache Dualität liefert $c^\top x \le b^\top y$, also $c^\top x = b^\top y \ \Rightarrow$ beide optimal (Korollar).
- **(i) $\Rightarrow$ (ii):** starke Dualität liefert $c^\top x = b^\top y$. $\square$
- Ein einziges System **ohne Zielfunktion**, dessen zulässige Lösungen genau die optimalen Paare sind:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^\top \\ -c^\top & b^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x, y \ge 0$$

Optimalität als Zulässigkeit

Satz

Für $(P)\colon\ \max c^\top x$ s.t. $Ax \le b, x \ge 0$ und $(D)\colon\ \min b^\top y$ s.t. $A^\top y \ge c, y \ge 0$ sind äquivalent:
(i) x ist optimal für (P) und y ist optimal für (D);
(ii) $Ax \le b,\ \ x \ge 0,\ \ A^\top y \ge c,\ \ y \ge 0,\ \ c^\top x \ge b^\top y.$

- **(ii) $\Rightarrow$ (i):** schwache Dualität liefert $c^\top x \le b^\top y$, also $c^\top x = b^\top y \ \Rightarrow$ beide optimal (Korollar).
- **(i) $\Rightarrow$ (ii):** starke Dualität liefert $c^\top x = b^\top y$. $\square$
- Ein einziges System **ohne Zielfunktion**, dessen zulässige Lösungen genau die optimalen Paare sind:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^\top \\ -c^\top & b^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x, y \ge 0$$

- Unzulässig genau dann, wenn (P) keine optimale Lösung hat (unzulässig oder unbeschränkt).

Optimalität als Zulässigkeit

Satz

Für $(P)\colon\ \max c^\top x$ s.t. $Ax \le b, x \ge 0$ und $(D)\colon\ \min b^\top y$ s.t. $A^\top y \ge c, y \ge 0$ sind äquivalent:
(i) x ist optimal für (P) und y ist optimal für (D);
(ii) $Ax \le b,\ \ x \ge 0,\ \ A^\top y \ge c,\ \ y \ge 0,\ \ c^\top x \ge b^\top y.$

- **(ii) $\Rightarrow$ (i):** schwache Dualität liefert $c^\top x \le b^\top y$, also $c^\top x = b^\top y \ \Rightarrow$ beide optimal (Korollar).
- **(i) $\Rightarrow$ (ii):** starke Dualität liefert $c^\top x = b^\top y$. $\square$
- Ein einziges System **ohne Zielfunktion**, dessen zulässige Lösungen genau die optimalen Paare sind:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^\top \\ -c^\top & b^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x, y \ge 0$$

- Unzulässig genau dann, wenn (P) keine optimale Lösung hat (unzulässig oder unbeschränkt).
- **Optimieren ist nicht schwerer als zulässige Punkte finden** (z. B. mit Phase I).

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Rechteckregel, negativ transponiertes Dictionary, dualer Simplex, dualer Quotiententest, duale Phase I, Hilfszielfunktion, Dualisierungstabelle

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Rechteckregel, negativ transponiertes Dictionary, dualer Simplex, dualer Quotiententest, duale Phase I, Hilfszielfunktion, Dualisierungstabelle

- **Rechteckregel** (Pivotschritt): $p \mapsto \frac{1}{p}$, $q \mapsto -\frac{q}{p}$, $r \mapsto \frac{r}{p}$, $s \mapsto s - \frac{qr}{p}$ – auch für Konstanten und Zielfunktion.

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Rechteckregel, negativ transponiertes Dictionary, dualer Simplex, dualer Quotiententest, duale Phase I, Hilfszielfunktion, Dualisierungstabelle

- **Rechteckregel** (Pivotschritt): $p \mapsto \frac{1}{p}$, $q \mapsto -\frac{q}{p}$, $r \mapsto \frac{r}{p}$, $s \mapsto s - \frac{qr}{p}$ – auch für Konstanten und Zielfunktion.
- Das duale Dictionary ist das **negativ Transponierte** des primalen – auch nach jedem Pivotschritt (primal x_j ein, x_i aus $\leftrightarrow$ dual z_i ein, z_j aus).

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Rechteckregel, negativ transponiertes Dictionary, dualer Simplex, dualer Quotiententest, duale Phase I, Hilfszielfunktion, Dualisierungstabelle

- **Rechteckregel** (Pivotschritt): $p \mapsto \frac{1}{p}$, $q \mapsto -\frac{q}{p}$, $r \mapsto \frac{r}{p}$, $s \mapsto s - \frac{qr}{p}$ – auch für Konstanten und Zielfunktion.
- Das duale Dictionary ist das **negativ Transponierte** des primalen – auch nach jedem Pivotschritt (primal x_j ein, x_i aus $\leftrightarrow$ dual z_i ein, z_j aus).
- **Dualer Simplex:** Pivotschritte im primalen Dictionary, die $\bar{c} \leq 0$ erhalten: x_k mit $\bar{b}_k < 0$ tritt aus, eintretend per dualem Quotiententest; kein Kandidat $\Rightarrow$ LP unzulässig (dual unbeschränkt).

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Rechteckregel, negativ transponiertes Dictionary, dualer Simplex, dualer Quotiententest, duale Phase I, Hilfszielfunktion, Dualisierungstabelle

- **Rechteckregel** (Pivotschritt): $p \mapsto \frac{1}{p}$, $q \mapsto -\frac{q}{p}$, $r \mapsto \frac{r}{p}$, $s \mapsto s - \frac{qr}{p}$ – auch für Konstanten und Zielfunktion.
- Das duale Dictionary ist das **negativ Transponierte** des primalen – auch nach jedem Pivotschritt (primal x_j ein, x_i aus $\leftrightarrow$ dual z_i ein, z_j aus).
- **Dualer Simplex:** Pivotschritte im primalen Dictionary, die $\bar{c} \leq 0$ erhalten: x_k mit $\bar{b}_k < 0$ tritt aus, eintretend per dualem Quotiententest; kein Kandidat $\Rightarrow$ LP unzulässig (dual unbeschränkt).
- **Duale Phase I:** Hilfszielfunktion mit $\tilde{c} \leq 0$, dualer Simplex bis primal zulässig, dann ursprüngliche Zielfunktion einsetzen und primal weiter – ohne Hilfsvariable x_0.

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Rechteckregel, negativ transponiertes Dictionary, dualer Simplex, dualer Quotiententest, duale Phase I, Hilfszielfunktion, Dualisierungstabelle

- **Rechteckregel** (Pivotschritt): $p \mapsto \frac{1}{p}$, $q \mapsto -\frac{q}{p}$, $r \mapsto \frac{r}{p}$, $s \mapsto s - \frac{qr}{p}$ – auch für Konstanten und Zielfunktion.
- Das duale Dictionary ist das **negativ Transponierte** des primalen – auch nach jedem Pivotschritt (primal x_j ein, x_i aus $\leftrightarrow$ dual z_i ein, z_j aus).
- **Dualer Simplex:** Pivotschritte im primalen Dictionary, die $\bar{c} \leq 0$ erhalten: x_k mit $\bar{b}_k < 0$ tritt aus, eintretend per dualem Quotiententest; kein Kandidat $\Rightarrow$ LP unzulässig (dual unbeschränkt).
- **Duale Phase I:** Hilfszielfunktion mit $\tilde{c} \leq 0$, dualer Simplex bis primal zulässig, dann ursprüngliche Zielfunktion einsetzen und primal weiter – ohne Hilfsvariable x_0.
- **Dualisierungsregeln:** Nebenbedingung $i \leftrightarrow$ Vorzeichen von y_i, Vorzeichen von $x_j \leftrightarrow$ Nebenbedingung j; „natürlich“ $\leftrightarrow \geq 0$, umgekehrt $\leftrightarrow \leq 0$, Gleichung $\leftrightarrow$ frei. Direkt dualisieren statt erst in Standardform.

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Rechteckregel, negativ transponiertes Dictionary, dualer Simplex, dualer Quotiententest, duale Phase I, Hilfszielfunktion, Dualisierungstabelle

- **Rechteckregel** (Pivotschritt): $p \mapsto \frac{1}{p}$, $q \mapsto -\frac{q}{p}$, $r \mapsto \frac{r}{p}$, $s \mapsto s - \frac{qr}{p}$ – auch für Konstanten und Zielfunktion.
- Das duale Dictionary ist das **negativ Transponierte** des primalen – auch nach jedem Pivotschritt (primal x_j ein, x_i aus $\leftrightarrow$ dual z_i ein, z_j aus).
- **Dualer Simplex:** Pivotschritte im primalen Dictionary, die $\bar{c} \leq 0$ erhalten: x_k mit $\bar{b}_k < 0$ tritt aus, eintretend per dualem Quotiententest; kein Kandidat $\Rightarrow$ LP unzulässig (dual unbeschränkt).
- **Duale Phase I:** Hilfszielfunktion mit $\tilde{c} \leq 0$, dualer Simplex bis primal zulässig, dann ursprüngliche Zielfunktion einsetzen und primal weiter – ohne Hilfsvariable x_0.
- **Dualisierungsregeln:** Nebenbedingung $i \leftrightarrow$ Vorzeichen von y_i, Vorzeichen von $x_j \leftrightarrow$ Nebenbedingung j; „natürlich“ $\leftrightarrow \geq 0$, umgekehrt $\leftrightarrow \leq 0$, Gleichung $\leftrightarrow$ frei. Direkt dualisieren statt erst in Standardform.
- **Optimalität als Zulässigkeit:** primale + duale Nebenbedingungen + $c^\top x \geq b^\top y \Leftrightarrow$ beide optimal.