Technische Universität Braunschweig

Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Algorithmik

Mathematische Methoden der Algorithmik
Dualität

Wintersemester 2026/27

Letzte Woche: Terminierung

Theorem (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Für jedes LP in Standardform gilt:

1. Hat es keine optimale Lösung, so ist es unzulässig oder unbeschränkt.
2. Hat es eine zulässige Lösung, so hat es eine zulässige Basislösung.
3. Hat es eine optimale Lösung, so hat es eine optimale Basislösung.

Letzte Woche: Terminierung

Theorem (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Für jedes LP in Standardform gilt:

1. Hat es keine optimale Lösung, so ist es unzulässig oder unbeschränkt.
2. Hat es eine zulässige Lösung, so hat es eine zulässige Basislösung.
3. Hat es eine optimale Lösung, so hat es eine optimale Basislösung.

- Beweis algorithmisch: Zweiphasensimplex mit lexikographischer Methode **terminiert**.

Letzte Woche: Terminierung

Theorem (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Für jedes LP in Standardform gilt:

1. Hat es keine optimale Lösung, so ist es unzulässig oder unbeschränkt.
2. Hat es eine zulässige Lösung, so hat es eine zulässige Basislösung.
3. Hat es eine optimale Lösung, so hat es eine optimale Basislösung.

- Beweis algorithmisch: Zweiphasensimplex mit lexikographischer Methode **terminiert**.
- Hat das LP eine optimale Lösung, endet Simplex mit einem **optimalen Dictionary**:
  $\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$ mit $\bar{c}_j \leq 0$ für alle $j \in \mathcal{N}$.

Letzte Woche: Terminierung

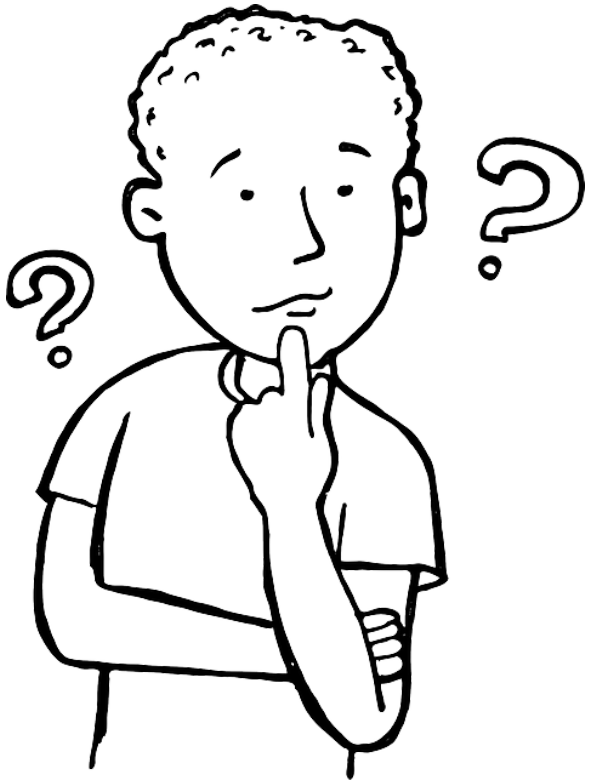
Theorem (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Für jedes LP in Standardform gilt:

1. Hat es keine optimale Lösung, so ist es unzulässig oder unbeschränkt.
2. Hat es eine zulässige Lösung, so hat es eine zulässige Basislösung.
3. Hat es eine optimale Lösung, so hat es eine optimale Basislösung.

- Beweis algorithmisch: Zweiphasensimplex mit lexikographischer Methode **terminiert**.
- Hat das LP eine optimale Lösung, endet Simplex mit einem **optimalen Dictionary**:
  $\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$ mit $\bar{c}_j \leq 0$ für alle $j \in \mathcal{N}$.
- Worst Case: exponentiell viele Pivotschritte (Klee-Minty); in der Praxis schnell.

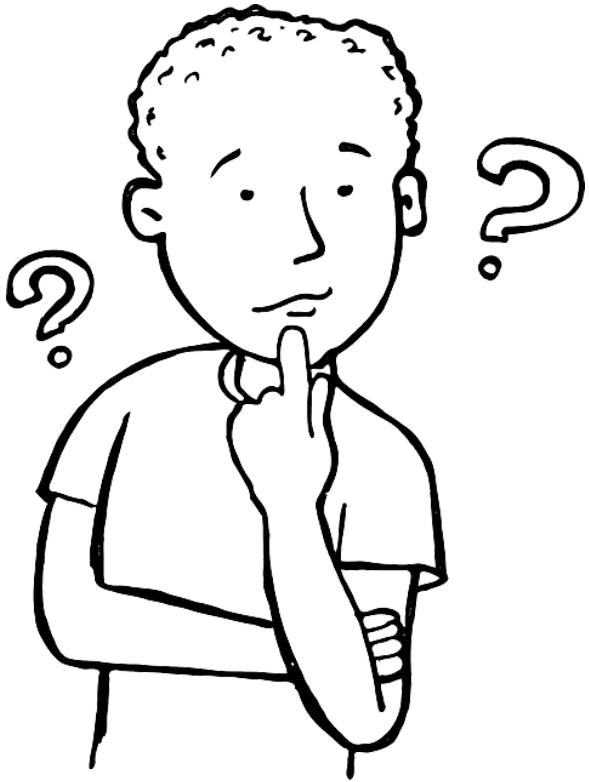
Schranken



Bisher

Jede zulässige Lösung liefert eine **untere Schranke** für den optimalen Wert ζ^*.

Schranken



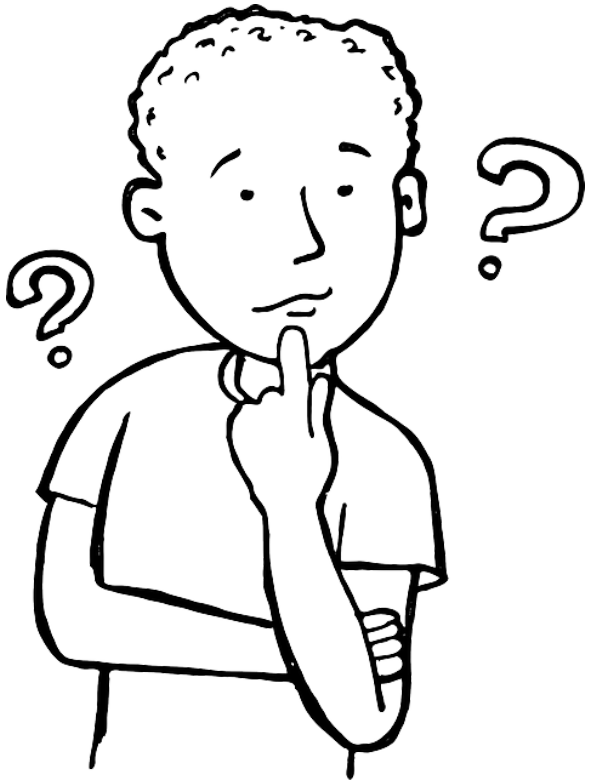
Bisher

Jede zulässige Lösung liefert eine **untere Schranke** für den optimalen Wert ζ^*.

Frage

Können wir auch **obere Schranken** für ζ^* bestimmen?

Schranken



Bisher

Jede zulässige Lösung liefert eine **untere Schranke** für den optimalen Wert ζ^*.

Frage

Können wir auch **obere Schranken** für ζ^* bestimmen?

Wozu?

Gilt obere = untere Schranke, ist die Lösung **beweisbar optimal**, ohne Simplex nachzurechnen.

Das duale LP

Obere Schranken: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Obere Schranken: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Sei ζ^* der optimale Wert.

Obere Schranken: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Sei ζ^* der optimale Wert.
- $(1, 0, 0)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 4$. $(0, 0, 3)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 9$.

Obere Schranken: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Sei ζ^* der optimale Wert.
- $(1,0,0)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 4$. $(0,0,3)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 9$.
- Wie gut ist $(0,0,3)$ im Vergleich zum Optimum?

Obere Schranken: Beispiel

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Sei ζ^* der optimale Wert.
- $(1,0,0)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 4$. $(0,0,3)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 9$.
- Wie gut ist $(0,0,3)$ im Vergleich zum Optimum?

Idee: Nebenbedingungen mit nichtnegativen Faktoren multiplizieren und addieren:

Obere Schranken: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Sei ζ^* der optimale Wert.
- $(1,0,0)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 4$. $(0,0,3)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 9$.
- Wie gut ist $(0,0,3)$ im Vergleich zum Optimum?

Idee: Nebenbedingungen mit nichtnegativen Faktoren multiplizieren und addieren:

$$
\begin{aligned}
2 \times (\ & x_1 + 4x_2 \leq 1) \\
+\ 3 \times (\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3)
\end{aligned}
$$

Obere Schranken: Beispiel

$$\begin{aligned}\max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

- Sei ζ^* der optimale Wert.
- $(1,0,0)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 4$. $(0,0,3)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 9$.
- Wie gut ist $(0,0,3)$ im Vergleich zum Optimum?

Idee: Nebenbedingungen mit nichtnegativen Faktoren multiplizieren und addieren:

$$\begin{aligned} 2 \times (\ & x_1 + 4x_2 \leq 1) \\ + 3 \times (\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3) \\ \hline & 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11 \end{aligned}$$

Obere Schranken: Beispiel

$$\begin{aligned}\max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

- Sei ζ^* der optimale Wert.
- $(1,0,0)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 4$. $(0,0,3)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 9$.
- Wie gut ist $(0,0,3)$ im Vergleich zum Optimum?

Idee: Nebenbedingungen mit nichtnegativen Faktoren multiplizieren und addieren:

$$\begin{aligned} 2 \times (\ & x_1 + 4x_2 \leq 1) \\ + 3 \times (\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3) \\ \hline & 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11 \end{aligned}$$

Für $x \geq 0$ termweise:

$4x_1 \leq 11x_1$ $\quad$ $x_2 \leq 5x_2$ $\quad$ $3x_3 \leq 3x_3$

Obere Schranken: Beispiel

$$\begin{aligned}\max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

- Sei ζ^* der optimale Wert.
- $(1,0,0)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 4$. $(0,0,3)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 9$.
- Wie gut ist $(0,0,3)$ im Vergleich zum Optimum?

Idee: Nebenbedingungen mit nichtnegativen Faktoren multiplizieren und addieren:

$$\begin{aligned}2 \times (\ & x_1 + 4x_2 \leq 1) \\ + 3 \times (\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3) \\ \hline & 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11\end{aligned}$$

Für $x \geq 0$ termweise:

$4x_1 \leq 11x_1$ $\quad$ $x_2 \leq 5x_2$ $\quad$ $3x_3 \leq 3x_3$

Summiert: $\zeta = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11$, also $\zeta^* \leq 11$.

Obere Schranken: Beispiel

$$\begin{aligned}\max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{aligned}$$

- Sei ζ^* der optimale Wert.
- $(1,0,0)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 4$. $(0,0,3)$ ist zulässig, also $\zeta^* \geq 9$.
- Wie gut ist $(0,0,3)$ im Vergleich zum Optimum?

Idee: Nebenbedingungen mit nichtnegativen Faktoren multiplizieren und addieren:

$$\begin{aligned} 2 \times (\ & x_1 + 4x_2 \leq 1) \\ + 3 \times (\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3) \\ \hline & 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11 \end{aligned}$$

Für $x \geq 0$ termweise:

$4x_1 \leq 11x_1$ $\quad$ $x_2 \leq 5x_2$ $\quad$ $3x_3 \leq 3x_3$

Summiert: $\zeta = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11$, also $\zeta^* \leq 11$.

Insgesamt $9 \leq \zeta^* \leq 11$. Geht es besser?

Obere Schranken: verallgemeinert

Mit Faktoren $y_1, y_2 \geq 0$ (damit die Richtung der Ungleichungen erhalten bleibt):

$$\begin{aligned} y_1 \times (x_1 + 4x_2 &\leq 1) \\ + y_2 \times (3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3) \\ \hline (y_1 + 3y_2)\, x_1 + (4y_1 - y_2)\, x_2 + y_2\, x_3 &\leq y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

Obere Schranken: verallgemeinert

Mit Faktoren $y_1, y_2 \geq 0$ (damit die Richtung der Ungleichungen erhalten bleibt):

$$\begin{aligned} y_1 \times (x_1 + 4x_2 &\leq 1) \\ + y_2 \times (3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3) \\ \hline (y_1 + 3y_2)\, x_1 + (4y_1 - y_2)\, x_2 + y_2\, x_3 &\leq y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

- Wann ergibt das eine obere Schranke für die Zielfunktion?

Obere Schranken: verallgemeinert

Mit Faktoren $y_1, y_2 \geq 0$ (damit die Richtung der Ungleichungen erhalten bleibt):

$$\begin{aligned} y_1 \times (x_1 + 4x_2 &\leq 1) \\ + y_2 \times (3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3) \\ \hline (y_1 + 3y_2)\, x_1 + (4y_1 - y_2)\, x_2 + y_2\, x_3 &\leq y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

- Wann ergibt das eine obere Schranke für die Zielfunktion?
- Der Koeffizient von allen x_i muss mindestens so groß sein wie in $\zeta = 4x_1 + x_2 + 3x_3$:

  $y_1 + 3y_2 \geq 4, \quad 4y_1 - y_2 \geq 1, \quad y_2 \geq 3$

Obere Schranken: verallgemeinert

Mit Faktoren $y_1, y_2 \geq 0$ (damit die Richtung der Ungleichungen erhalten bleibt):

$$\begin{aligned} y_1 \times (x_1 + 4x_2 &\leq 1) \\ + y_2 \times (3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3) \\ \hline (y_1 + 3y_2)\, x_1 + (4y_1 - y_2)\, x_2 + y_2\, x_3 &\leq y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

- Wann ergibt das eine obere Schranke für die Zielfunktion?
- Der Koeffizient von allen x_i muss mindestens so groß sein wie in $\zeta = 4x_1 + x_2 + 3x_3$:

  $y_1 + 3y_2 \geq 4, \quad 4y_1 - y_2 \geq 1, \quad y_2 \geq 3$
- Dann gilt $\zeta^* \leq y_1 + 3y_2$.

Obere Schranken: verallgemeinert

Mit Faktoren $y_1, y_2 \geq 0$ (damit die Richtung der Ungleichungen erhalten bleibt):

$$\begin{aligned} y_1 \times (x_1 + 4x_2 &\leq 1) \\ + y_2 \times (3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3) \\ \hline (y_1 + 3y_2)\, x_1 + (4y_1 - y_2)\, x_2 + y_2\, x_3 &\leq y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

- Wann ergibt das eine obere Schranke für die Zielfunktion?
- Der Koeffizient von allen x_i muss mindestens so groß sein wie in $\zeta = 4x_1 + x_2 + 3x_3$:

  $y_1 + 3y_2 \geq 4, \quad 4y_1 - y_2 \geq 1, \quad y_2 \geq 3$
- Dann gilt $\zeta^* \leq y_1 + 3y_2$. Formuliere die Suche nach der *besten* solchen Schranke als LP:

Obere Schranken: verallgemeinert

Mit Faktoren $y_1, y_2 \geq 0$ (damit die Richtung der Ungleichungen erhalten bleibt):

$$\begin{aligned} y_1 \times (x_1 + 4x_2 &\leq 1) \\ + y_2 \times (3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3) \\ \hline (y_1 + 3y_2)\, x_1 + (4y_1 - y_2)\, x_2 + y_2\, x_3 &\leq y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

- Wann ergibt das eine obere Schranke für die Zielfunktion?
- Der Koeffizient von allen x_i muss mindestens so groß sein wie in $\zeta = 4x_1 + x_2 + 3x_3$:

  $y_1 + 3y_2 \geq 4, \quad 4y_1 - y_2 \geq 1, \quad y_2 \geq 3$
- Dann gilt $\zeta^* \leq y_1 + 3y_2$. Formuliere die Suche nach der *besten* solchen Schranke als LP:

$$\min\ y_1 + 3y_2 \quad \text{s.t.} \quad y_1 + 3y_2 \geq 4,\ \ 4y_1 - y_2 \geq 1,\ \ y_2 \geq 3,\ \ y_1, y_2 \geq 0$$

Obere Schranken: verallgemeinert

Mit Faktoren $y_1, y_2 \geq 0$ (damit die Richtung der Ungleichungen erhalten bleibt):

$$\begin{aligned} y_1 \times (x_1 + 4x_2 &\leq 1) \\ + y_2 \times (3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3) \\ \hline (y_1 + 3y_2)\, x_1 + (4y_1 - y_2)\, x_2 + y_2\, x_3 &\leq y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

- Wann ergibt das eine obere Schranke für die Zielfunktion?
- Der Koeffizient von allen x_i muss mindestens so groß sein wie in $\zeta = 4x_1 + x_2 + 3x_3$:
  $y_1 + 3y_2 \geq 4, \quad 4y_1 - y_2 \geq 1, \quad y_2 \geq 3$
- Dann gilt $\zeta^* \leq y_1 + 3y_2$. Formuliere die Suche nach der *besten* solchen Schranke als LP:

$$\min\ y_1 + 3y_2 \quad \text{s.t.} \quad y_1 + 3y_2 \geq 4,\ \ 4y_1 - y_2 \geq 1,\ \ y_2 \geq 3,\ \ y_1, y_2 \geq 0$$

- Das ist das **duale LP**. Beispiel von eben: $y = (2, 3)$ mit Wert 11.

Ökonomische Interpretation

Produzent (*primal*)

$$\begin{aligned} \max \ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

- Produkte $j \in [n]$, Rohstoffe $i \in [m]$
- x_j: produzierte Menge von Produkt j
- c_j: Profit pro Einheit von Produkt j
- b_i: Vorrat an Rohstoff i
- a_{ij}: Verbrauch von i pro Einheit von j

Ökonomische Interpretation

Produzent (*primal*)

$$\begin{aligned} \max\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.}\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

- Produkte $j \in [n]$, Rohstoffe $i \in [m]$
- x_j: produzierte Menge von Produkt j
- c_j: Profit pro Einheit von Produkt j
- b_i: Vorrat an Rohstoff i
- a_{ij}: Verbrauch von i pro Einheit von j

Käufer (*dual*)

$$\begin{aligned} \min\ & \textstyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{s.t.}\ & \textstyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ & y_1, \dots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

- Will alle Rohstoffe kaufen
- Bietet Preis y_i pro Einheit von Rohstoff i
- Eine Einheit von Produkt j weniger:
  Rohstoffe im Wert $\sum_i a_{ij} y_i$ frei
- Produzent verkauft für Profit $\geq c_j$
- Käufer zahlt so wenig wie möglich

Duales LP

Definition (duales LP)

Zum LP in Standardform (dem **primalen** LP) ist das **duale** LP definiert durch:

Primal (P)

$$\max\ c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

Dual (D)

$$\min\ b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0$$

Duales LP

Definition (duales LP)

Zum LP in Standardform (dem **primalen** LP) ist das **duale** LP definiert durch:

Primal (P)

$$\max\ c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ \ x \geq 0$$

Dual (D)

$$\min\ b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0$$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$

Duales LP

Definition (duales LP)

Zum LP in Standardform (dem **primalen** LP) ist das **duale** LP definiert durch:

Primal (P)	**Dual** (D)
$\max\ c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ \ x \geq 0$	$\min\ b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$
- Eine duale Variable y_i je primaler Nebenbedingung i, eine duale Nebenbedingung je primaler Variable x_j.

Duales LP

Definition (duales LP)

Zum LP in Standardform (dem **primalen** LP) ist das **duale** LP definiert durch:

Primal (P)	**Dual** (D)
$\max\ c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ \ x \geq 0$	$\min\ b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$
- Eine duale Variable y_i je primaler Nebenbedingung i, eine duale Nebenbedingung je primaler Variable x_j.
- Zielfunktion und rechte Seite tauschen die Rollen; $\max \leftrightarrow \min$, $\leq \leftrightarrow \geq$.

Duales LP

Definition (duales LP)

Zum LP in Standardform (dem **primalen** LP) ist das **duale** LP definiert durch:

Primal (P)	**Dual** (D)
$\max\ c^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ \ x \geq 0$	$\min\ b^\top y \quad \text{s.t.} \quad A^\top y \geq c,\ \ y \geq 0$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$
- Eine duale Variable y_i je primaler Nebenbedingung i, eine duale Nebenbedingung je primaler Variable x_j.
- Zielfunktion und rechte Seite tauschen die Rollen; $\max \leftrightarrow \min$, $\leq \leftrightarrow \geq$.
- Andere LPs (Gleichungen, freie Variablen, …) erst in Standardform bringen – Regeln später.

Das Duale des Dualen

Das Duale des Dualen

Satz

Das duale LP des dualen LPs ist äquivalent zum primalen LP.

Das Duale des Dualen

Satz

Das duale LP des dualen LPs ist äquivalent zum primalen LP.

Beweis: Das duale LP $\min\ b^\top y$ s.t. $A^\top y \geq c, y \geq 0$ in Standardform schreiben:

Das Duale des Dualen

Satz

Das duale LP des dualen LPs ist äquivalent zum primalen LP.

Beweis: Das duale LP $\min\ b^\top y$ s.t. $A^\top y \geq c, y \geq 0$ in Standardform schreiben:

$$\max\ (-b)^\top y \quad \text{s.t.} \quad (-A^\top)\, y \leq -c, \quad y \geq 0$$

Das Duale des Dualen

Satz

Das duale LP des dualen LPs ist äquivalent zum primalen LP.

Beweis: Das duale LP $\min\ b^\top y$ s.t. $A^\top y \geq c, y \geq 0$ in Standardform schreiben:

$$\max\ (-b)^\top y \quad \text{s.t.} \quad (-A^\top)\, y \leq -c, \quad y \geq 0$$

Das ist ein LP in Standardform mit Daten $\tilde{c} = -b$, $\tilde{A} = -A^\top$, $\tilde{b} = -c$. Sein duales LP ist nach Definition

Das Duale des Dualen

Satz

Das duale LP des dualen LPs ist äquivalent zum primalen LP.

Beweis: Das duale LP $\min\ b^\top y$ s.t. $A^\top y \geq c, y \geq 0$ in Standardform schreiben:

$$\max\ (-b)^\top y \quad \text{s.t.} \quad (-A^\top)\, y \leq -c, \quad y \geq 0$$

Das ist ein LP in Standardform mit Daten $\tilde{c} = -b$, $\tilde{A} = -A^\top$, $\tilde{b} = -c$. Sein duales LP ist nach Definition

$$\min\ \tilde{b}^\top x = (-c)^\top x \quad \text{s.t.} \quad \tilde{A}^\top x = (-A)\, x \geq \tilde{c} = -b, \quad x \geq 0.$$

Das Duale des Dualen

Satz

Das duale LP des dualen LPs ist äquivalent zum primalen LP.

Beweis: Das duale LP $\min\ b^\top y$ s.t. $A^\top y \geq c, y \geq 0$ in Standardform schreiben:

$$\max\ (-b)^\top y \quad \text{s.t.} \quad (-A^\top)\, y \leq -c, \quad y \geq 0$$

Das ist ein LP in Standardform mit Daten $\tilde{c} = -b$, $\tilde{A} = -A^\top$, $\tilde{b} = -c$. Sein duales LP ist nach Definition

$$\min\ \tilde{b}^\top x = (-c)^\top x \quad \text{s.t.} \quad \tilde{A}^\top x = (-A)\, x \geq \tilde{c} = -b, \quad x \geq 0.$$

Multiplikation von Zielfunktion und Nebenbedingungen mit -1 ergibt $\max\ c^\top x$ s.t. $Ax \leq b, x \geq 0$. □

Das Duale des Dualen

Satz

Das duale LP des dualen LPs ist äquivalent zum primalen LP.

Beweis: Das duale LP $\min\ b^\top y$ s.t. $A^\top y \geq c, y \geq 0$ in Standardform schreiben:

$$\max\ (-b)^\top y \quad \text{s.t.} \quad (-A^\top)\, y \leq -c, \quad y \geq 0$$

Das ist ein LP in Standardform mit Daten $\tilde{c} = -b$, $\tilde{A} = -A^\top$, $\tilde{b} = -c$. Sein duales LP ist nach Definition

$$\min\ \tilde{b}^\top x = (-c)^\top x \quad \text{s.t.} \quad \tilde{A}^\top x = (-A)\, x \geq \tilde{c} = -b, \quad x \geq 0.$$

Multiplikation von Zielfunktion und Nebenbedingungen mit -1 ergibt $\max\ c^\top x$ s.t. $Ax \leq b, x \geq 0$. □

Daher sprechen wir von einem Paar **primal–dual**; welches LP „primal“ heißt, ist Konvention.

Schwache Dualität

Theorem (schwache Dualität)

Ist x zulässig für das primale LP und y zulässig für das duale LP, dann gilt

$$c^\top x \leq b^\top y.$$

Primal (P)

$$\begin{aligned} \max \ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Dual (D)

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{s.t.} \ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\ & y_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Kurzer Beweis: Tafel (zur Vollständigkeit auch auf Folien).

Beweis: Schwache Dualität

Theorem (schwache Dualität)

x primal zulässig, y dual zulässig $\Rightarrow$ $c^\top x \leq b^\top y$.

Beweis (nach Vanderbei, Kap. 5):

$$
\begin{aligned}
c^\top x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;&\leq\; \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \Big) x_j && \text{da } x_j \geq 0 \text{ und } \textstyle\sum_i a_{ij} y_i \geq c_j \text{ (y dual zulässig)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) y_i && \text{Summen vertauschen} \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = b^\top y && \text{da } y_i \geq 0 \text{ und } \textstyle\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i \text{ (x primal zulässig)} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Kurz in Matrixschreibweise: $c^\top x \leq (A^\top y)^\top x = y^\top A x \leq y^\top b$.

Folgerungen

Folgerungen

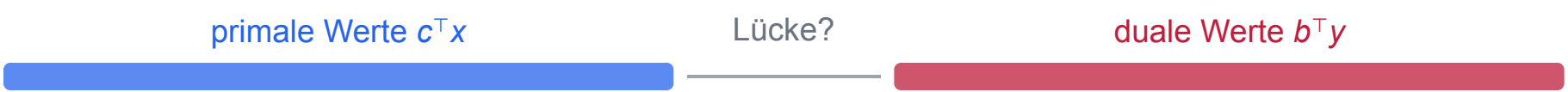
Korollar

1. Sind x primal und y dual zulässig mit $c^\top x = b^\top y$, so sind **beide optimal**.
2. Ist das primale LP unbeschränkt, so ist das duale LP unzulässig.
3. Ist das duale LP unbeschränkt, so ist das primale LP unzulässig.

Folgerungen

Korollar

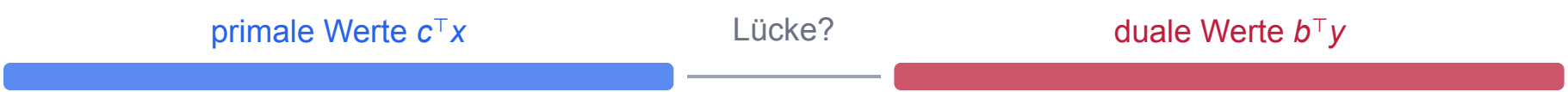
1. Sind x primal und y dual zulässig mit $c^\top x = b^\top y$, so sind **beide optimal**.
2. Ist das primale LP unbeschränkt, so ist das duale LP unzulässig.
3. Ist das duale LP unbeschränkt, so ist das primale LP unzulässig.



Folgerungen

Korollar

1. Sind x primal und y dual zulässig mit $c^\top x = b^\top y$, so sind **beide optimal**.
2. Ist das primale LP unbeschränkt, so ist das duale LP unzulässig.
3. Ist das duale LP unbeschränkt, so ist das primale LP unzulässig.

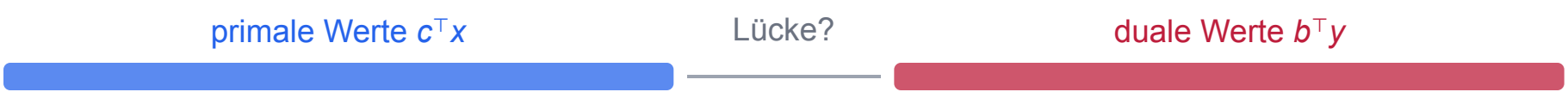


Beweis:

Folgerungen

Korollar

1. Sind x primal und y dual zulässig mit $c^\top x = b^\top y$, so sind **beide optimal**.
2. Ist das primale LP unbeschränkt, so ist das duale LP unzulässig.
3. Ist das duale LP unbeschränkt, so ist das primale LP unzulässig.



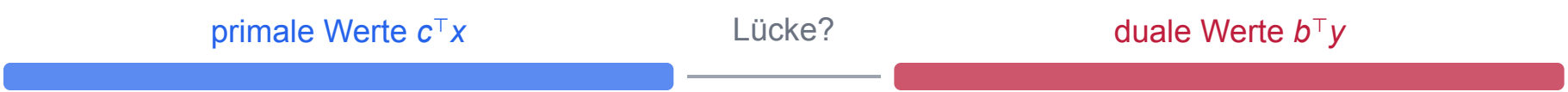
Beweis:

1. Für jedes primal zulässige x' gilt $c^\top x' \leq b^\top y = c^\top x$, also ist x optimal;
   ebenso $b^\top y' \geq c^\top x = b^\top y$ für jedes dual zulässige y'.

Folgerungen

Korollar

1. Sind x primal und y dual zulässig mit $c^\top x = b^\top y$, so sind **beide optimal**.
2. Ist das primale LP unbeschränkt, so ist das duale LP unzulässig.
3. Ist das duale LP unbeschränkt, so ist das primale LP unzulässig.



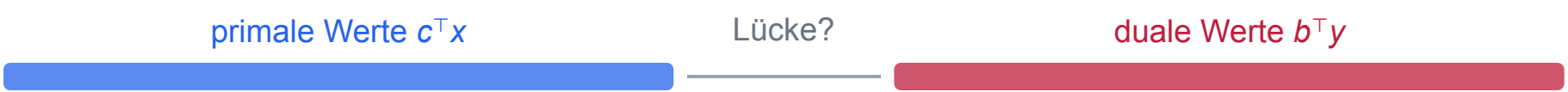
Beweis:

1. Für jedes primal zulässige x' gilt $c^\top x' \leq b^\top y = c^\top x$, also ist x optimal;
   ebenso $b^\top y' \geq c^\top x = b^\top y$ für jedes dual zulässige y'.
2. Ein dual zulässiges y wäre nach schwacher Dualität eine obere Schranke $b^\top y$ für alle $c^\top x$;
   Widerspruch zur Unbeschränktheit.

Folgerungen

Korollar

1. Sind x primal und y dual zulässig mit $c^\top x = b^\top y$, so sind **beide optimal**.
2. Ist das primale LP unbeschränkt, so ist das duale LP unzulässig.
3. Ist das duale LP unbeschränkt, so ist das primale LP unzulässig.



Beweis:

1. Für jedes primal zulässige x' gilt $c^\top x' \leq b^\top y = c^\top x$, also ist x optimal;
   ebenso $b^\top y' \geq c^\top x = b^\top y$ für jedes dual zulässige y'.
2. Ein dual zulässiges y wäre nach schwacher Dualität eine obere Schranke $b^\top y$ für alle $c^\top x$;
   Widerspruch zur Unbeschränktheit.
3. Genauso mit vertauschten Rollen. □

Starke Dualität

Duale Dictionaries

Duales LP in Standardform: $\max\ -b^\top y$ s.t. $-A^\top y \leq -c,\ y \geq 0$. Duale Schlupfvariablen z_j:

Primales Dictionary

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Duales Dictionary

$$\begin{aligned} -\xi &= -\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ z_j &= -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Duale Dictionaries

Duales LP in Standardform: $\max\ -b^\top y$ s.t. $-A^\top y \leq -c,\ y \geq 0$. Duale Schlupfvariablen z_j:

Primales Dictionary

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Duales Dictionary

$$\begin{aligned} -\xi &= -\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ z_j &= -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

- Koeffizienten als Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & -b^\top \\ -c & A^\top \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}^\top$

Duale Dictionaries

Duales LP in Standardform: $\max\ -b^\top y$ s.t. $-A^\top y \le -c,\ y \ge 0$. Duale Schlupfvariablen z_j:

Primales Dictionary

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

Duales Dictionary

$$\begin{aligned} -\xi &= -\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ z_j &= -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

- Koeffizienten als Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & -b^\top \\ -c & A^\top \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}^\top$
- Das duale Dictionary ist das **negativ Transponierte** des primalen.

Duale Dictionaries

Duales LP in Standardform: $\max\ -b^\top y$ s.t. $-A^\top y \leq -c,\ y \geq 0$. Duale Schlupfvariablen z_j:

Primales Dictionary

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Duales Dictionary

$$\begin{aligned} -\xi &= -\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ z_j &= -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

- Koeffizienten als Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & -b^\top \\ -c & A^\top \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}^\top$
- Das duale Dictionary ist das **negativ Transponierte** des primalen.
- Dabei entsprechen sich $x_j \in \mathcal{B} \leftrightarrow z_j \in \mathcal{N}$ und $w_i \in \mathcal{B} \leftrightarrow y_i \in \mathcal{N}$.

Duale Dictionaries

Duales LP in Standardform: $\max\ -b^\top y$ s.t. $-A^\top y \leq -c,\ y \geq 0$. Duale Schlupfvariablen z_j:

Primales Dictionary

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ w_i &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Duales Dictionary

$$\begin{aligned} -\xi &= -\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ z_j &= -c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

- Koeffizienten als Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 & -b^\top \\ -c & A^\top \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & c^\top \\ b & -A \end{pmatrix}^\top$
- Das duale Dictionary ist das **negativ Transponierte** des primalen.
- Dabei entsprechen sich $x_j \in \mathcal{B} \leftrightarrow z_j \in \mathcal{N}$ und $w_i \in \mathcal{B} \leftrightarrow y_i \in \mathcal{N}$.
- Bleibt das beim Pivotieren so?

Duale Dictionaries: Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \zeta &= -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \hline w_1 &= 0 + x_2 - 2x_3 \\ w_2 &= 3 + 3x_1 - 4x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} -\xi &= -3y_2 \\ \hline z_1 &= 3 - 3y_2 \\ z_2 &= -2 - y_1 + 4y_2 \\ z_3 &= -1 + 2y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Duale Dictionaries: Beispiel

Primal

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\hline
w_1 &= 0 + x_2 - 2x_3 \\
w_2 &= 3 + 3x_1 - 4x_2 - x_3
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
-\xi &= -3y_2 \\
\hline
z_1 &= 3 - 3y_2 \\
z_2 &= -2 - y_1 + 4y_2 \\
z_3 &= -1 + 2y_1 + y_2
\end{aligned}
$$

Primal zulässig, dual nicht. Primaler Pivot: x_2 tritt ein, w_2 tritt aus $\leftrightarrow$ dual: y_2 ein, z_2 aus.

Duale Dictionaries: Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \zeta &= -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \hline w_1 &= 0 + x_2 - 2x_3 \\ w_2 &= 3 + 3x_1 - 4x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} -\xi &= -3y_2 \\ \hline z_1 &= 3 - 3y_2 \\ z_2 &= -2 - y_1 + 4y_2 \\ z_3 &= -1 + 2y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Primal zulässig, dual nicht. Primaler Pivot: x_2 tritt ein, w_2 tritt aus $\leftrightarrow$ dual: y_2 ein, z_2 aus.

Duale Dictionaries: Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \zeta &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}w_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \\ \hline w_1 &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}w_2 - \tfrac{9}{4}x_3 \\ x_2 &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}w_2 - \tfrac{1}{4}x_3 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} -\xi &= -\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4}y_1 - \tfrac{3}{4}z_2 \\ \hline z_1 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4}y_1 - \tfrac{3}{4}z_2 \\ y_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}y_1 + \tfrac{1}{4}z_2 \\ z_3 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{4}y_1 + \tfrac{1}{4}z_2 \end{aligned}$$

Primal zulässig, dual nicht. Primaler Pivot: x_2 tritt ein, w_2 tritt aus $\leftrightarrow$ dual: y_2 ein, z_2 aus.

Duale Dictionaries: Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \zeta &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}w_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \\ \hline w_1 &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}w_2 - \tfrac{9}{4}x_3 \\ x_2 &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}w_2 - \tfrac{1}{4}x_3 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} -\xi &= -\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4}y_1 - \tfrac{3}{4}z_2 \\ \hline z_1 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4}y_1 - \tfrac{3}{4}z_2 \\ y_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}y_1 + \tfrac{1}{4}z_2 \\ z_3 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{4}y_1 + \tfrac{1}{4}z_2 \end{aligned}$$

Immer noch negativ transponiert! Primal: x_3 ein, w_1 aus $\leftrightarrow$ dual: y_1 ein, z_3 aus.

Duale Dictionaries: Beispiel

Primal

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}w_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \\
\hline
w_1 &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}w_2 - \tfrac{9}{4}x_3 \\
x_2 &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}w_2 - \tfrac{1}{4}x_3
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
-\xi &= -\tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4}y_1 - \tfrac{3}{4}z_2 \\
\hline
z_1 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{4}y_1 - \tfrac{3}{4}z_2 \\
y_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}y_1 + \tfrac{1}{4}z_2 \\
z_3 &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{4}y_1 + \tfrac{1}{4}z_2
\end{aligned}
$$

Immer noch negativ transponiert! Primal: x_3 ein, w_1 aus $\leftrightarrow$ dual: y_1 ein, z_3 aus.

Duale Dictionaries: Beispiel

Primal

$$\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{5}{9}w_2 - \tfrac{2}{9}w_1 \\
\hline
x_3 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{9}w_2 - \tfrac{4}{9}w_1 \\
x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{9}w_2 + \tfrac{1}{9}w_1
\end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned}
-\xi &= -\tfrac{5}{3} - \tfrac{1}{3}z_3 - \tfrac{2}{3}z_2 \\
\hline
z_1 &= \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}z_3 - \tfrac{2}{3}z_2 \\
y_2 &= \tfrac{5}{9} + \tfrac{1}{9}z_3 + \tfrac{2}{9}z_2 \\
y_1 &= \tfrac{2}{9} + \tfrac{4}{9}z_3 - \tfrac{1}{9}z_2
\end{aligned}$$

Immer noch negativ transponiert! Primal: x_3 ein, w_1 aus $\leftrightarrow$ dual: y_1 ein, z_3 aus.

Duale Dictionaries: Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \zeta &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{5}{9}w_2 - \tfrac{2}{9}w_1 \\ \hline x_3 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{9}w_2 - \tfrac{4}{9}w_1 \\ x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{9}w_2 + \tfrac{1}{9}w_1 \end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

Dual

$$\begin{aligned} -\xi &= -\tfrac{5}{3} - \tfrac{1}{3}z_3 - \tfrac{2}{3}z_2 \\ \hline z_1 &= \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}z_3 - \tfrac{2}{3}z_2 \\ y_2 &= \tfrac{5}{9} + \tfrac{1}{9}z_3 + \tfrac{2}{9}z_2 \\ y_1 &= \tfrac{2}{9} + \tfrac{4}{9}z_3 - \tfrac{1}{9}z_2 \end{aligned}$$

alle Koeffizienten in $-\xi$ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

Beide optimal mit gleichem Wert $\zeta^* = \xi^* = \frac{5}{3}$. Simplex auf dem primalen löst auch das duale LP!

Starke Dualität

Theorem (starke Dualität)

Besitzt das primale LP eine optimale Lösung x^*, dann besitzt auch das duale LP eine optimale Lösung y^*, und es gilt

$$c^\top x^* = b^\top y^*.$$

Werkzeuge

- Simplex terminiert (Bland/lexikographisch) mit einem optimalen Dictionary.
- Notation: $x_{n+i} := w_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ für $i = 1, \dots, m$.
- Optimales Dictionary: $\zeta = \zeta^* + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j, \quad x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \ \ (i \in \mathcal{B}), \quad \bar{c}_j \leq 0$
- Dictionaries entstehen durch Äquivalenzumformungen aus $Ax + w = b$ (Lemma letzte Woche).

Beweis: Starke Dualität

Beweis (nach Vanderbei, Kap. 5): Simplex (zwei Phasen, Bland-Regel) terminiert. Da das LP eine optimale Lösung hat, endet er mit einem optimalen Dictionary

$$\zeta = \zeta^* + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j \qquad \text{mit } \bar{c}_j \leq 0 \text{ für } j \in \mathcal{N} \text{ und } \zeta^* = c^\top x^*.$$

Setze $\bar{c}_k := 0$ für $k \in \mathcal{B}$, also $\zeta = \zeta^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k$, und **definiere** $y_i^* := -\bar{c}_{n+i}$ für $i = 1, \ldots, m$.

Das Dictionary entsteht durch Äquivalenzumformungen aus $w_i = b_i - \sum_j a_{ij} x_j$ und $\zeta = \sum_j c_j x_j$. Für **jedes** $x \in \mathbb{R}^n$ (mit $w_i := b_i - \sum_j a_{ij} x_j$, ohne Vorzeichenbedingungen) gilt daher

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= \zeta^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{n+i} w_i = \zeta^* + \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \Big(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) \\ &= \Big(\zeta^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* \Big) + \sum_{j=1}^{n} \Big(\bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \Big) x_j.\end{aligned}$$

Beweis: Starke Dualität (2)

Bisher

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$, mit $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$ und $\bar{c}_k \leq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n+m$:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \left(\zeta^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*\right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j$$

Beweis: Starke Dualität (2)

Bisher

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$, mit $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$ und $\bar{c}_k \leq 0$ für alle $k = 1, \ldots, n+m$:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \left(\zeta^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*\right) + \sum_{j=1}^{n} \left(\bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j$$

Beide Seiten sind affine Funktionen von $x \in \mathbb{R}^n$. Koeffizientenvergleich ($x = 0$, dann $x = e_j$) liefert

$$\zeta^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = b^\top y^* \qquad \text{und} \qquad c_j = \bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Dual zulässig: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j - \bar{c}_j \geq c_j$, da $\bar{c}_j \leq 0$, und $y_i^* = -\bar{c}_{n+i} \geq 0$.

Optimal: $b^\top y^* = \zeta^* = c^\top x^*$, nach dem Korollar zur schwachen Dualität ist y^* also optimal. $\square$

Starke Dualität: duale Lösung ablesen

$$\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{5}{9}w_2 - \tfrac{2}{9}w_1 \\
\hline
x_3 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{9}w_2 - \tfrac{4}{9}w_1 \\
x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{9}w_2 + \tfrac{1}{9}w_1
\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0), \quad \zeta = \frac{5}{3}$

Starke Dualität: duale Lösung ablesen

$$\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{5}{9}w_2 - \tfrac{2}{9}w_1 \\
\hline
x_3 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{9}w_2 - \tfrac{4}{9}w_1 \\
x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{9}w_2 + \tfrac{1}{9}w_1
\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0), \quad \zeta = \frac{5}{3}$

- Optimales Dictionary des Beispiels von eben

Starke Dualität: duale Lösung ablesen

$$\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{5}{9}w_2 - \tfrac{2}{9}w_1 \\
\hline
x_3 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{9}w_2 - \tfrac{4}{9}w_1 \\
x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{9}w_2 + \tfrac{1}{9}w_1
\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0), \quad \zeta = \frac{5}{3}$

- Optimales Dictionary des Beispiels von eben
- $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$: negative Koeffizienten der w_i in der Zielfunktion

Starke Dualität: duale Lösung ablesen

$$\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{5}{9}w_2 - \tfrac{2}{9}w_1 \\
\hline
x_3 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{9}w_2 - \tfrac{4}{9}w_1 \\
x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{9}w_2 + \tfrac{1}{9}w_1
\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0), \quad \zeta = \frac{5}{3}$

- Optimales Dictionary des Beispiels von eben
- $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$: negative Koeffizienten der w_i in der Zielfunktion
- $y^* = \left(\frac{2}{9}, \frac{5}{9}\right),\ b^\top y^* = 0 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{3} = \zeta^*$

Starke Dualität: duale Lösung ablesen

$$\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{5}{9}w_2 - \tfrac{2}{9}w_1 \\
\hline
x_3 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{9}w_2 - \tfrac{4}{9}w_1 \\
x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{9}w_2 + \tfrac{1}{9}w_1
\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0), \quad \zeta = \frac{5}{3}$

- Optimales Dictionary des Beispiels von eben
- $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$: negative Koeffizienten der w_i in der Zielfunktion
- $y^* = \left(\frac{2}{9}, \frac{5}{9}\right),\ b^\top y^* = 0 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{5}{9} = \frac{5}{3} = \zeta^*$
- Ebenso $z_j^* = -\bar{c}_j$: $z^* = \left(\frac{4}{3}, 0, 0\right)$

Starke Dualität: duale Lösung ablesen

$$\begin{aligned}\zeta &= \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{5}{9}w_2 - \tfrac{2}{9}w_1\\ \hline x_3 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{9}w_2 - \tfrac{4}{9}w_1\\ x_2 &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{2}{9}w_2 + \tfrac{1}{9}w_1\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2) = (0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0), \quad \zeta = \tfrac{5}{3}$

- Optimales Dictionary des Beispiels von eben
- $y_i^* = -\bar{c}_{n+i}$: negative Koeffizienten der w_i in der Zielfunktion
- $y^* = \left(\tfrac{2}{9}, \tfrac{5}{9}\right),\ b^\top y^* = 0 \cdot \tfrac{2}{9} + 3 \cdot \tfrac{5}{9} = \tfrac{5}{3} = \zeta^*$
- Ebenso $z_j^* = -\bar{c}_j$: $z^* = \left(\tfrac{4}{3}, 0, 0\right)$
- Genau die Basislösung des optimalen dualen Dictionaries!

Lösungen von LPs

Lösungen von LPs

- Hat ein LP eine optimale Lösung, dann auch sein duales (starke Dualität, auch angewendet auf das Duale).

Lösungen von LPs

- Hat ein LP eine optimale Lösung, dann auch sein duales (starke Dualität, auch angewendet auf das Duale).
- Ist eines unbeschränkt, so ist das andere unzulässig (schwache Dualität).

Lösungen von LPs

- Hat ein LP eine optimale Lösung, dann auch sein duales (starke Dualität, auch angewendet auf das Duale).
- Ist eines unbeschränkt, so ist das andere unzulässig (schwache Dualität).
- Also sind nur folgende Kombinationen möglich:

Lösungen von LPs

- Hat ein LP eine optimale Lösung, dann auch sein duales (starke Dualität, auch angewendet auf das Duale).
- Ist eines unbeschränkt, so ist das andere unzulässig (schwache Dualität).
- Also sind nur folgende Kombinationen möglich:

primal \ dual	optimal	unzulässig	unbeschränkt
optimal	möglich, $c^\top x^* = b^\top y^*$	–	–
unzulässig	–	möglich	möglich
unbeschränkt	–	möglich	–

Lösungen von LPs

- Hat ein LP eine optimale Lösung, dann auch sein duales (starke Dualität, auch angewendet auf das Duale).
- Ist eines unbeschränkt, so ist das andere unzulässig (schwache Dualität).
- Also sind nur folgende Kombinationen möglich:

primal \ dual	optimal	unzulässig	unbeschränkt
optimal	möglich, $c^\top x^* = b^\top y^*$	–	–
unzulässig	–	möglich	möglich
unbeschränkt	–	möglich	–

Beide unzulässig: $\max\ 2x_1 - x_2$ s.t. $x_1 - x_2 \leq 1,\quad -x_1 + x_2 \leq -2,\quad x \geq 0$

Lösungen von LPs

- Hat ein LP eine optimale Lösung, dann auch sein duales (starke Dualität, auch angewendet auf das Duale).
- Ist eines unbeschränkt, so ist das andere unzulässig (schwache Dualität).
- Also sind nur folgende Kombinationen möglich:

primal \ dual	optimal	unzulässig	unbeschränkt
optimal	möglich, $c^\top x^* = b^\top y^*$	–	–
unzulässig	–	möglich	möglich
unbeschränkt	–	möglich	–

Beide unzulässig: $\max\ 2x_1 - x_2$ s.t. $x_1 - x_2 \leq 1,\quad -x_1 + x_2 \leq -2,\quad x \geq 0$

Äquivalent: $\max\ 2x_1 - x_2$ s.t. $2 \leq x_1 - x_2 \leq 1,\quad x \geq 0$

Lösungen von LPs

- Hat ein LP eine optimale Lösung, dann auch sein duales (starke Dualität, auch angewendet auf das Duale).
- Ist eines unbeschränkt, so ist das andere unzulässig (schwache Dualität).
- Also sind nur folgende Kombinationen möglich:

primal \ dual	optimal	unzulässig	unbeschränkt
optimal	möglich, $c^\top x^* = b^\top y^*$	–	–
unzulässig	–	möglich	möglich
unbeschränkt	–	möglich	–

Beide unzulässig: $\max\ 2x_1 - x_2$ s.t. $x_1 - x_2 \leq 1,\ \ -x_1 + x_2 \leq -2,\ \ x \geq 0$

Äquivalent: $\max\ 2x_1 - x_2$ s.t. $2 \leq x_1 - x_2 \leq 1,\ \ x \geq 0$

Dual: $y_1 - y_2 \geq 2$ und $-y_1 + y_2 \geq -1$ und $y \geq 0$, insbesondere auch $2 \leq y_1 - y_2 \leq 1$.

Lösungen von LPs

- Hat ein LP eine optimale Lösung, dann auch sein duales (starke Dualität, auch angewendet auf das Duale).
- Ist eines unbeschränkt, so ist das andere unzulässig (schwache Dualität).
- Also sind nur folgende Kombinationen möglich:

primal \ dual	optimal	unzulässig	unbeschränkt
optimal	möglich, $c^\top x^* = b^\top y^*$	–	–
unzulässig	–	möglich	möglich
unbeschränkt	–	möglich	–

Beide unzulässig: $\max\ 2x_1 - x_2$ s.t. $x_1 - x_2 \leq 1,\quad -x_1 + x_2 \leq -2,\quad x \geq 0$

Äquivalent: $\max\ 2x_1 - x_2$ s.t. $2 \leq x_1 - x_2 \leq 1,\quad x \geq 0$

Dual: $y_1 - y_2 \geq 2$ und $-y_1 + y_2 \geq -1$ und $y \geq 0$, insbesondere auch $2 \leq y_1 - y_2 \leq 1$.

$\Rightarrow$ Dieser Fall kann also auch auftreten!

Komplementärer Schlupf

Komplementärer Schlupf

Theorem (komplementärer Schlupf)

Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ primal zulässig und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ dual zulässig, und seien $w = (w_1, \ldots, w_m)$ und $z = (z_1, \ldots, z_n)$ die zugehörigen primalen bzw. dualen Schlupfvariablen. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn

$$x_j z_j = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n \qquad \text{und} \qquad w_i y_i = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m.$$

Komplementärer Schlupf

Theorem (komplementärer Schlupf)

Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ primal zulässig und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ dual zulässig, und seien $w = (w_1, \ldots, w_m)$ und $z = (z_1, \ldots, z_n)$ die zugehörigen primalen bzw. dualen Schlupfvariablen. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn

$$x_j z_j = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n \qquad \text{und} \qquad w_i y_i = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m.$$

Erinnerung

- Schlupf: $w_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 0, \qquad z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \geq 0$
- Schwache Dualität: $\sum_j c_j x_j \leq \sum_j \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) y_i \leq \sum_i b_i y_i$

Komplementärer Schlupf

Theorem (komplementärer Schlupf)

Seien $x = (x_1, \ldots, x_n)$ primal zulässig und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ dual zulässig, und seien $w = (w_1, \ldots, w_m)$ und $z = (z_1, \ldots, z_n)$ die zugehörigen primalen bzw. dualen Schlupfvariablen. Dann sind x und y genau dann optimal, wenn

$$x_j z_j = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n \qquad \text{und} \qquad w_i y_i = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m.$$

Erinnerung

- Schlupf: $w_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 0, \qquad z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \geq 0$
- Schwache Dualität: $\sum_j c_j x_j \leq \sum_j \left(\sum_i a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} x_j\right) y_i \leq \sum_i b_i y_i$

Intuitiv: Gilt eine Nebenbedingung nicht mit Gleichheit (straff), ist die zugehörige duale Variable 0.
Ist eine Variable nicht 0, so ist die zugehörige duale Nebenbedingung straff.

Beweis: Komplementärer Schlupf

Beweis (nach Vanderbei, Kap. 5): Wir betrachten die Ungleichungskette aus dem Beweis der schwachen Dualität:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \overset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \Big) x_j = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) y_i \overset{(2)}{\leq} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

(1): Die Differenz ist $\sum_j \big(\sum_i a_{ij} y_i - c_j \big) x_j = \sum_{j=1}^{n} z_j x_j$, eine Summe nichtnegativer Terme ($z_j, x_j \geq 0$). Also gilt Gleichheit in (1) genau dann, wenn $x_j z_j = 0$ für alle j.

(2): Die Differenz ist $\sum_i \big(b_i - \sum_j a_{ij} x_j \big) y_i = \sum_{i=1}^{m} w_i y_i$, eine Summe nichtnegativer Terme ($w_i, y_i \geq 0$). Also gilt Gleichheit in (2) genau dann, wenn $w_i y_i = 0$ für alle i.

Insgesamt: $b^\top y - c^\top x = \sum_{j=1}^{n} x_j z_j + \sum_{i=1}^{m} w_i y_i$, und $c^\top x = b^\top y \Leftrightarrow$ alle Produkte sind 0.

„$\Leftarrow$“: Sind alle Produkte 0, so ist $c^\top x = b^\top y$, und nach dem Korollar zur schwachen Dualität sind x, y optimal.

„$\Rightarrow$“: Sind x, y optimal, so gilt nach starker Dualität $c^\top x = \zeta^* = b^\top y$, also sind alle Produkte 0. $\square$

Komplementärer Schlupf: Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min\ & y_1 + 3y_2 \\ \text{s.t. } & y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & 4y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_2 \geq 3, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Komplementärer Schlupf: Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min\ & y_1 + 3y_2 \\ \text{s.t. } & y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & 4y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_2 \geq 3, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Simplex liefert die optimale Lösung $x^* = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{13}{4}\right)$ mit Wert $\zeta^* = 10$. Was ist y^*?

Komplementärer Schlupf: Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min\ & y_1 + 3y_2 \\ \text{s.t. } & y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & 4y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_2 \geq 3, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Simplex liefert die optimale Lösung $x^* = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{13}{4}\right)$ mit Wert $\zeta^* = 10$. Was ist y^*?
- $x_2^* > 0 \Rightarrow z_2 = 0$, also $4y_1 - y_2 = 1$. $x_3^* > 0 \Rightarrow z_3 = 0$, also $y_2 = 3$.

Komplementärer Schlupf: Beispiel

Primal

$$\begin{aligned} \max\ & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t. } & x_1 + 4x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\begin{aligned} \min\ & y_1 + 3y_2 \\ \text{s.t. } & y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & 4y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_2 \geq 3, \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Simplex liefert die optimale Lösung $x^* = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{13}{4}\right)$ mit Wert $\zeta^* = 10$. Was ist y^*?
- $x_2^* > 0 \Rightarrow z_2 = 0$, also $4y_1 - y_2 = 1$. $x_3^* > 0 \Rightarrow z_3 = 0$, also $y_2 = 3$.
- Lösen: $y^* = (1, 3)$. Dual zulässig ($y_1 + 3y_2 = 10 \geq 4$) mit Wert $1 + 3 \cdot 3 = 10 = \zeta^*$ – beide optimal!

Duale Lösung aus primaler Lösung

Duale Lösung aus primaler Lösung

- Gegeben: eine **nicht-degenerierte** optimale Basislösung

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \text{ mit Schlupf } w^* = (w_1^*, \ldots, w_m^*).$$

Duale Lösung aus primaler Lösung

- Gegeben: eine **nicht-degenerierte** optimale Basislösung

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \text{ mit Schlupf } w^* = (w_1^*, \ldots, w_m^*).$$

- Duale Nebenbedingungen als Gleichungen mit Schlupf:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - z_j = c_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Duale Lösung aus primaler Lösung

- Gegeben: eine **nicht-degenerierte** optimale Basislösung

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \text{ mit Schlupf } w^* = (w_1^*, \ldots, w_m^*).$$

- Duale Nebenbedingungen als Gleichungen mit Schlupf:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - z_j = c_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

- Das sind n Gleichungen mit $n + m$ Unbekannten $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$.

Duale Lösung aus primaler Lösung

- Gegeben: eine **nicht-degenerierte** optimale Basislösung

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \text{ mit Schlupf } w^* = (w_1^*, \ldots, w_m^*).$$

- Duale Nebenbedingungen als Gleichungen mit Schlupf:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - z_j = c_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

- Das sind n Gleichungen mit $n + m$ Unbekannten $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$.
- Komplementärer Schlupf: $x_j^* > 0 \Rightarrow z_j = 0$ und $w_i^* > 0 \Rightarrow y_i = 0$.

Duale Lösung aus primaler Lösung

- Gegeben: eine **nicht-degenerierte** optimale Basislösung

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \text{ mit Schlupf } w^* = (w_1^*, \ldots, w_m^*).$$

- Duale Nebenbedingungen als Gleichungen mit Schlupf:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - z_j = c_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

- Das sind n Gleichungen mit $n + m$ Unbekannten $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$.
- Komplementärer Schlupf: $x_j^* > 0 \Rightarrow z_j = 0$ und $w_i^* > 0 \Rightarrow y_i = 0$.
- Nicht-degeneriert: Alle m Basisvariablen sind > 0. Also sind m der Unbekannten bekannt (nämlich 0).

Duale Lösung aus primaler Lösung

- Gegeben: eine **nicht-degenerierte** optimale Basislösung

$$x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \text{ mit Schlupf } w^* = (w_1^*, \ldots, w_m^*).$$

- Duale Nebenbedingungen als Gleichungen mit Schlupf:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - z_j = c_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

- Das sind n Gleichungen mit $n + m$ Unbekannten $y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n$.
- Komplementärer Schlupf: $x_j^* > 0 \Rightarrow z_j = 0$ und $w_i^* > 0 \Rightarrow y_i = 0$.
- Nicht-degeneriert: Alle m Basisvariablen sind > 0. Also sind m der Unbekannten bekannt (nämlich 0).
- Es bleibt ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten!

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: duales LP, schwache und starke Dualität, duales Dictionary, komplementärer Schlupf

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: duales LP, schwache und starke Dualität, duales Dictionary, komplementärer Schlupf

- Nichtnegative Kombinationen der Nebenbedingungen liefern obere Schranken.

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: duales LP, schwache und starke Dualität, duales Dictionary, komplementärer Schlupf

- Nichtnegative Kombinationen der Nebenbedingungen liefern obere Schranken.
- Die Suche nach der besten solchen Schranke ist das duale LP.

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: duales LP, schwache und starke Dualität, duales Dictionary, komplementärer Schlupf

- Nichtnegative Kombinationen der Nebenbedingungen liefern obere Schranken.
- Die Suche nach der besten solchen Schranke ist das duale LP.
- Schwache Dualität: $c^\top x \leq b^\top y$ für alle zulässigen x, y (Einzeiler, beliebte Prüfungsfrage).

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: duales LP, schwache und starke Dualität, duales Dictionary, komplementärer Schlupf

- Nichtnegative Kombinationen der Nebenbedingungen liefern obere Schranken.
- Die Suche nach der besten solchen Schranke ist das duale LP.
- Schwache Dualität: $c^\top x \leq b^\top y$ für alle zulässigen x, y (Einzeiler, beliebte Prüfungsfrage).
- Starke Dualität: Optimale Werte stimmen überein; y^* steht im optimalen primalen Dictionary.

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: duales LP, schwache und starke Dualität, duales Dictionary, komplementärer Schlupf

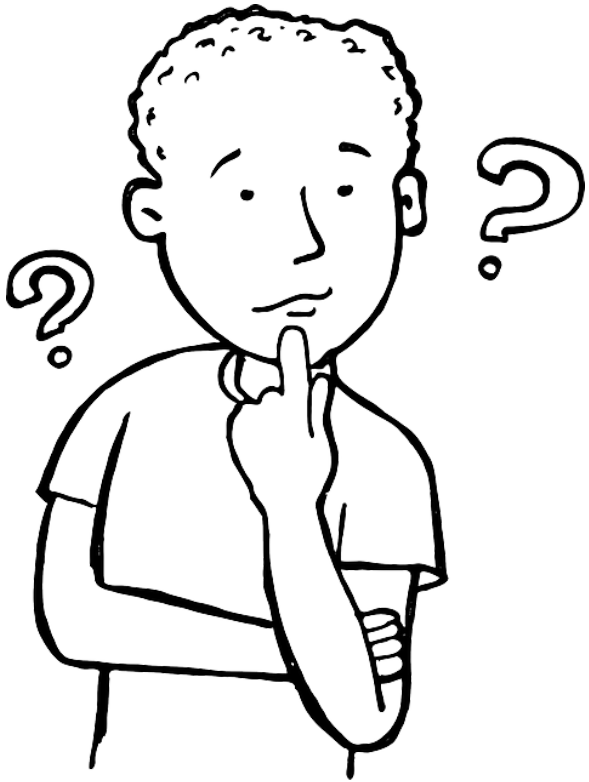
- Nichtnegative Kombinationen der Nebenbedingungen liefern obere Schranken.
- Die Suche nach der besten solchen Schranke ist das duale LP.
- Schwache Dualität: $c^\top x \leq b^\top y$ für alle zulässigen x, y (Einzeiler, beliebte Prüfungsfrage).
- Starke Dualität: Optimale Werte stimmen überein; y^* steht im optimalen primalen Dictionary.
- Das duale Dictionary ist stets das negativ Transponierte des primalen.

Zusammenfassung

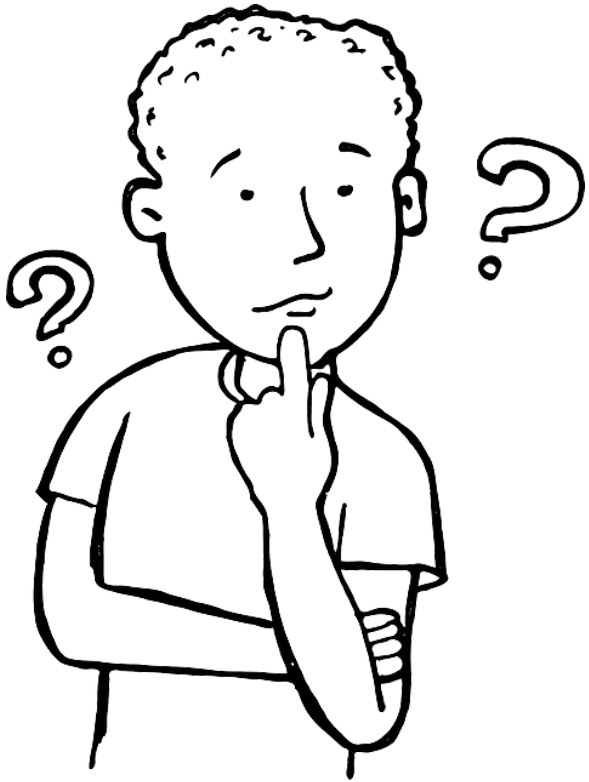
Wichtige Begriffe: duales LP, schwache und starke Dualität, duales Dictionary, komplementärer Schlupf

- Nichtnegative Kombinationen der Nebenbedingungen liefern obere Schranken.
- Die Suche nach der besten solchen Schranke ist das duale LP.
- Schwache Dualität: $c^\top x \leq b^\top y$ für alle zulässigen x, y (Einzeiler, beliebte Prüfungsfrage).
- Starke Dualität: Optimale Werte stimmen überein; y^* steht im optimalen primalen Dictionary.
- Das duale Dictionary ist stets das negativ Transponierte des primalen.
- Komplementärer Schlupf: $x_j z_j = 0$ und $w_i y_i = 0$ charakterisieren Optimalität.

Nächste Woche

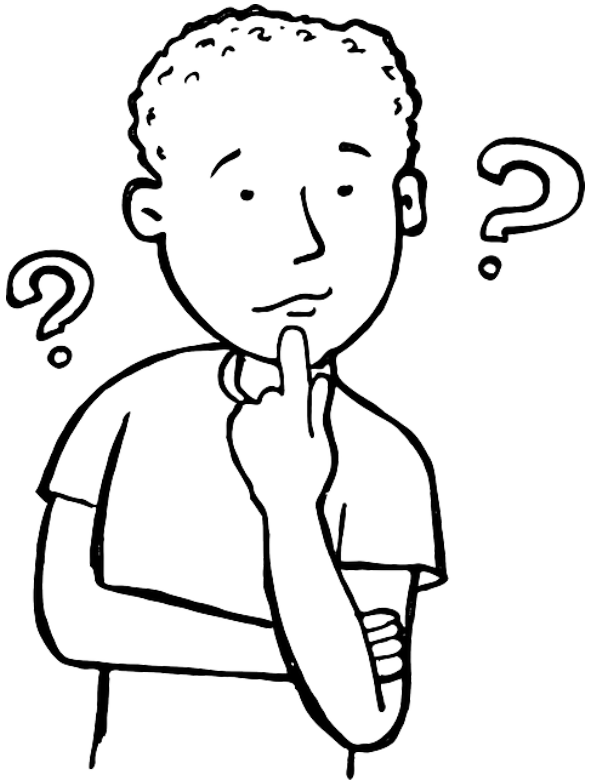


Nächste Woche



- Pivotieren im primalen Dictionary $=$ Pivotieren im dualen Dictionary.

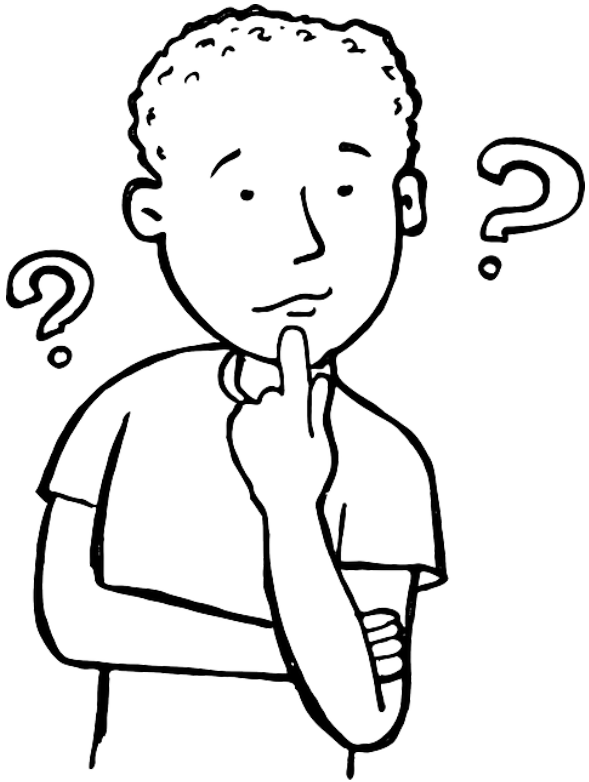
Nächste Woche



- Pivotieren im primalen Dictionary $=$

  Pivotieren im dualen Dictionary.
- Simplex-Algorithmus direkt auf dem dualen LP durchführen?

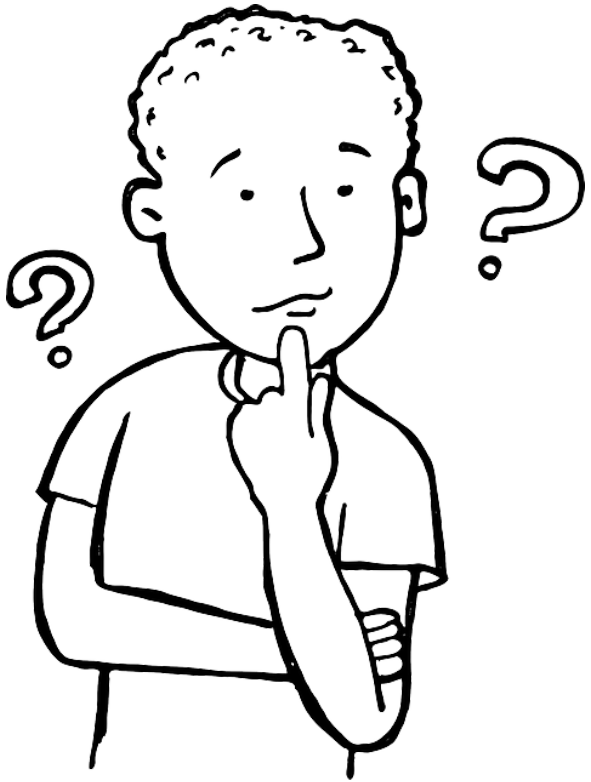
Nächste Woche



- Pivotieren im primalen Dictionary $=$

  Pivotieren im dualen Dictionary.
- Simplex-Algorithmus direkt auf dem dualen LP durchführen?
- Wie viel Arbeit macht das?

Nächste Woche

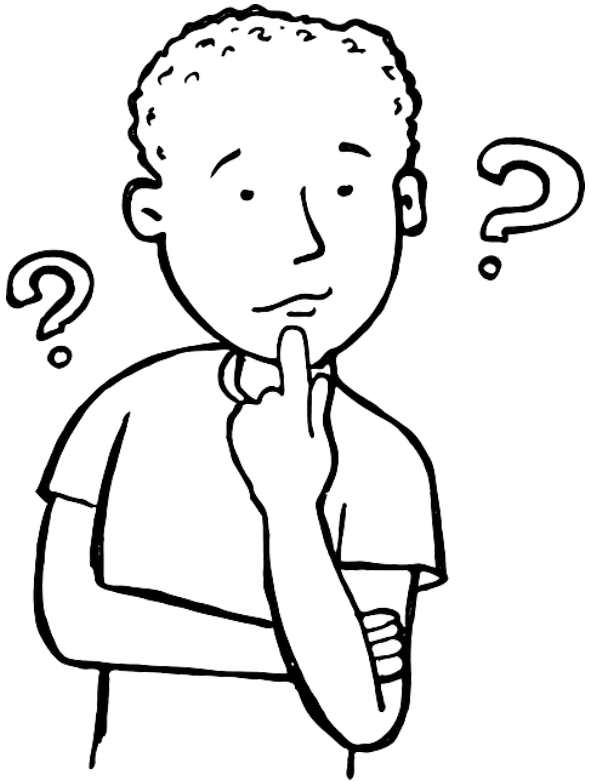


- Pivotieren im primalen Dictionary $=$

  Pivotieren im dualen Dictionary.
- Simplex-Algorithmus direkt auf dem dualen LP durchführen?
- Wie viel Arbeit macht das?

  $\Rightarrow$ **Dualer Simplex-Algorithmus**

Nächste Woche



- Pivotieren im primalen Dictionary $=$

  Pivotieren im dualen Dictionary.
- Simplex-Algorithmus direkt auf dem dualen LP durchführen?
- Wie viel Arbeit macht das?

  $\Rightarrow$ **Dualer Simplex-Algorithmus**
- Dualisierungsregeln ohne Standardform?