

Technische Universität Braunschweig

Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Algorithmik

Mathematische Methoden der Algorithmik
Terminierung und Laufzeit des Simplex-Algorithmus

Wintersemester 2026/27

Letzte Woche: Simplex auf Dictionaries

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0$$

Entering variable mit $\bar{c}_j > 0$, *leaving variable* per Quotiententest, Basistausch – bis alle $\bar{c}_j \leq 0$.

eintretende Variable

austretende Variable

Letzte Woche: Simplex auf Dictionaries

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0$$

Entering variable mit $\bar{c}_j > 0$, *leaving variable* per Quotiententest, Basistausch – bis alle $\bar{c}_j \leq 0$.

eintretende Variable

austretende Variable

Letzte Woche: Simplex auf Dictionaries

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{5}{2} \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 && w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{11}{4} \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 && w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{8}{3}
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0$$

Entering variable mit $\bar{c}_j > 0$, *leaving variable* per Quotiententest, Basistausch – bis alle $\bar{c}_j \leq 0$.

eintretende Variable — austretende Variable

Letzte Woche: Simplex auf Dictionaries

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{5}{2} \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 && w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{11}{4} \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 && w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{8}{3}
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0$$

Entering variable mit $\bar{c}_j > 0$, *leaving variable* per Quotiententest, Basistausch – bis alle $\bar{c}_j \leq 0$.

eintretende Variable — austretende Variable

Letzte Woche: Simplex auf Dictionaries

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{25}{2} - \tfrac{5}{2}w_1 - \tfrac{7}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \\
\hline
x_1 &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}w_1 - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
w_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}w_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}$$

Entering variable mit $\bar{c}_j > 0$, *leaving variable* per Quotiententest, Basistausch – bis alle $\bar{c}_j \leq 0$.

eintretende Variable — austretende Variable

Letzte Woche: Simplex auf Dictionaries

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{25}{2} - \tfrac{5}{2}w_1 - \tfrac{7}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \\
\hline
x_1 &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}w_1 - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
w_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}w_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}$$

Entering variable mit $\bar{c}_j > 0$, *leaving variable* per Quotiententest, Basistausch – bis alle $\bar{c}_j \leq 0$.

eintretende Variable — austretende Variable

Letzte Woche: Simplex auf Dictionaries

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{25}{2} - \tfrac{5}{2}w_1 - \tfrac{7}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \\
\hline
x_1 &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}w_1 - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 \qquad x_1 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 5 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \qquad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \infty \\
w_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}w_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 \qquad w_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 1
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}$$

Entering variable mit $\bar{c}_j > 0$, *leaving variable* per Quotiententest, Basistausch – bis alle $\bar{c}_j \leq 0$.

eintretende Variable — austretende Variable

Letzte Woche: Simplex auf Dictionaries

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \tfrac{25}{2} - \tfrac{5}{2}w_1 - \tfrac{7}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \\
x_1 &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}w_1 - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 \qquad x_1 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 5 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \qquad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \infty \\
w_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}w_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 \qquad w_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 1
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}$$

Entering variable mit $\bar{c}_j > 0$, *leaving variable* per Quotiententest, Basistausch – bis alle $\bar{c}_j \leq 0$.

eintretende Variable — austretende Variable

Letzte Woche: Simplex auf Dictionaries

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \zeta = 13$$

Entering variable mit $\bar{c}_j > 0$, *leaving variable* per Quotiententest, Basistausch – bis alle $\bar{c}_j \leq 0$.

eintretende Variable

austretende Variable

Letzte Woche: Simplex auf Dictionaries

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}
$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \zeta = 13$$

Entering variable mit $\bar{c}_j > 0$, *leaving variable* per Quotiententest, Basistausch – bis alle $\bar{c}_j \leq 0$.

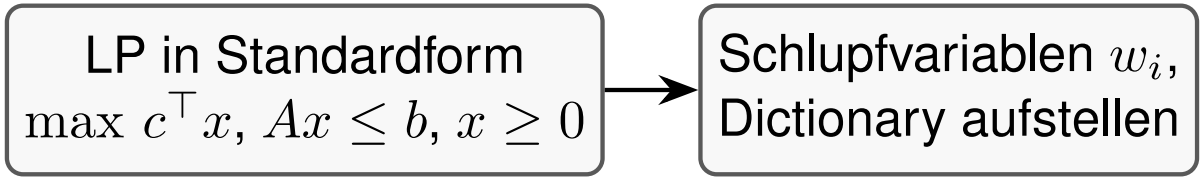
eintretende Variable — austretende Variable

Letzte Woche: Simplex-Algorithmus

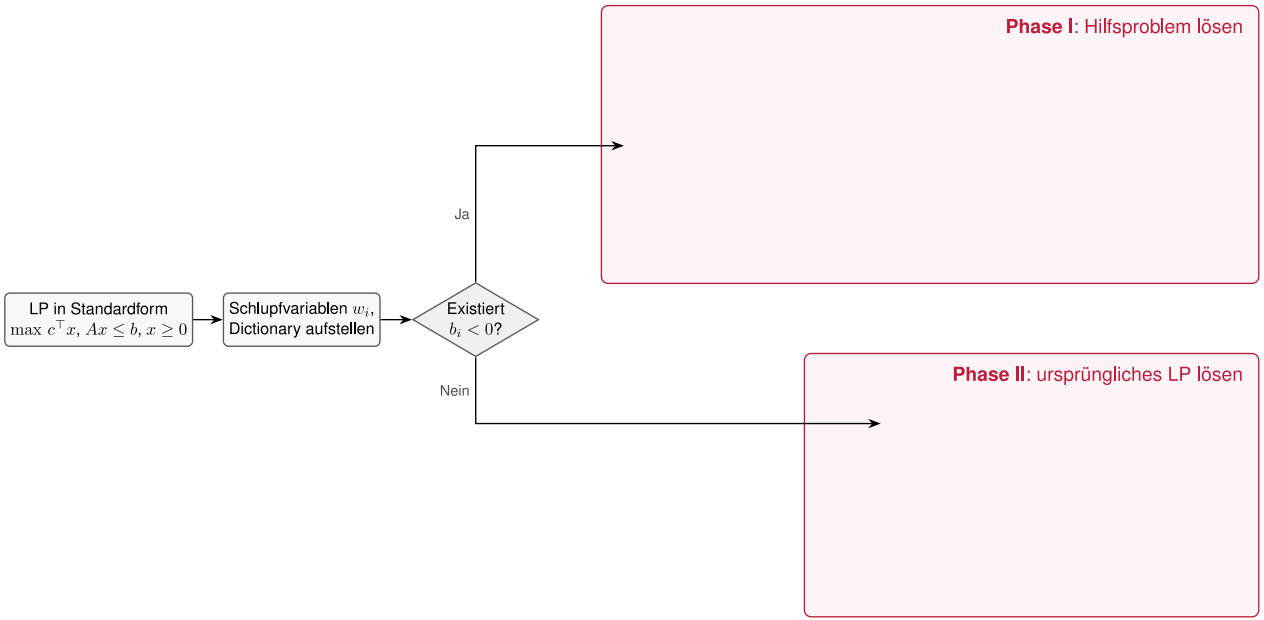
LP in Standardform

$$\max\ c^\top x,\ Ax \leq b,\ x \geq 0$$

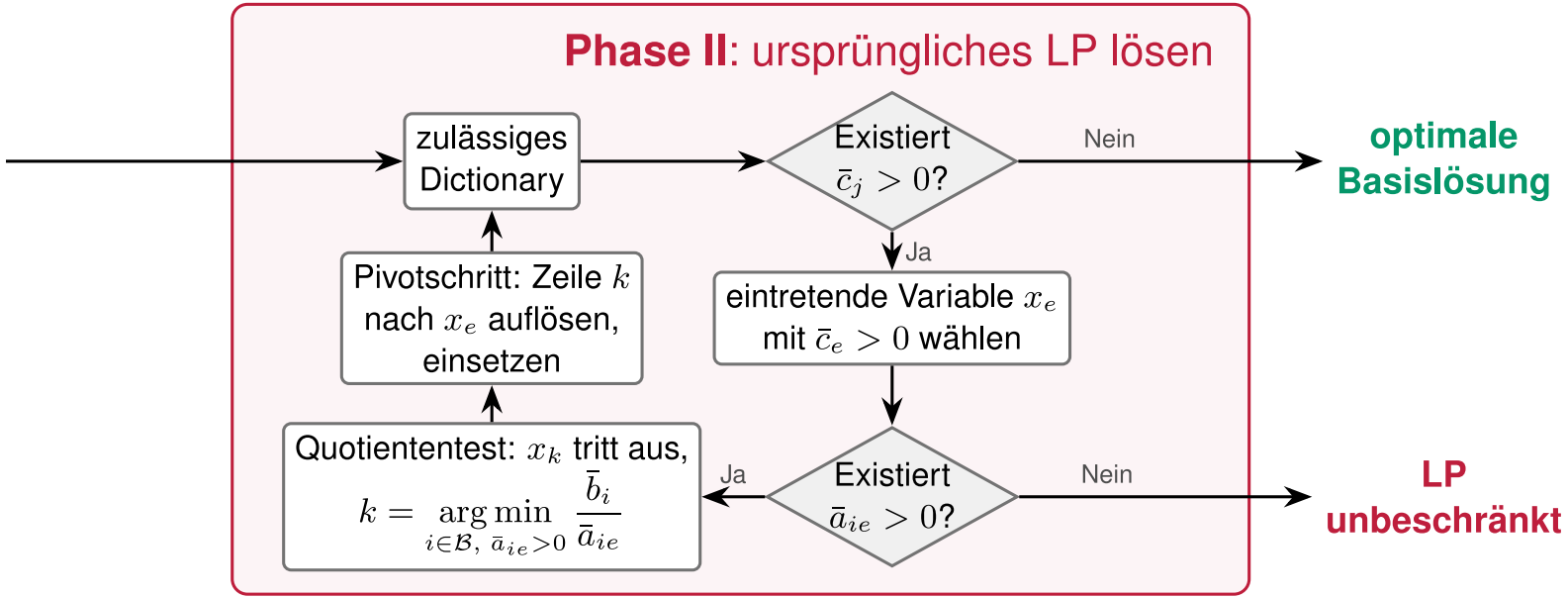
Letzte Woche: Simplex-Algorithmus



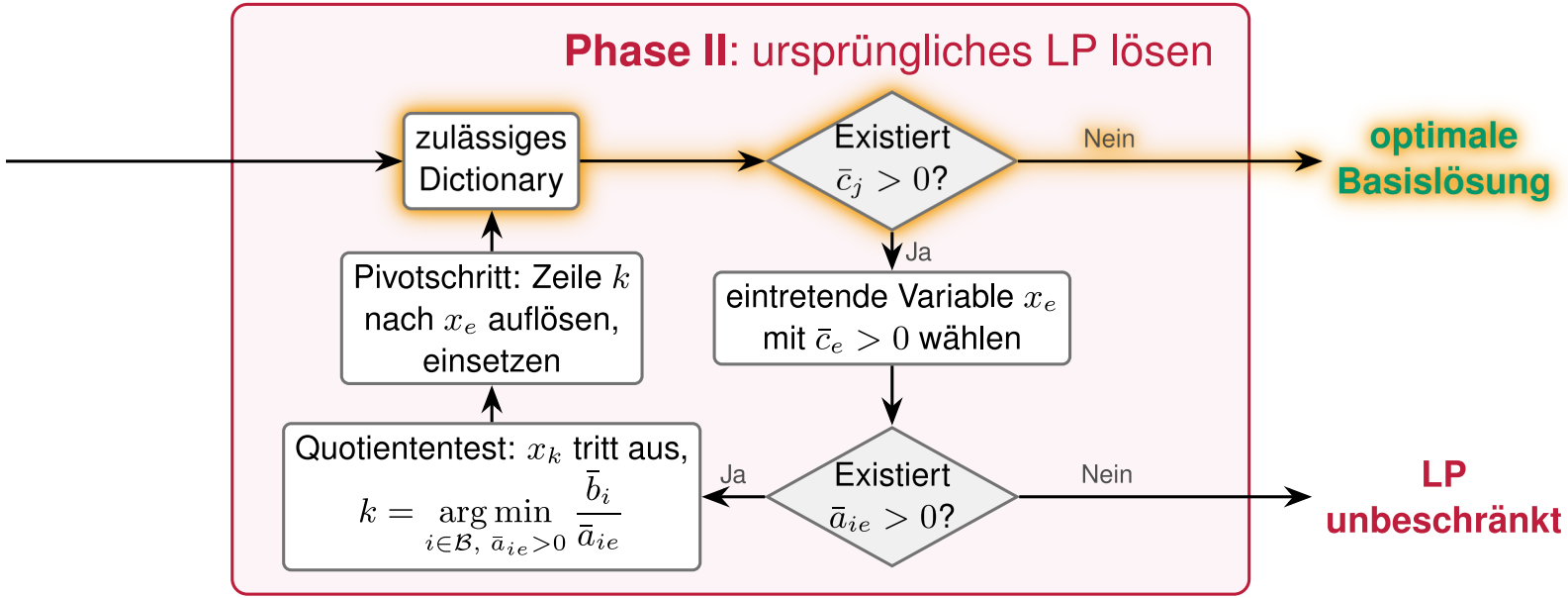
Letzte Woche: Simplex-Algorithmus



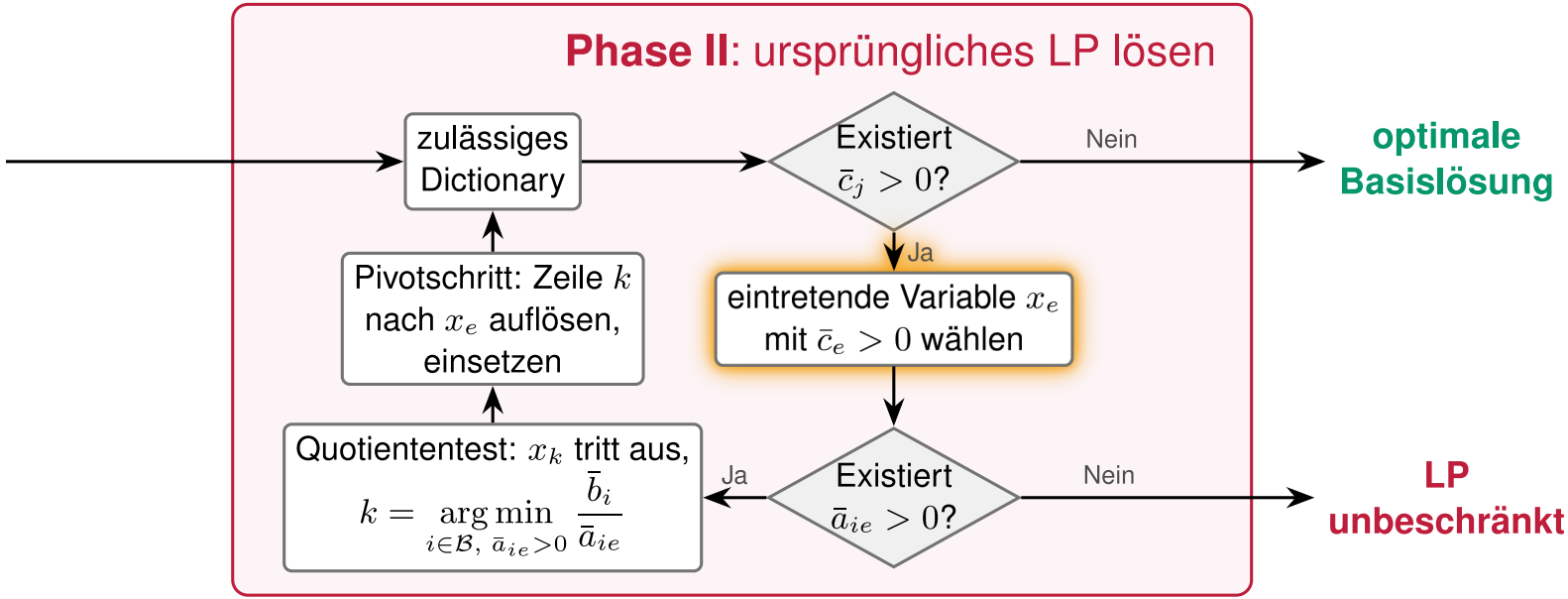
Letzte Woche: Simplex-Algorithmus



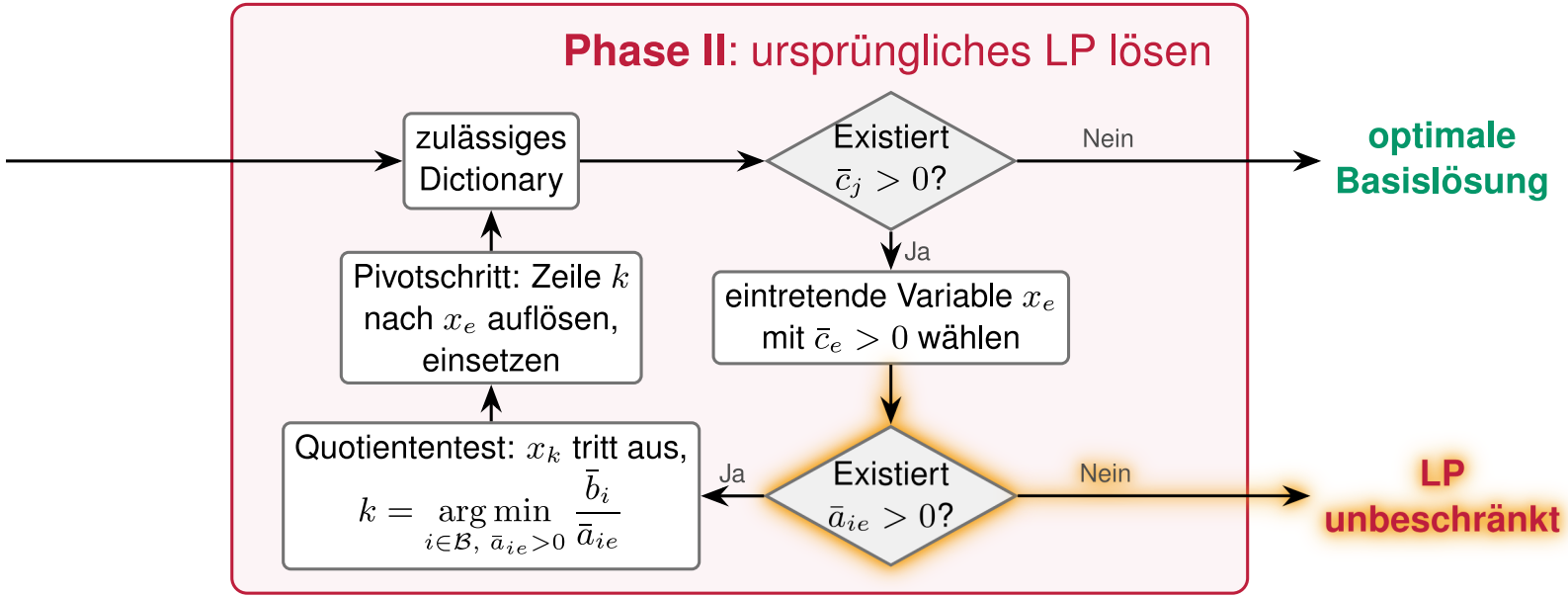
Letzte Woche: Simplex-Algorithmus



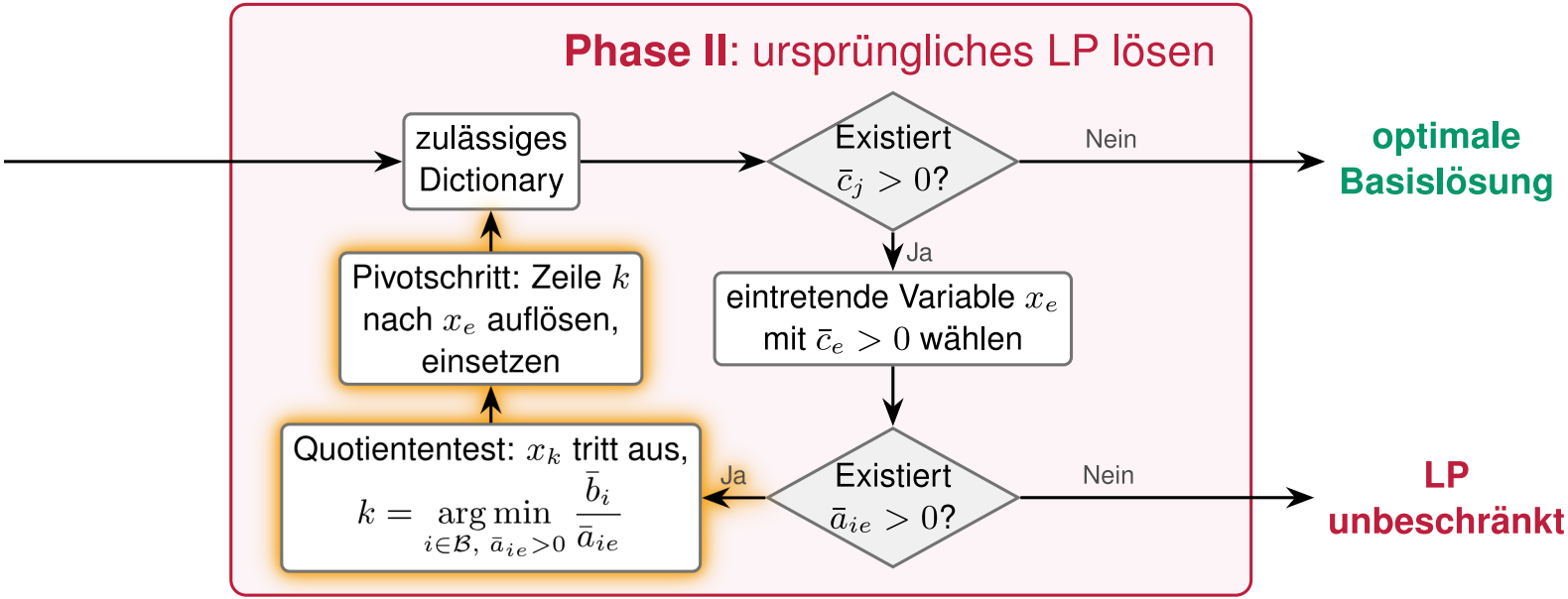
Letzte Woche: Simplex-Algorithmus



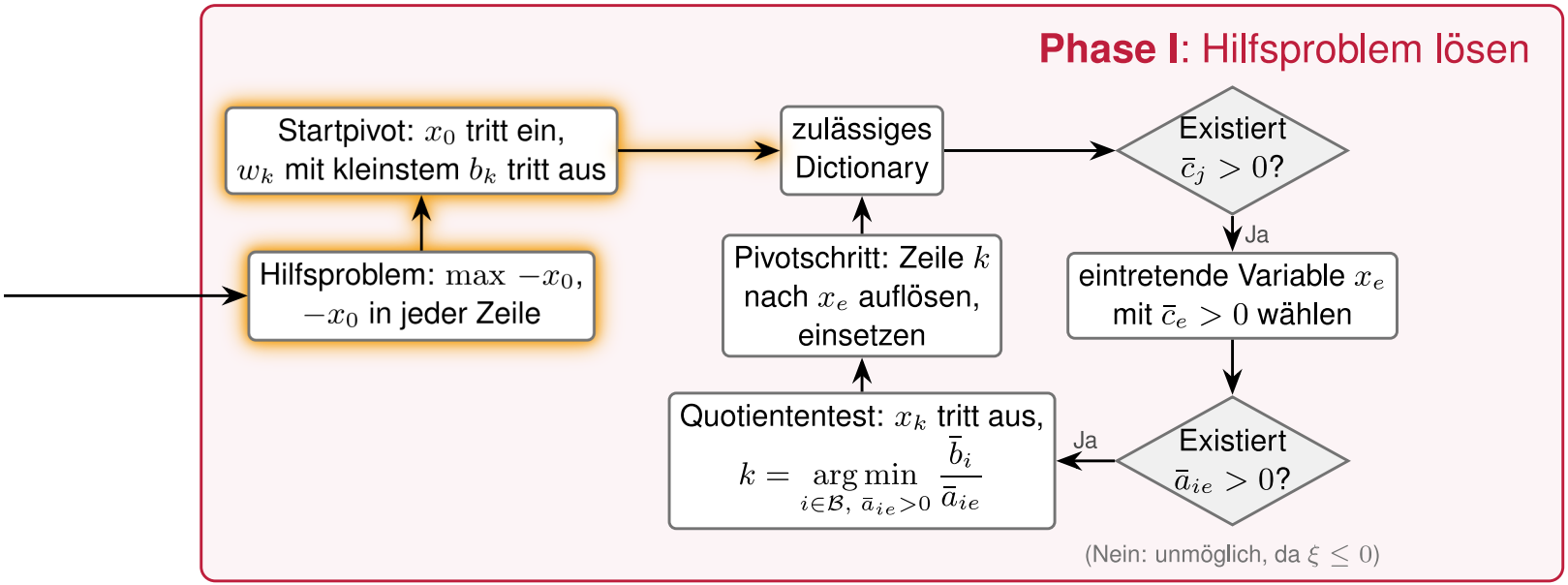
Letzte Woche: Simplex-Algorithmus



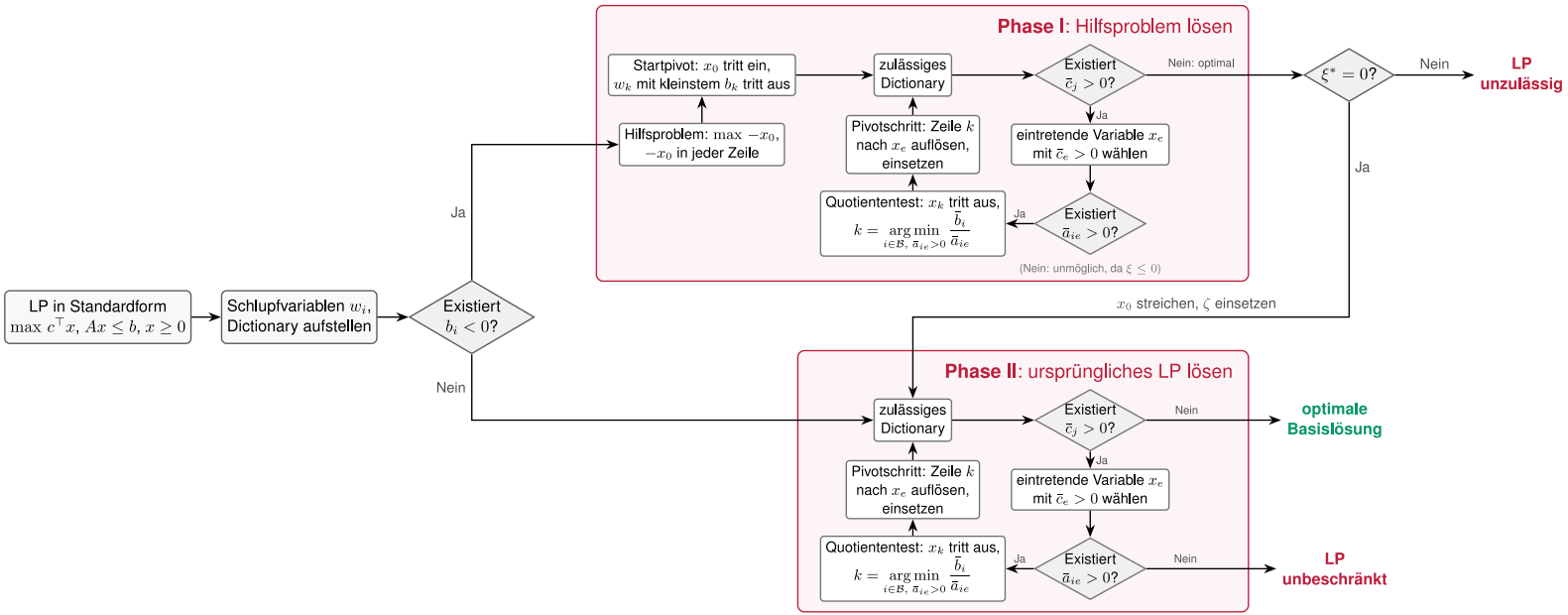
Letzte Woche: Simplex-Algorithmus



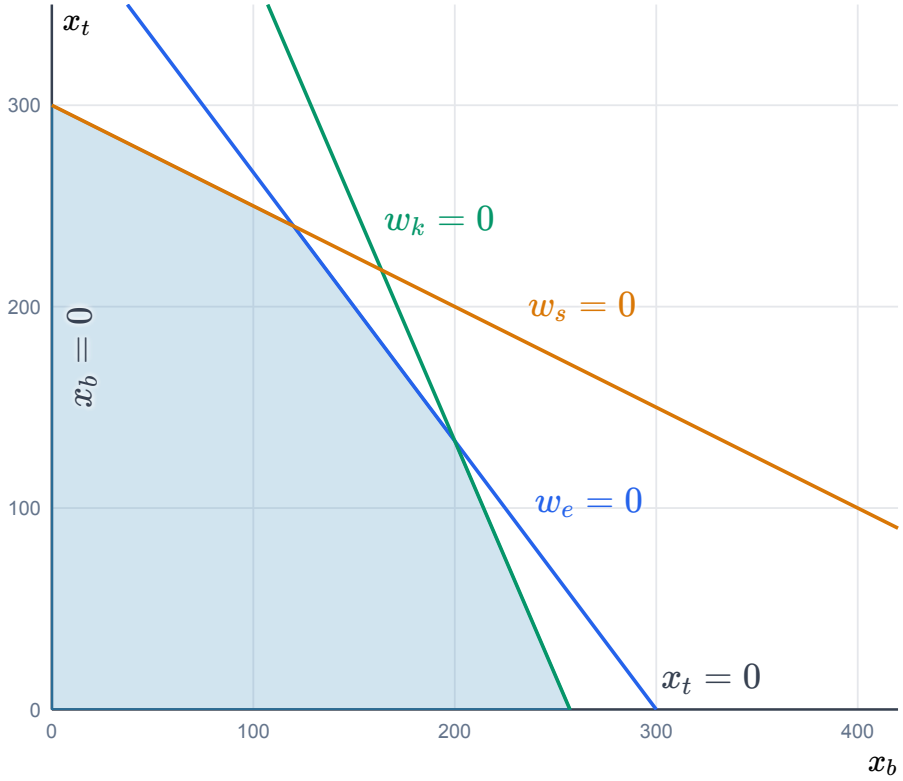
Letzte Woche: Simplex-Algorithmus



Letzte Woche: Simplex-Algorithmus



Letzte Woche: Geometrie

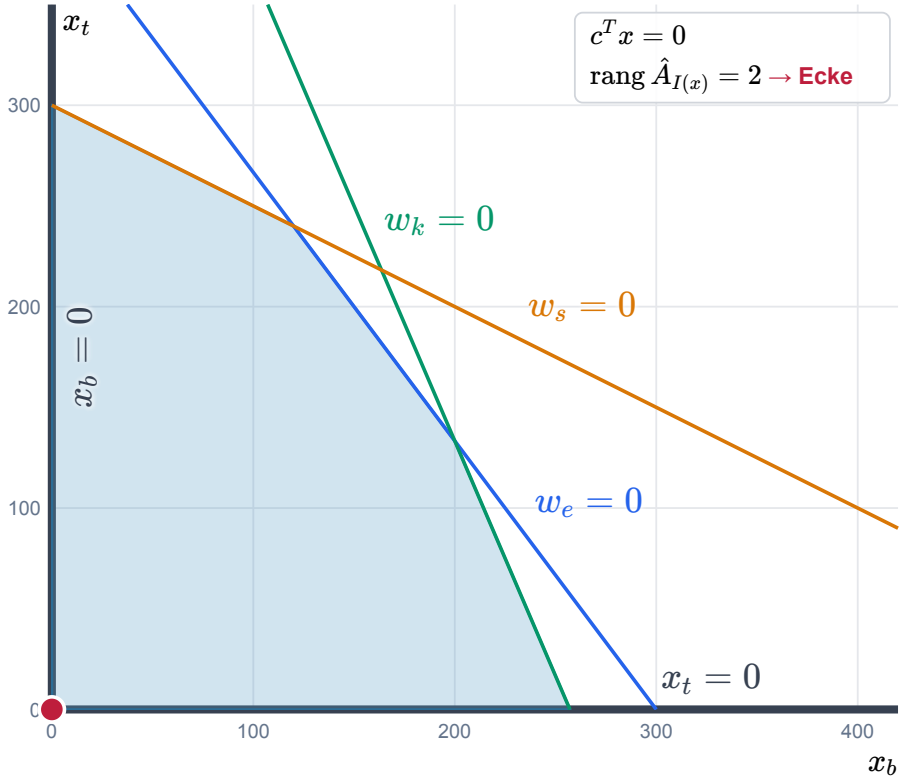


- Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung
- $\hat{b} - \hat{A}x = \binom{w}{x}$
- Nichtbasisvariablen $= 0$:

  Lösung liegt auf diesen n Ebenen
- Basislösungen $=$ Ecken von $\mathbb{L}(P)$
- Pivotschritt: Tausche $x_k \in \mathcal{N} \leftrightarrow x_e \in \mathcal{N}$
- Sonst bleibt $\mathcal{N}$ erhalten; laufen

  auf $n - 1$ Ebenen von $x_k = 0$ zu $x_e = 0$
- Von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke

Letzte Woche: Geometrie

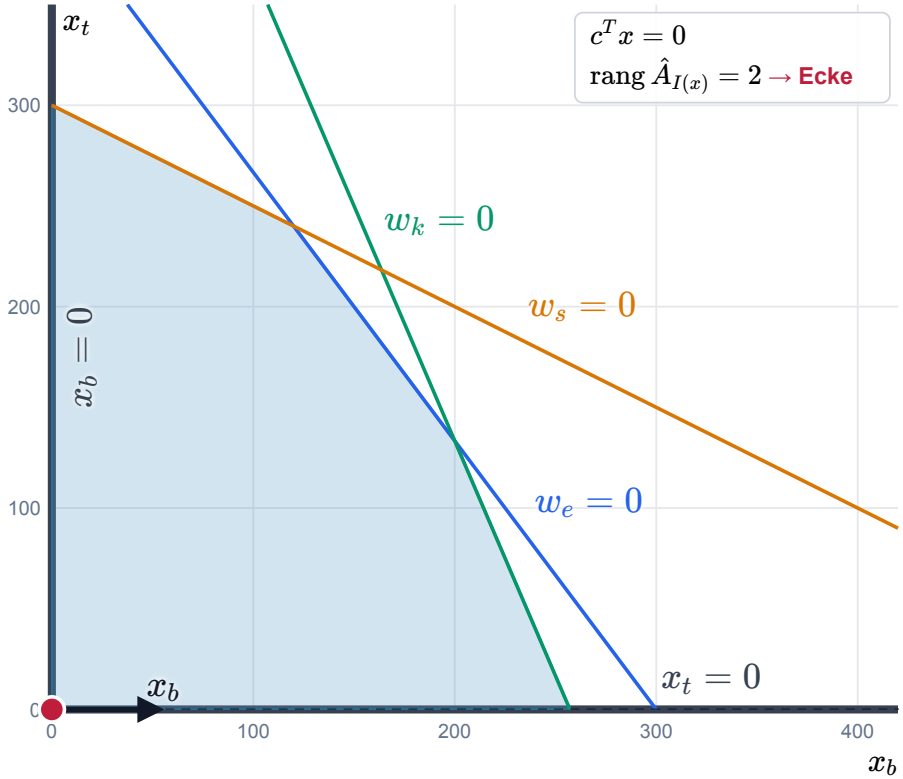


- Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung
- $\hat{b} - \hat{A}x = \binom{w}{x}$
- Nichtbasisvariablen $= 0$:

  Lösung liegt auf diesen n Ebenen
- Basislösungen $=$ Ecken von $\mathbb{L}(P)$
- Pivotschritt: Tausche $x_k \in \mathcal{N} \leftrightarrow x_e \in \mathcal{N}$
- Sonst bleibt $\mathcal{N}$ erhalten; laufen

  auf $n - 1$ Ebenen von $x_k = 0$ zu $x_e = 0$
- Von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke

Letzte Woche: Geometrie

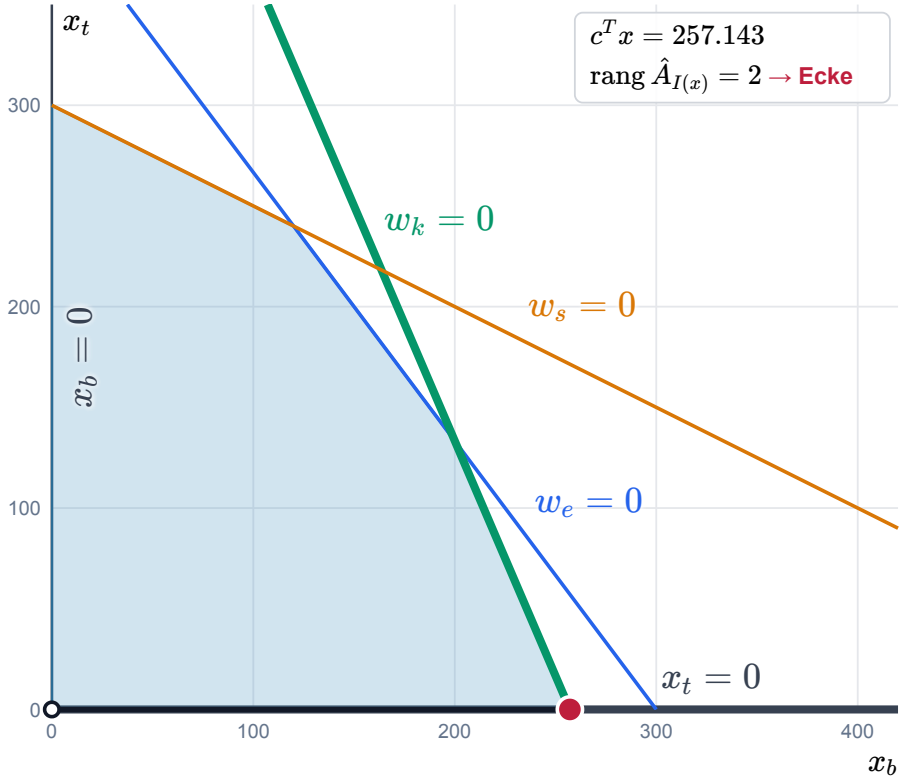


- Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung
- $\hat{b} - \hat{A}x = \binom{w}{x}$
- Nichtbasisvariablen $= 0$:

  Lösung liegt auf diesen n Ebenen
- Basislösungen $=$ Ecken von $\mathbb{L}(P)$
- Pivotschritt: Tausche $x_k \in \mathcal{N} \leftrightarrow x_e \in \mathcal{N}$
- Sonst bleibt $\mathcal{N}$ erhalten; laufen

  auf $n - 1$ Ebenen von $x_k = 0$ zu $x_e = 0$
- Von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke

Letzte Woche: Geometrie

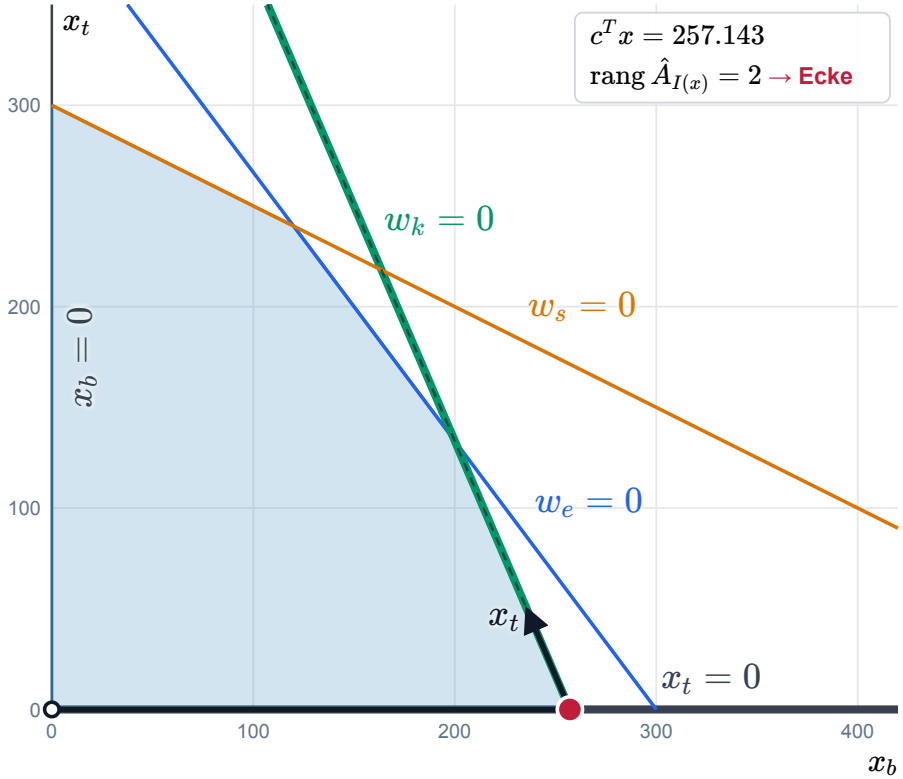


- Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung
- $\hat{b} - \hat{A}x = \binom{w}{x}$
- Nichtbasisvariablen $= 0$:

  Lösung liegt auf diesen n Ebenen
- Basislösungen $=$ Ecken von $\mathbb{L}(P)$
- Pivotschritt: Tausche $x_k \in \mathcal{N} \leftrightarrow x_e \in \mathcal{N}$
- Sonst bleibt $\mathcal{N}$ erhalten; laufen

  auf $n - 1$ Ebenen von $x_k = 0$ zu $x_e = 0$
- Von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke

Letzte Woche: Geometrie

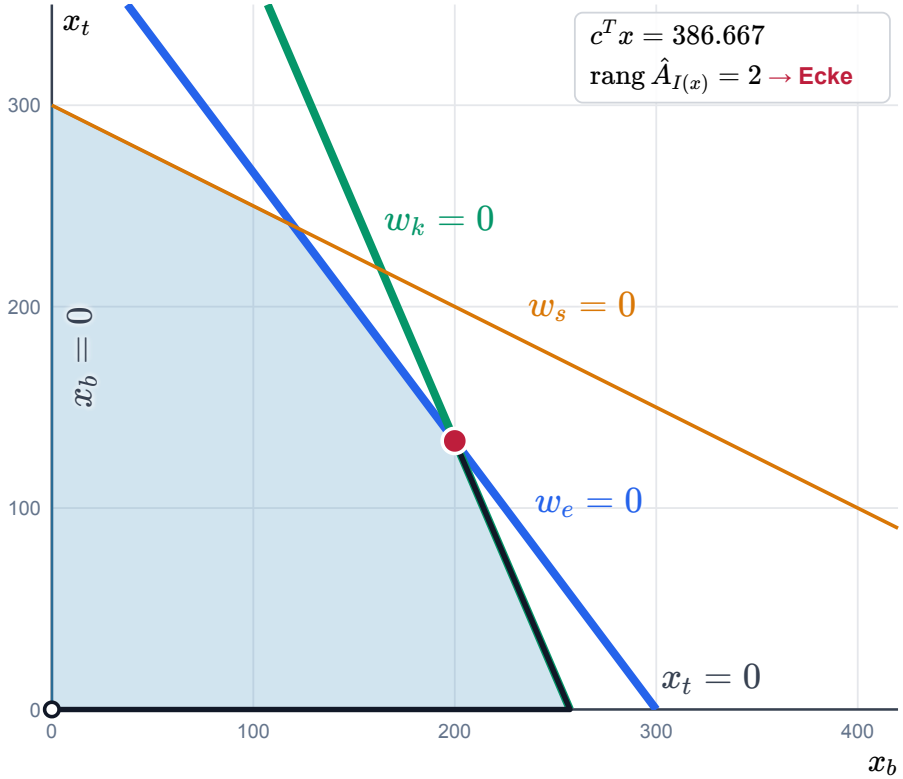


- Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung
- $\hat{b} - \hat{A}x = \binom{w}{x}$
- Nichtbasisvariablen $= 0$:

  Lösung liegt auf diesen n Ebenen
- Basislösungen $=$ Ecken von $\mathbb{L}(P)$
- Pivotschritt: Tausche $x_k \in \mathcal{N} \leftrightarrow x_e \in \mathcal{N}$
- Sonst bleibt $\mathcal{N}$ erhalten; laufen

  auf $n - 1$ Ebenen von $x_k = 0$ zu $x_e = 0$
- Von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke

Letzte Woche: Geometrie

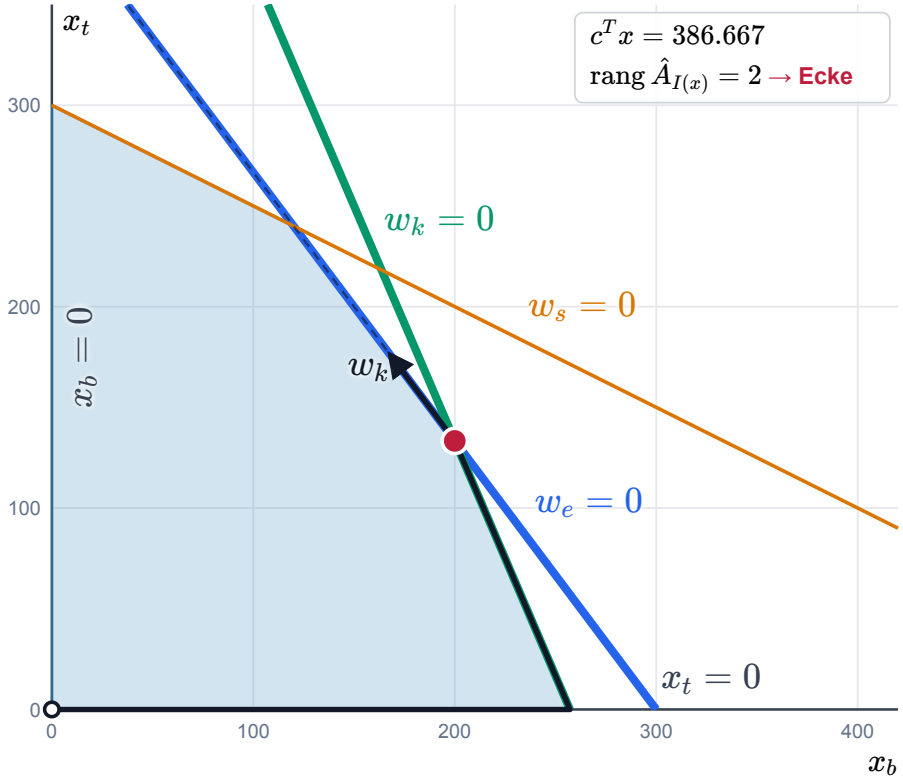


- Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung
- $\hat{b} - \hat{A}x = \binom{w}{x}$
- Nichtbasisvariablen $= 0$:

  Lösung liegt auf diesen n Ebenen
- Basislösungen $=$ Ecken von $\mathbb{L}(P)$
- Pivotschritt: Tausche $x_k \in \mathcal{N} \leftrightarrow x_e \in \mathcal{N}$
- Sonst bleibt $\mathcal{N}$ erhalten; laufen

  auf $n - 1$ Ebenen von $x_k = 0$ zu $x_e = 0$
- Von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke

Letzte Woche: Geometrie

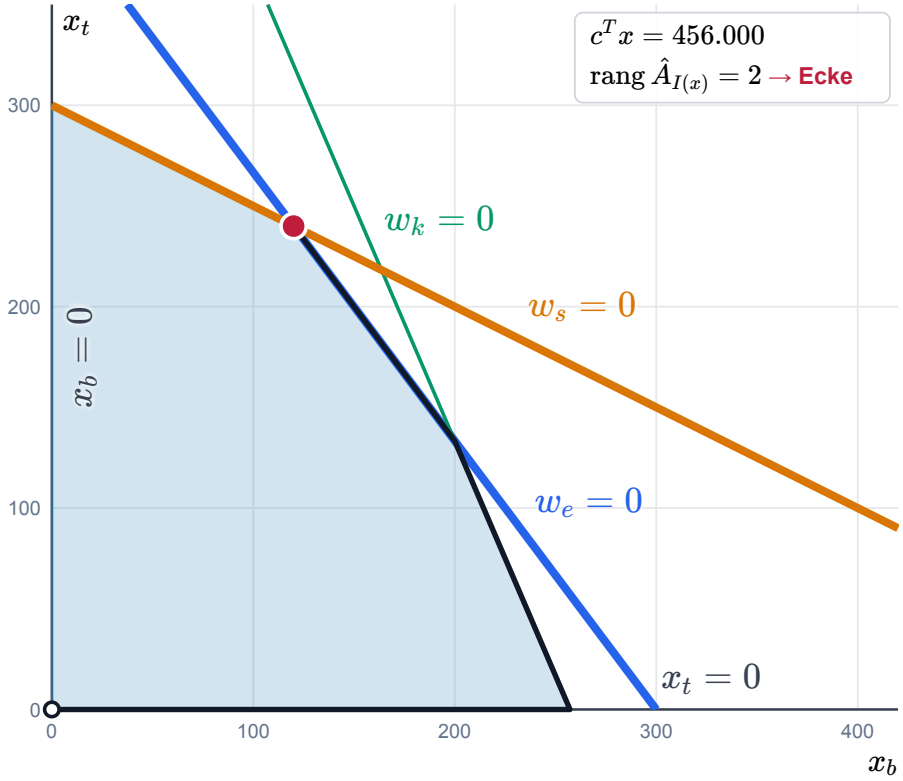


- Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung
- $\hat{b} - \hat{A}x = \binom{w}{x}$
- Nichtbasisvariablen $= 0$:

  Lösung liegt auf diesen n Ebenen
- Basislösungen $=$ Ecken von $\mathbb{L}(P)$
- Pivotschritt: Tausche $x_k \in \mathcal{N} \leftrightarrow x_e \in \mathcal{N}$
- Sonst bleibt $\mathcal{N}$ erhalten; laufen

  auf $n - 1$ Ebenen von $x_k = 0$ zu $x_e = 0$
- Von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke

Letzte Woche: Geometrie



- Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung
- $\hat{b} - \hat{A}x = \binom{w}{x}$
- Nichtbasisvariablen $= 0$:

  Lösung liegt auf diesen n Ebenen
- Basislösungen $=$ Ecken von $\mathbb{L}(P)$
- Pivotschritt: Tausche $x_k \in \mathcal{N} \leftrightarrow x_e \in \mathcal{N}$
- Sonst bleibt $\mathcal{N}$ erhalten; laufen

  auf $n - 1$ Ebenen von $x_k = 0$ zu $x_e = 0$
- Von einer Ecke zu einer benachbarten Ecke

Offene Fragen

Offene Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

Offene Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

Offene Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Offene Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Bisher wissen wir: Der Algorithmus ist korrekt … *wenn* er terminiert.

Offene Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Bisher wissen wir: Der Algorithmus ist korrekt … *wenn* er terminiert.

Heute:

Offene Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Bisher wissen wir: Der Algorithmus ist korrekt … *wenn* er terminiert.

Heute:

- Terminiert der Simplex-Algorithmus immer? Falls nicht – was können wir tun?

Offene Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Bisher wissen wir: Der Algorithmus ist korrekt … *wenn* er terminiert.

Heute:

- Terminiert der Simplex-Algorithmus immer? Falls nicht – was können wir tun?
- Wie hängen (a) und (b) mit der Terminierung zusammen? *Pivotregeln*

Offene Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Bisher wissen wir: Der Algorithmus ist korrekt … *wenn* er terminiert.

Heute:

- Terminiert der Simplex-Algorithmus immer? Falls nicht – was können wir tun?
- Wie hängen (a) und (b) mit der Terminierung zusammen? *Pivotregeln*
- Wie lange dauert es? Wie viele Pivotschritte braucht Simplex im schlimmsten Fall?

Degeneriertheit und Zykeln

Degenerierte Dictionaries

Definition (degeneriert)

Ein Dictionary heißt **degeneriert**, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Pivotschritt heißt **degeneriert**, wenn die Schranke im Quotiententest 0 ist, also $\bar{b}_k = 0$ für die austretende Variable x_k.

$$\begin{aligned} \zeta &= x_1 + 2x_2 \\ \hline w_1 &= 0 + x_1 - x_2 \\ w_2 &= 4 - x_1 - x_2 \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 4), \quad \zeta = 0$$

Degenerierte Dictionaries

Definition (degeneriert)

Ein Dictionary heißt **degeneriert**, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Pivotschritt heißt **degeneriert**, wenn die Schranke im Quotiententest 0 ist, also $\bar{b}_k = 0$ für die austretende Variable x_k.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & x_1 &+ 2x_2 \\
\hline
w_1 &= 0 &+ x_1 &- x_2 \\
w_2 &= 4 &- x_1 &- x_2
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 4), \quad \zeta = 0$$

Degenerierte Dictionaries

Definition (degeneriert)

Ein Dictionary heißt **degeneriert**, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Pivotschritt heißt **degeneriert**, wenn die Schranke im Quotiententest 0 ist, also $\bar{b}_k = 0$ für die austretende Variable x_k.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & x_1 &+ 2x_2 \\
\hline
w_1 &= 0 + x_1 - x_2 & & \quad w_1 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 0 \\
w_2 &= 4 - x_1 - x_2 & & \quad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 4
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 4), \quad \zeta = 0$$

Degenerierte Dictionaries

Definition (degeneriert)

Ein Dictionary heißt **degeneriert**, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Pivotschritt heißt **degeneriert**, wenn die Schranke im Quotiententest 0 ist, also $\bar{b}_k = 0$ für die austretende Variable x_k.

$$\begin{aligned} \zeta &= x_1 + 2x_2 \\ \hline w_1 &= 0 + x_1 - x_2 \qquad w_1 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 0 \\ w_2 &= 4 - x_1 - x_2 \qquad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 4), \quad \zeta = 0$$

Degenerierte Dictionaries

Definition (degeneriert)

Ein Dictionary heißt **degeneriert**, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Pivotschritt heißt **degeneriert**, wenn die Schranke im Quotiententest 0 ist, also $\bar{b}_k = 0$ für die austretende Variable x_k.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 3x_1 - 2w_1 \\
\hline
x_2 &= 0 + x_1 - w_1 \\
w_2 &= 4 - 2x_1 + w_1
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 4), \quad \zeta = 0$$

Degenerierter Pivot: **Basis** ändert sich, **Basislösung** und ζ bleiben gleich.

Degenerierte Dictionaries

Definition (degeneriert)

Ein Dictionary heißt **degeneriert**, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Pivotschritt heißt **degeneriert**, wenn die Schranke im Quotiententest 0 ist, also $\bar{b}_k = 0$ für die austretende Variable x_k.

$$\begin{aligned} \zeta &= & 3x_1 &- 2w_1 \\ \hline x_2 &= 0 + x_1 - w_1 \\ w_2 &= 4 - 2x_1 + w_1 \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 4), \quad \zeta = 0$$

Degenerierter Pivot: **Basis** ändert sich, **Basislösung** und ζ bleiben gleich.

Degenerierte Dictionaries

Definition (degeneriert)

Ein Dictionary heißt **degeneriert**, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Pivotschritt heißt **degeneriert**, wenn die Schranke im Quotiententest 0 ist, also $\bar{b}_k = 0$ für die austretende Variable x_k.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & & 3x_1 & - & 2w_1 \\
\hline
x_2 &= 0 & + & x_1 & - & w_1 \qquad x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
w_2 &= 4 & - & 2x_1 & + & w_1 \qquad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 4), \quad \zeta = 0$$

Degenerierter Pivot: **Basis** ändert sich, **Basislösung** und ζ bleiben gleich.

Degenerierte Dictionaries

Definition (degeneriert)

Ein Dictionary heißt **degeneriert**, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Pivotschritt heißt **degeneriert**, wenn die Schranke im Quotiententest 0 ist, also $\bar{b}_k = 0$ für die austretende Variable x_k.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & & 3x_1 & - & 2w_1 \\
\hline
x_2 &= 0 & + & x_1 & - & w_1 \qquad x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
w_2 &= 4 & - & 2x_1 & + & w_1 \qquad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (0, 0, 0, 4), \quad \zeta = 0$$

Degenerierter Pivot: **Basis** ändert sich, **Basislösung** und ζ bleiben gleich.

Degenerierte Dictionaries

Definition (degeneriert)

Ein Dictionary heißt **degeneriert**, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Pivotschritt heißt **degeneriert**, wenn die Schranke im Quotiententest 0 ist, also $\bar{b}_k = 0$ für die austretende Variable x_k.

$$\begin{aligned} \zeta &= 6 - \tfrac{3}{2}w_2 - \tfrac{1}{2}w_1 \\ \hline x_2 &= 2 - \tfrac{1}{2}w_2 - \tfrac{1}{2}w_1 \\ x_1 &= 2 - \tfrac{1}{2}w_2 + \tfrac{1}{2}w_1 \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (2, 2, 0, 0), \quad \zeta = 6$$

Degenerierter Pivot: **Basis** ändert sich, **Basislösung** und ζ bleiben gleich.

Degenerierte Dictionaries

Definition (degeneriert)

Ein Dictionary heißt **degeneriert**, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Pivotschritt heißt **degeneriert**, wenn die Schranke im Quotiententest 0 ist, also $\bar{b}_k = 0$ für die austretende Variable x_k.

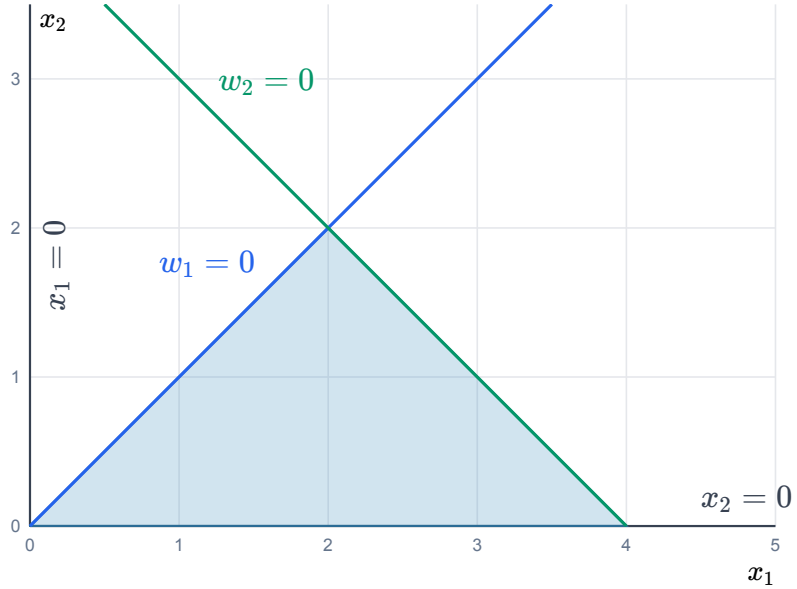
$$\begin{aligned} \zeta &= 6 - \tfrac{3}{2}w_2 - \tfrac{1}{2}w_1 \\ \hline x_2 &= 2 - \tfrac{1}{2}w_2 - \tfrac{1}{2}w_1 \\ x_1 &= 2 - \tfrac{1}{2}w_2 + \tfrac{1}{2}w_1 \end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

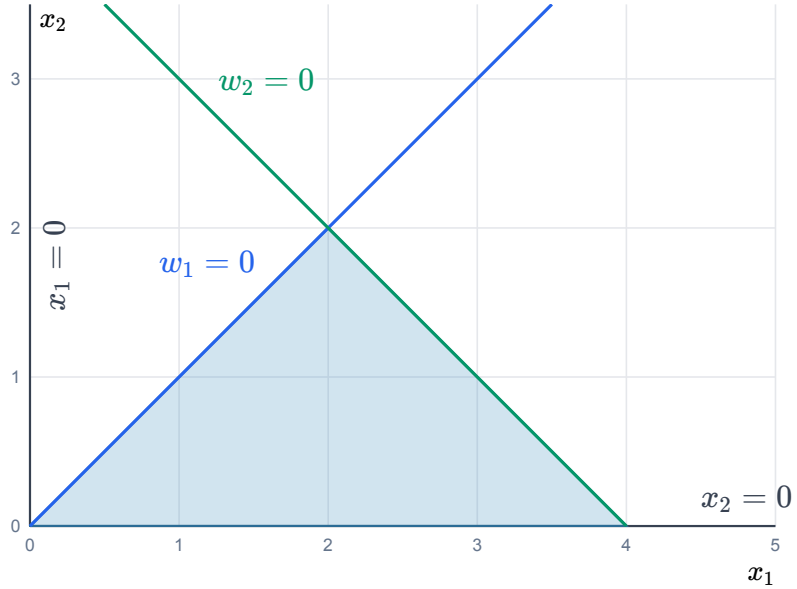
$$(x_1, x_2, w_1, w_2) = (2, 2, 0, 0), \quad \zeta = 6$$

Degenerierter Pivot: **Basis** ändert sich, **Basislösung** und ζ bleiben gleich.

Degeneriertheit in der Geometrie

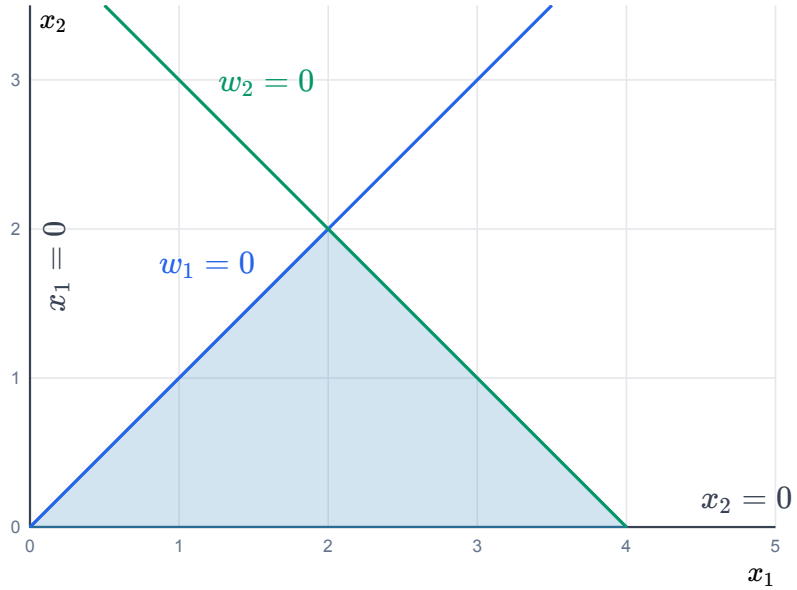


Degeneriertheit in der Geometrie



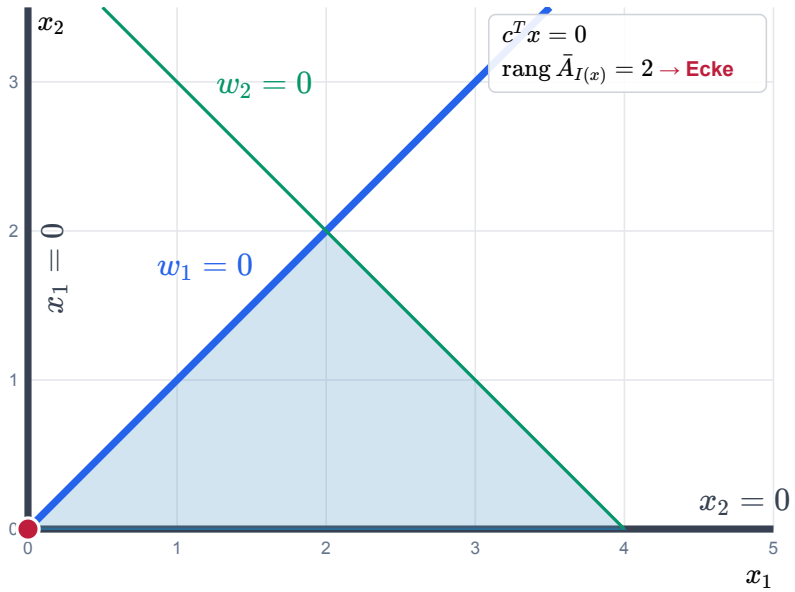
- Ecke $(0, 0)$: **drei** aktive Nebenbedingungen $x_1 = 0, x_2 = 0, w_1 = 0$ – mehr als $n = 2$

Degeneriertheit in der Geometrie



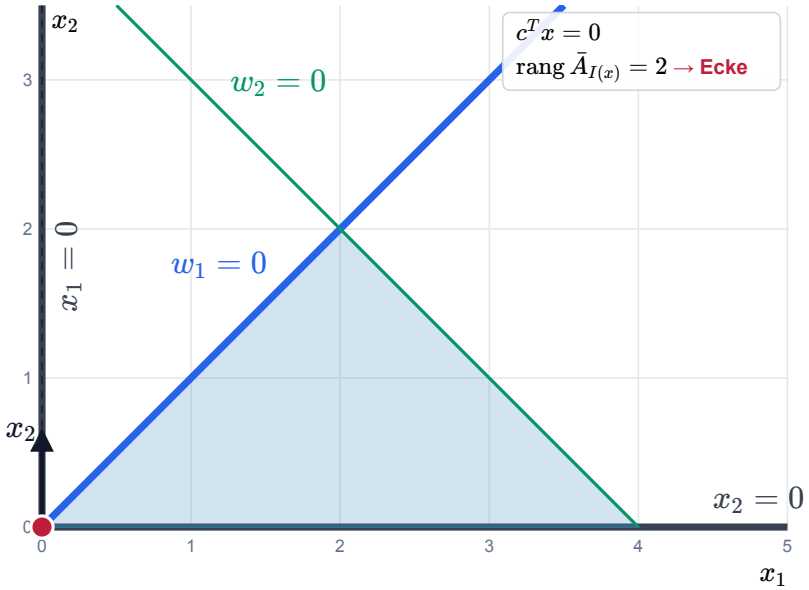
- Ecke $(0, 0)$: **drei** aktive Nebenbedingungen $x_1 = 0, x_2 = 0, w_1 = 0$ – mehr als $n = 2$
- Alle Paare davon als $\mathcal{N}$ beschreiben dieselbe Ecke: $\{x_1, x_2\}, \{x_1, w_1\}, \{x_2, w_1\}$

Degeneriertheit in der Geometrie



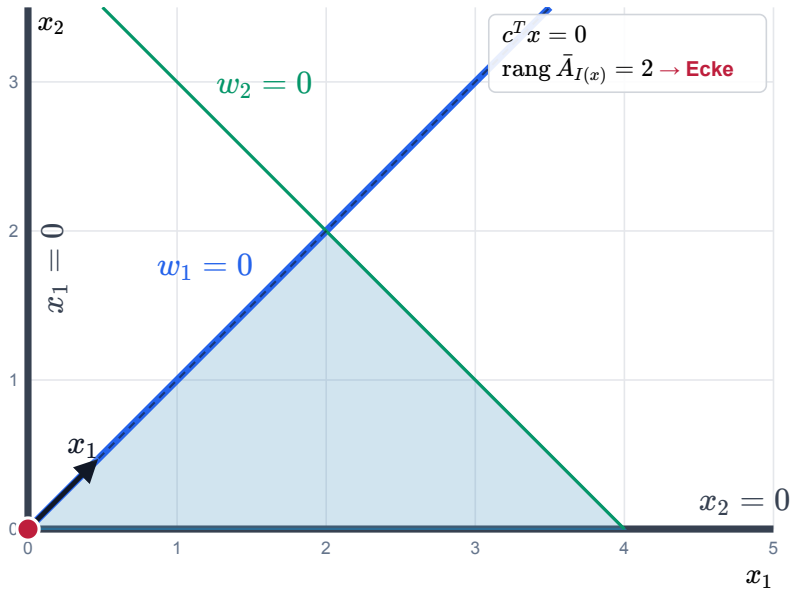
- Ecke $(0, 0)$: **drei** aktive Nebenbedingungen $x_1 = 0, x_2 = 0, w_1 = 0$ – mehr als $n = 2$
- Alle Paare davon als $\mathcal{N}$ beschreiben dieselbe Ecke: $\{x_1, x_2\}, \{x_1, w_1\}, \{x_2, w_1\}$
- Start mit $\mathcal{N} = \{x_1, x_2\}$

Degeneriertheit in der Geometrie



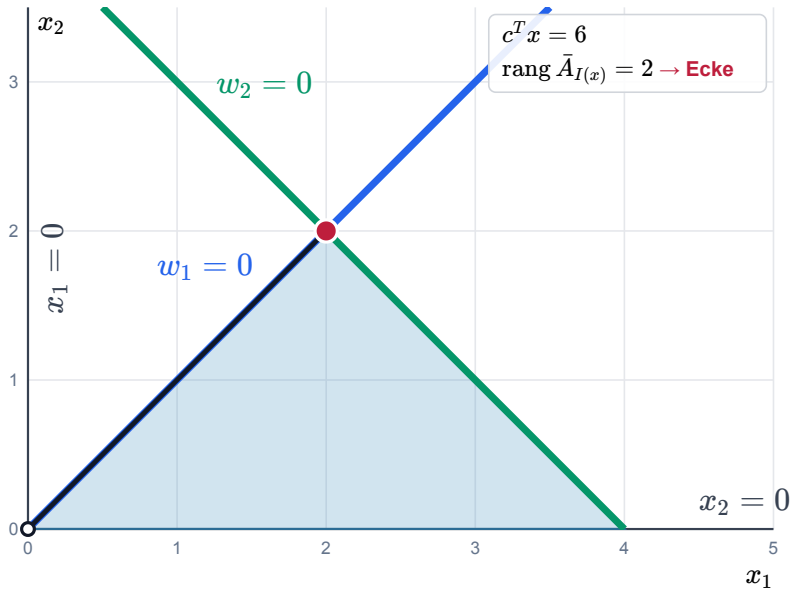
- Ecke $(0, 0)$: **drei** aktive Nebenbedingungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $w_1 = 0$ – mehr als $n = 2$
- Alle Paare davon als $\mathcal{N}$ beschreiben dieselbe Ecke: $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, w_1\}$, $\{x_2, w_1\}$
- Start mit $\mathcal{N} = \{x_1, x_2\}$
- x_2 erhöhen? $w_1 = x_1 - x_2$ wird sofort negativ: Schranke 0, **degenerierter Pivot**

Degeneriertheit in der Geometrie



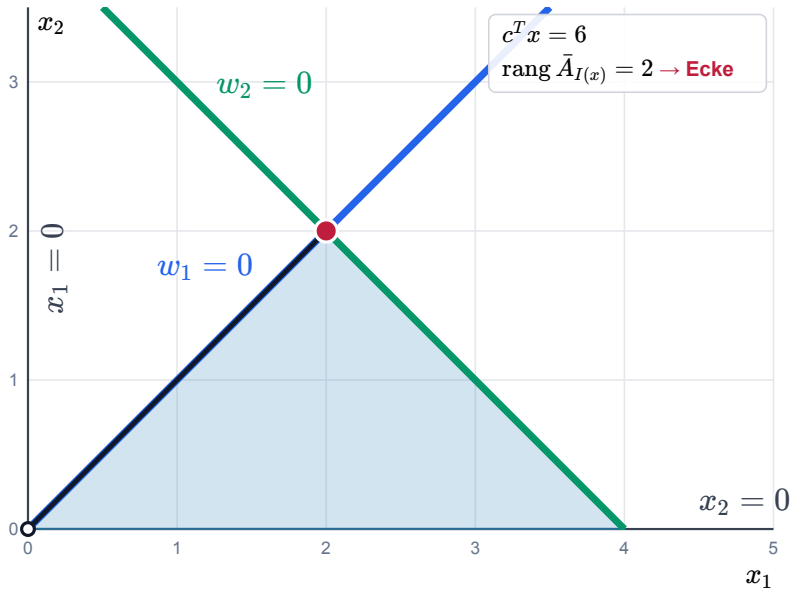
- Ecke $(0, 0)$: **drei** aktive Nebenbedingungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $w_1 = 0$ – mehr als $n = 2$
- Alle Paare davon als $\mathcal{N}$ beschreiben dieselbe Ecke: $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, w_1\}$, $\{x_2, w_1\}$
- Start mit $\mathcal{N} = \{x_1, x_2\}$
- x_2 erhöhen? $w_1 = x_1 - x_2$ wird sofort negativ: Schranke 0, **degenerierter Pivot**
- Neue Basis ($\mathcal{N} = \{x_1, w_1\}$), gleicher Punkt!

Degeneriertheit in der Geometrie



- Ecke $(0, 0)$: **drei** aktive Nebenbedingungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $w_1 = 0$ – mehr als $n = 2$
- Alle Paare davon als $\mathcal{N}$ beschreiben dieselbe Ecke: $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, w_1\}$, $\{x_2, w_1\}$
- Start mit $\mathcal{N} = \{x_1, x_2\}$
- x_2 erhöhen? $w_1 = x_1 - x_2$ wird sofort negativ: Schranke 0, **degenerierter Pivot**
- Neue Basis ($\mathcal{N} = \{x_1, w_1\}$), gleicher Punkt!
- Jetzt: x_1 erhöhen heißt entlang $w_1 = 0$ laufen

Degeneriertheit in der Geometrie



- Ecke $(0, 0)$: **drei** aktive Nebenbedingungen $x_1 = 0, x_2 = 0, w_1 = 0$ – mehr als $n = 2$
- Alle Paare davon als $\mathcal{N}$ beschreiben dieselbe Ecke: $\{x_1, x_2\}, \{x_1, w_1\}, \{x_2, w_1\}$
- Start mit $\mathcal{N} = \{x_1, x_2\}$
- x_2 erhöhen? $w_1 = x_1 - x_2$ wird sofort negativ: Schranke 0, **degenerierter Pivot**
- Neue Basis $(\mathcal{N} = \{x_1, w_1\})$, gleicher Punkt!
- Jetzt: x_1 erhöhen heißt entlang $w_1 = 0$ laufen
- … bis zur Ecke $(2, 2)$: optimal

Degenerierte Pivots: Was kann passieren?

Degenerierte Pivots: Was kann passieren?

- Ein degenerierter Pivotschritt ändert weder Basislösung noch Zielfunktionswert, nur die *Darstellung*.

Degenerierte Pivots: Was kann passieren?

- Ein degenerierter Pivotschritt ändert weder Basislösung noch Zielfunktionswert, nur die *Darstellung*.
- Wie lange kann man im schlimmsten Fall beim gleichen Wert bleiben?

Degenerierte Pivots: Was kann passieren?

- Ein degenerierter Pivotschritt ändert weder Basislösung noch Zielfunktionswert, nur die *Darstellung*.
- Wie lange kann man im schlimmsten Fall beim gleichen Wert bleiben?
- **Meistens:** Nach einigen degenerierten Pivots geht es weiter (wie im Beispiel).

Degenerierte Pivots: Was kann passieren?

- Ein degenerierter Pivotschritt ändert weder Basislösung noch Zielfunktionswert, nur die *Darstellung*.
- Wie lange kann man im schlimmsten Fall beim gleichen Wert bleiben?
- **Meistens:** Nach einigen degenerierten Pivots geht es weiter (wie im Beispiel).
- **Aber:** zerstört das bisher einzige Argument für Termination!

Degenerierte Pivots: Was kann passieren?

- Ein degenerierter Pivotschritt ändert weder Basislösung noch Zielfunktionswert, nur die *Darstellung*.
- Wie lange kann man im schlimmsten Fall beim gleichen Wert bleiben?
- **Meistens:** Nach einigen degenerierten Pivots geht es weiter (wie im Beispiel).
- **Aber:** zerstört das bisher einzige Argument für Termination!
- **Tatsächlich:** Über degenerierte Pivots kann Simplex zu einer besuchten Basis zurückkehren!

Degenerierte Pivots: Was kann passieren?

- Ein degenerierter Pivotschritt ändert weder Basislösung noch Zielfunktionswert, nur die *Darstellung*.
- Wie lange kann man im schlimmsten Fall beim gleichen Wert bleiben?
- **Meistens:** Nach einigen degenerierten Pivots geht es weiter (wie im Beispiel).
- **Aber:** zerstört das bisher einzige Argument für Termination!
- **Tatsächlich:** Über degenerierte Pivots kann Simplex zu einer besuchten Basis zurückkehren!
- Deterministische Pivotregeln ohne Gedächtnis laufen dann *für immer* im Kreis!

Definition (Zykeln)

Wiederholt sich die Folge der Dictionaries, so sagen wir, der Simplex-Algorithmus **zykelt** (*cycling*).

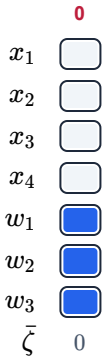
Zykeln: Beispiel

Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + x_1 - 2x_2 - 2x_4 \\
\hline
w_1 &= 0 - \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 4x_4 \\
w_2 &= 0 - \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$



Zykeln: Beispiel

Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + x_1 - 2x_2 - 2x_4 \\
\hline
w_1 &= 0 - \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 4x_4 \\
w_2 &= 0 - \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$

x_1 tritt in die Basis ein, w_1 tritt aus



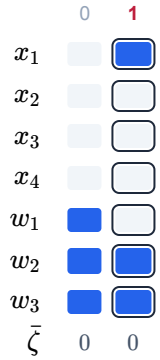
Zykeln: Beispiel

Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 - 2w_1 + 5x_2 + 4x_3 - 10x_4 \\
\hline
x_1 &= 0 - 2w_1 + 7x_2 + 4x_3 - 8x_4 \\
w_2 &= 0 + w_1 - \tfrac{5}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 + \tfrac{7}{2}x_4 \\
w_3 &= 1 + 2w_1 - 7x_2 - 4x_3 + 8x_4
\end{aligned}
$$



Zykeln: Beispiel

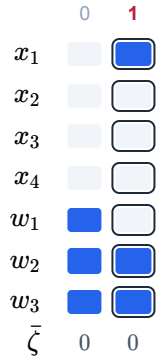
Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 - 2w_1 + 5x_2 + 4x_3 - 10x_4 \\
\hline
x_1 &= 0 - 2w_1 + 7x_2 + 4x_3 - 8x_4 \\
w_2 &= 0 + w_1 - \tfrac{5}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 + \tfrac{7}{2}x_4 \\
w_3 &= 1 + 2w_1 - 7x_2 - 4x_3 + 8x_4
\end{aligned}
$$

x_2 tritt in die Basis ein, w_2 tritt aus



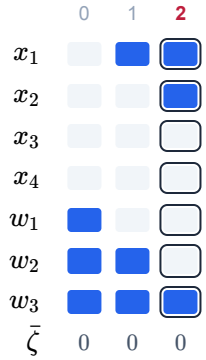
Zykeln: Beispiel

Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 - 2w_2 + x_3 - 3x_4 \\
\hline
x_1 &= 0 + \tfrac{4}{5}w_1 - \tfrac{14}{5}w_2 - \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{9}{5}x_4 \\
x_2 &= 0 + \tfrac{2}{5}w_1 - \tfrac{2}{5}w_2 - \tfrac{3}{5}x_3 + \tfrac{7}{5}x_4 \\
w_3 &= 1 - \tfrac{4}{5}w_1 + \tfrac{14}{5}w_2 + \tfrac{1}{5}x_3 - \tfrac{9}{5}x_4
\end{aligned}
$$



Zykeln: Beispiel

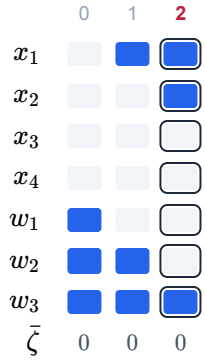
Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta &=& 0 & & & - & 2w_2 & + & x_3 & - & 3x_4 \\
\hline
x_1 &=& 0 & + & \frac{4}{5}w_1 & - & \frac{14}{5}w_2 & - & \frac{1}{5}x_3 & + & \frac{9}{5}x_4 \\
x_2 &=& 0 & + & \frac{2}{5}w_1 & - & \frac{2}{5}w_2 & - & \frac{3}{5}x_3 & + & \frac{7}{5}x_4 \\
w_3 &=& 1 & - & \frac{4}{5}w_1 & + & \frac{14}{5}w_2 & + & \frac{1}{5}x_3 & - & \frac{9}{5}x_4
\end{array}
$$

x_3 tritt in die Basis ein, x_1 tritt aus



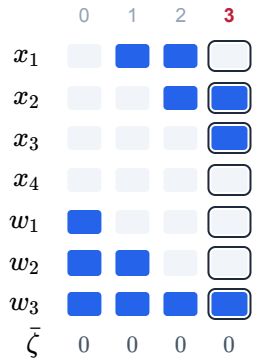
Zykeln: Beispiel

Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 4w_1 - 16w_2 - 5x_1 + 6x_4 \\
\hline
x_3 &= 0 + 4w_1 - 14w_2 - 5x_1 + 9x_4 \\
x_2 &= 0 - 2w_1 + 8w_2 + 3x_1 - 4x_4 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$



Zykeln: Beispiel

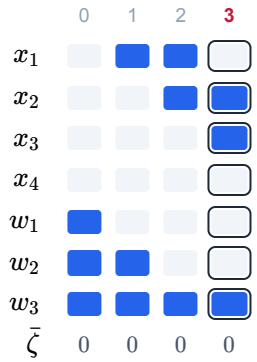
Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 4w_1 - 16w_2 - 5x_1 + 6x_4 \\
\hline
x_3 &= 0 + 4w_1 - 14w_2 - 5x_1 + 9x_4 \\
x_2 &= 0 - 2w_1 + 8w_2 + 3x_1 - 4x_4 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$

x_4 tritt in die Basis ein, x_2 tritt aus



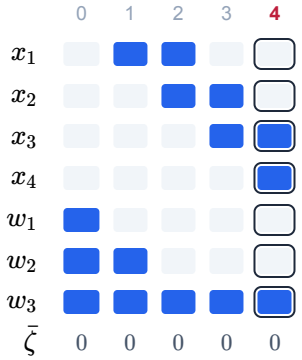
Zykeln: Beispiel

Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + w_1 - 4w_2 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 \\
\hline
x_3 &= 0 - \tfrac{1}{2}w_1 + 4w_2 + \tfrac{7}{4}x_1 - \tfrac{9}{4}x_2 \\
x_4 &= 0 - \tfrac{1}{2}w_1 + 2w_2 + \tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$



Zykeln: Beispiel

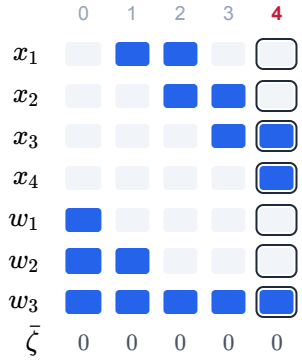
Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\zeta &=& 0 &+& w_1 &-& 4w_2 &-& \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 \\
\hline
x_3 &=& 0 &-& \frac{1}{2}w_1 &+& 4w_2 &+& \frac{7}{4}x_1 - \frac{9}{4}x_2 \\
x_4 &=& 0 &-& \frac{1}{2}w_1 &+& 2w_2 &+& \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \\
w_3 &=& 1 & & & & & -& x_1
\end{array}
$$

w_1 tritt in die Basis ein, x_3 tritt aus



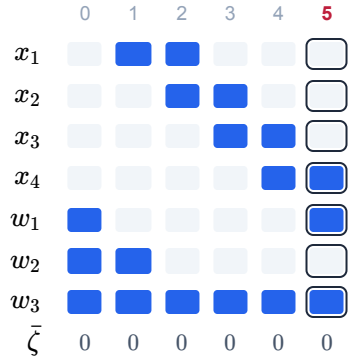
Zykeln: Beispiel

Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 - 2x_3 + 4w_2 + 3x_1 - 6x_2 \\
\hline
w_1 &= 0 - 2x_3 + 8w_2 + \tfrac{7}{2}x_1 - \tfrac{9}{2}x_2 \\
x_4 &= 0 + x_3 - 2w_2 - x_1 + 2x_2 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$



Zykeln: Beispiel

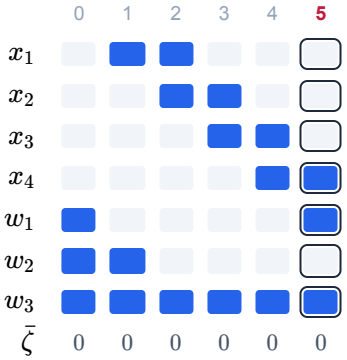
Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 - 2x_3 + 4w_2 + 3x_1 - 6x_2 \\
\hline
w_1 &= 0 - 2x_3 + 8w_2 + \tfrac{7}{2}x_1 - \tfrac{9}{2}x_2 \\
x_4 &= 0 + x_3 - 2w_2 - x_1 + 2x_2 \\
w_3 &= 1 \qquad\qquad - x_1
\end{aligned}
$$

w_2 tritt in die Basis ein, x_4 tritt aus



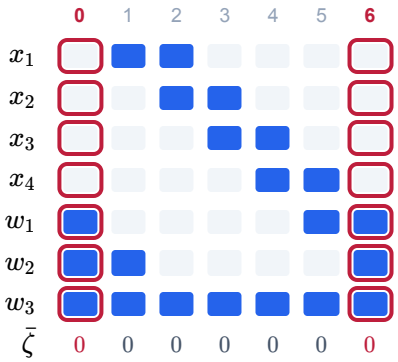
Zykeln: Beispiel

Pivotregel:

- Eintretend die Variable mit **größtem** Koeffizienten $\bar{c}_j$
- Austretend bei Gleichstand die mit **kleinstem Index**

  (Schlupfvariablen zuletzt: $x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_m$).

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 &&- 2x_4 + x_1 - 2x_2 \\
\hline
w_1 &= 0 + 2x_3 - 4x_4 - \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{7}{2}x_2 \\
w_2 &= 0 + \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$



Nach 6 Pivotschritten (alle degeneriert, $\bar{\zeta} = 0$) ist die Startbasis wieder erreicht!
Simplex läuft endlos im Kreis.

Terminierung

Wann kann Simplex nicht terminieren?

Wann kann Simplex nicht terminieren?

- In jedem nicht-degenerierten Pivotschritt wächst $\bar{\zeta}$ *echt*.

Wann kann Simplex nicht terminieren?

- In jedem nicht-degenerierten Pivotschritt wächst $\bar{\zeta}$ *echt*.
- Ein Dictionary ist durch seine Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt (Lemma gleich)

  $\Rightarrow$ nach einem nicht-degenerierten Schritt kommt keine frühere Basis wieder.

Wann kann Simplex nicht terminieren?

- In jedem nicht-degenerierten Pivotschritt wächst $\bar{\zeta}$ *echt*.
- Ein Dictionary ist durch seine Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt (Lemma gleich)

  $\Rightarrow$ nach einem nicht-degenerierten Schritt kommt keine frühere Basis wieder.
- Es gibt höchstens $\binom{n+m}{m}$ Basen.

Wann kann Simplex nicht terminieren?

- In jedem nicht-degenerierten Pivotschritt wächst $\bar{\zeta}$ *echt*.
- Ein Dictionary ist durch seine Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt (Lemma gleich)

  $\Rightarrow$ nach einem nicht-degenerierten Schritt kommt keine frühere Basis wieder.
- Es gibt höchstens $\binom{n+m}{m}$ Basen.
- Also: Simplex terminiert nicht $\Leftrightarrow$ Simplex zykelt (ab einem Punkt nur noch degenerierte Pivots).

Wann kann Simplex nicht terminieren?

- In jedem nicht-degenerierten Pivotschritt wächst $\bar{\zeta}$ *echt*.
- Ein Dictionary ist durch seine Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt (Lemma gleich)

  $\Rightarrow$ nach einem nicht-degenerierten Schritt kommt keine frühere Basis wieder.
- Es gibt höchstens $\binom{n+m}{m}$ Basen.
- Also: Simplex terminiert nicht $\Leftrightarrow$ Simplex zykelt (ab einem Punkt nur noch degenerierte Pivots).
- **Ausweg 1:** Gleichstände im Quotiententest geschickt auflösen *(lexikographische Methode)*

Wann kann Simplex nicht terminieren?

- In jedem nicht-degenerierten Pivotschritt wächst $\bar{\zeta}$ *echt*.
- Ein Dictionary ist durch seine Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt (Lemma gleich)

  $\Rightarrow$ nach einem nicht-degenerierten Schritt kommt keine frühere Basis wieder.
- Es gibt höchstens $\binom{n+m}{m}$ Basen.
- Also: Simplex terminiert nicht $\Leftrightarrow$ Simplex zykelt (ab einem Punkt nur noch degenerierte Pivots).
- **Ausweg 1:** Gleichstände im Quotiententest geschickt auflösen *(lexikographische Methode)*
- **Ausweg 2:** Eine Pivotregel, die nie zykelt *(Regel von Bland)*

Dictionaries sind durch ihre Basis bestimmt

Lemma

Zwei Dictionaries für dasselbe LP mit derselben Basis $\mathcal{B}$ sind gleich.

Dictionaries sind durch ihre Basis bestimmt

Lemma

Zwei Dictionaries für dasselbe LP mit derselben Basis $\mathcal{B}$ sind gleich.

- Gegeben: $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j$ und $x_i = \bar{b}'_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}'_{ij} x_j$ für alle $i \in \mathcal{B}$.

Dictionaries sind durch ihre Basis bestimmt

Lemma

Zwei Dictionaries für dasselbe LP mit derselben Basis $\mathcal{B}$ sind gleich.

- Gegeben: $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j$ und $x_i = \bar{b}'_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}'_{ij} x_j$ für alle $i \in \mathcal{B}$.
- Beide entstehen durch Äquivalenzumformungen aus $Ax + w = b$

  $\Rightarrow$ Beide haben *dieselbe* Lösungsmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$ (ohne Vorzeichenbedingungen).

Dictionaries sind durch ihre Basis bestimmt

Lemma

Zwei Dictionaries für dasselbe LP mit derselben Basis $\mathcal{B}$ sind gleich.

- Gegeben: $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j$ und $x_i = \bar{b}'_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}'_{ij} x_j$ für alle $i \in \mathcal{B}$.
- Beide entstehen durch Äquivalenzumformungen aus $Ax + w = b$

  $\Rightarrow$ Beide haben *dieselbe* Lösungsmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$ (ohne Vorzeichenbedingungen).
- In beiden Dictionaries kann man $x_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n$ beliebig wählen; $x_{\mathcal{B}}$ ist dann eindeutig.

Dictionaries sind durch ihre Basis bestimmt

Lemma

Zwei Dictionaries für dasselbe LP mit derselben Basis $\mathcal{B}$ sind gleich.

- Gegeben: $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j$ und $x_i = \bar{b}'_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}'_{ij} x_j$ für alle $i \in \mathcal{B}$.
- Beide entstehen durch Äquivalenzumformungen aus $Ax + w = b$

  $\Rightarrow$ Beide haben *dieselbe* Lösungsmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$ (ohne Vorzeichenbedingungen).
- In beiden Dictionaries kann man $x_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n$ beliebig wählen; $x_{\mathcal{B}}$ ist dann eindeutig.
- $x_{\mathcal{N}} = 0$: $\bar{b}_i = x_i = \bar{b}'_i$ für alle $i \in \mathcal{B}$.

Dictionaries sind durch ihre Basis bestimmt

Lemma

Zwei Dictionaries für dasselbe LP mit derselben Basis $\mathcal{B}$ sind gleich.

- Gegeben: $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j$ und $x_i = \bar{b}'_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}'_{ij} x_j$ für alle $i \in \mathcal{B}$.
- Beide entstehen durch Äquivalenzumformungen aus $Ax + w = b$

  $\Rightarrow$ Beide haben *dieselbe* Lösungsmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$ (ohne Vorzeichenbedingungen).
- In beiden Dictionaries kann man $x_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n$ beliebig wählen; $x_{\mathcal{B}}$ ist dann eindeutig.
- $x_{\mathcal{N}} = 0$: $\bar{b}_i = x_i = \bar{b}'_i$ für alle $i \in \mathcal{B}$.
- $x_{\mathcal{N}} = e_j$: $\bar{b}_i - \bar{a}_{ij} = \bar{b}'_i - \bar{a}'_{ij}$, also $\bar{a}_{ij} = \bar{a}'_{ij}$ ($e_j = j$-ter Einheitsvektor).

Dictionaries sind durch ihre Basis bestimmt

Lemma

Zwei Dictionaries für dasselbe LP mit derselben Basis $\mathcal{B}$ sind gleich.

- Gegeben: $x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j$ und $x_i = \bar{b}'_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}'_{ij} x_j$ für alle $i \in \mathcal{B}$.
- Beide entstehen durch Äquivalenzumformungen aus $Ax + w = b$

  $\Rightarrow$ Beide haben *dieselbe* Lösungsmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$ (ohne Vorzeichenbedingungen).
- In beiden Dictionaries kann man $x_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^n$ beliebig wählen; $x_{\mathcal{B}}$ ist dann eindeutig.
- $x_{\mathcal{N}} = 0$: $\bar{b}_i = x_i = \bar{b}'_i$ für alle $i \in \mathcal{B}$.
- $x_{\mathcal{N}} = e_j$: $\bar{b}_i - \bar{a}_{ij} = \bar{b}'_i - \bar{a}'_{ij}$, also $\bar{a}_{ij} = \bar{a}'_{ij}$ ($e_j = j$-ter Einheitsvektor).
- Genauso für die Zielfunktion $\zeta = c^\top x$: $\bar{\zeta} = \bar{\zeta}'$ und $\bar{c}_j = \bar{c}'_j$. $\square$

Lexikographische Ordnung

Definition

Für $u, v \in \mathbb{R}^k$ ist $u \prec v$ (**lexikographisch kleiner**), wenn $u \neq v$ und $u_t < v_t$ für den ersten Index t mit $u_t \neq v_t$. u heißt **lexikographisch positiv** ($u \succ 0$), wenn $u \neq 0$ und der erste Eintrag $\neq 0$ positiv ist.

Lexikographische Ordnung

Definition

Für $u, v \in \mathbb{R}^k$ ist $u \prec v$ (**lexikographisch kleiner**), wenn $u \neq v$ und $u_t < v_t$ für den ersten Index t mit $u_t \neq v_t$. u heißt **lexikographisch positiv** ($u \succ 0$), wenn $u \neq 0$ und der erste Eintrag $\neq 0$ positiv ist.

- Wie im Wörterbuch: erst nach dem ersten Eintrag sortieren, bei Gleichstand nach dem zweiten, …

Lexikographische Ordnung

Definition

Für $u, v \in \mathbb{R}^k$ ist $u \prec v$ (**lexikographisch kleiner**), wenn $u \neq v$ und $u_t < v_t$ für den ersten Index t mit $u_t \neq v_t$. u heißt **lexikographisch positiv** ($u \succ 0$), wenn $u \neq 0$ und der erste Eintrag $\neq 0$ positiv ist.

- Wie im Wörterbuch: erst nach dem ersten Eintrag sortieren, bei Gleichstand nach dem zweiten, …
- Beispiele: $(0, 2, -5) \succ 0, \quad (0, 0, -1) \prec 0, \quad (1, -7, 3) \prec (1, 0, -9)$

Lexikographische Ordnung

Definition

Für $u, v \in \mathbb{R}^k$ ist $u \prec v$ (**lexikographisch kleiner**), wenn $u \neq v$ und $u_t < v_t$ für den ersten Index t mit $u_t \neq v_t$. u heißt **lexikographisch positiv** ($u \succ 0$), wenn $u \neq 0$ und der erste Eintrag $\neq 0$ positiv ist.

- Wie im Wörterbuch: erst nach dem ersten Eintrag sortieren, bei Gleichstand nach dem zweiten, …
- Beispiele: $(0, 2, -5) \succ 0, \quad (0, 0, -1) \prec 0, \quad (1, -7, 3) \prec (1, 0, -9)$
- $\prec$ ist eine *totale* Ordnung auf $\mathbb{R}^k$: für $u \neq v$ gilt $u \prec v$ oder $v \prec u$.

Lexikographische Ordnung

Definition

Für $u, v \in \mathbb{R}^k$ ist $u \prec v$ (**lexikographisch kleiner**), wenn $u \neq v$ und $u_t < v_t$ für den ersten Index t mit $u_t \neq v_t$. u heißt **lexikographisch positiv** ($u \succ 0$), wenn $u \neq 0$ und der erste Eintrag $\neq 0$ positiv ist.

- Wie im Wörterbuch: erst nach dem ersten Eintrag sortieren, bei Gleichstand nach dem zweiten, …
- Beispiele: $(0, 2, -5) \succ 0, \quad (0, 0, -1) \prec 0, \quad (1, -7, 3) \prec (1, 0, -9)$
- $\prec$ ist eine *totale* Ordnung auf $\mathbb{R}^k$: für $u \neq v$ gilt $u \prec v$ oder $v \prec u$.
- Verträglich mit den Rechenoperationen: $u, v \succ 0, \lambda > 0 \Rightarrow u + v \succ 0$ und $\lambda u \succ 0$

Lexikographische Ordnung

Definition

Für $u, v \in \mathbb{R}^k$ ist $u \prec v$ (**lexikographisch kleiner**), wenn $u \neq v$ und $u_t < v_t$ für den ersten Index t mit $u_t \neq v_t$. u heißt **lexikographisch positiv** ($u \succ 0$), wenn $u \neq 0$ und der erste Eintrag $\neq 0$ positiv ist.

- Wie im Wörterbuch: erst nach dem ersten Eintrag sortieren, bei Gleichstand nach dem zweiten, …
- Beispiele: $(0, 2, -5) \succ 0, \quad (0, 0, -1) \prec 0, \quad (1, -7, 3) \prec (1, 0, -9)$
- $\prec$ ist eine *totale* Ordnung auf $\mathbb{R}^k$: für $u \neq v$ gilt $u \prec v$ oder $v \prec u$.
- Verträglich mit den Rechenoperationen: $u, v \succ 0, \lambda > 0 \Rightarrow u + v \succ 0$ und $\lambda u \succ 0$
- $u \prec v \Leftrightarrow v - u \succ 0$

Die lexikographische Methode

Die lexikographische Methode

- **Idee:** Jede Zeile $i \in \mathcal{B}$ bekommt neben $\bar{b}_i$ einen Vektor $\ell_i \in \mathbb{R}^m$, die Zielfunktion einen Vektor $\ell_0 \in \mathbb{R}^m$.

Die lexikographische Methode

- **Idee:** Jede Zeile $i \in \mathcal{B}$ bekommt neben $\bar{b}_i$ einen Vektor $\ell_i \in \mathbb{R}^m$, die Zielfunktion einen Vektor $\ell_0 \in \mathbb{R}^m$.
- **Start:** $\ell_i = e_i$ für die Zeile von w_i, $\ell_0 = 0$ – im Dictionary m zusätzliche Spalten.

Die lexikographische Methode

- **Idee:** Jede Zeile $i \in \mathcal{B}$ bekommt neben $\bar{b}_i$ einen Vektor $\ell_i \in \mathbb{R}^m$, die Zielfunktion einen Vektor $\ell_0 \in \mathbb{R}^m$.
- **Start:** $\ell_i = e_i$ für die Zeile von w_i, $\ell_0 = 0$ – im Dictionary m zusätzliche Spalten.
- **Pivotschritt:** ℓ wird wie die Konstanten mitgerechnet. Mit $r_i := (\bar{b}_i \mid \ell_i) \in \mathbb{R}^{1+m}$ und $r_0 := (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$:

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k, \qquad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}} r_k \ \ (i \neq k), \qquad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}} r_k$$

Die lexikographische Methode

- **Idee:** Jede Zeile $i \in \mathcal{B}$ bekommt neben $\bar{b}_i$ einen Vektor $\ell_i \in \mathbb{R}^m$, die Zielfunktion einen Vektor $\ell_0 \in \mathbb{R}^m$.
- **Start:** $\ell_i = e_i$ für die Zeile von w_i, $\ell_0 = 0$ – im Dictionary m zusätzliche Spalten.
- **Pivotschritt:** ℓ wird wie die Konstanten mitgerechnet. Mit $r_i := (\bar{b}_i \mid \ell_i) \in \mathbb{R}^{1+m}$ und $r_0 := (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$:

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k, \qquad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}} r_k \ \ (i \neq k), \qquad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}} r_k$$

- **Lexikographischer Quotiententest:**

  Unter allen i mit $\bar{a}_{ie} > 0$ verlässt die Variable mit dem *lexikographisch kleinsten* $\frac{1}{\bar{a}_{ie}} \cdot r_i$ die Basis.

Die lexikographische Methode

- **Idee:** Jede Zeile $i \in \mathcal{B}$ bekommt neben $\bar{b}_i$ einen Vektor $\ell_i \in \mathbb{R}^m$, die Zielfunktion einen Vektor $\ell_0 \in \mathbb{R}^m$.
- **Start:** $\ell_i = e_i$ für die Zeile von w_i, $\ell_0 = 0$ – im Dictionary m zusätzliche Spalten.
- **Pivotschritt:** ℓ wird wie die Konstanten mitgerechnet. Mit $r_i := (\bar{b}_i \mid \ell_i) \in \mathbb{R}^{1+m}$ und $r_0 := (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$:

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k, \qquad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}} r_k \ \ (i \neq k), \qquad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}} r_k$$

- **Lexikographischer Quotiententest:**

  Unter allen i mit $\bar{a}_{ie} > 0$ verlässt die Variable mit dem *lexikographisch kleinsten* $\frac{1}{\bar{a}_{ie}} \cdot r_i$ die Basis.
- Erster Eintrag ist der gewöhnliche Quotient $\bar{b}_i / \bar{a}_{ie}$, ℓ entscheidet nur bei Gleichstand.

Die lexikographische Methode

- **Idee:** Jede Zeile $i \in \mathcal{B}$ bekommt neben $\bar{b}_i$ einen Vektor $\ell_i \in \mathbb{R}^m$, die Zielfunktion einen Vektor $\ell_0 \in \mathbb{R}^m$.
- **Start:** $\ell_i = e_i$ für die Zeile von w_i, $\ell_0 = 0$ – im Dictionary m zusätzliche Spalten.
- **Pivotschritt:** ℓ wird wie die Konstanten mitgerechnet. Mit $r_i := (\bar{b}_i \mid \ell_i) \in \mathbb{R}^{1+m}$ und $r_0 := (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$:

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k, \qquad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}} r_k \ \ (i \neq k), \qquad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}} r_k$$

- **Lexikographischer Quotiententest:**

  Unter allen i mit $\bar{a}_{ie} > 0$ verlässt die Variable mit dem *lexikographisch kleinsten* $\frac{1}{\bar{a}_{ie}} \cdot r_i$ die Basis.
- Erster Eintrag ist der gewöhnliche Quotient $\bar{b}_i / \bar{a}_{ie}$, ℓ entscheidet nur bei Gleichstand.
- Die eintretende Variable darf beliebig gewählt werden (mit $\bar{c}_e > 0$).

Lexikographische Methode: Beispiel

Das Zykel-Beispiel, eintretend wieder die Variable mit größtem Koeffizienten; graue Spalten: ℓ_i

$$
\begin{array}{rcl|ccc|rcrcrcr}
\zeta & = & & 0 & 0 & 0 & & x_1 & - & 2x_2 & & - & 2x_4 \\
\hline
w_1 & = & 0 & 1 & 0 & 0 & - & \tfrac{1}{2}x_1 & + & \tfrac{7}{2}x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 \\
w_2 & = & 0 & 0 & 1 & 0 & - & \tfrac{1}{2}x_1 & + & x_2 & + & \tfrac{1}{2}x_3 & - & \tfrac{1}{2}x_4 \\
w_3 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & - & x_1 & & & & & &
\end{array}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \quad \zeta = 0$$

Lexikographische Methode: Beispiel

Das Zykel-Beispiel, eintretend wieder die Variable mit größtem Koeffizienten; graue Spalten: ℓ_i

$$
\begin{array}{rcl|ccc|rcrcrcr}
\zeta & = & & 0 & 0 & 0 & & x_1 & - & 2x_2 & & - & 2x_4 \\
\hline
w_1 & = & 0 & 1 & 0 & 0 & - & \tfrac{1}{2}x_1 & + & \tfrac{7}{2}x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 \\
w_2 & = & 0 & 0 & 1 & 0 & - & \tfrac{1}{2}x_1 & + & x_2 & + & \tfrac{1}{2}x_3 & - & \tfrac{1}{2}x_4 \\
w_3 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & - & x_1 & & & & & &
\end{array}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \quad \zeta = 0$$

Lexikographische Methode: Beispiel

Das Zykel-Beispiel, eintretend wieder die Variable mit größtem Koeffizienten; graue Spalten: ℓ_i

$$
\begin{array}{rcl|ccc|rcrcrcr|l}
\zeta & = & & 0 & 0 & 0 & & x_1 & - & 2x_2 & & - & 2x_4 & \\
\hline
w_1 & = & 0 & 1 & 0 & 0 & - & \tfrac{1}{2}x_1 & + & \tfrac{7}{2}x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & w_1\colon\ (0 \mid 2,0,0) \\
w_2 & = & 0 & 0 & 1 & 0 & - & \tfrac{1}{2}x_1 & + & x_2 & + & \tfrac{1}{2}x_3 & - & \tfrac{1}{2}x_4 & w_2\colon\ (0 \mid 0,2,0) \\
w_3 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & - & x_1 & & & & & & & w_3\colon\ (1 \mid 0,0,1)
\end{array}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) = (0,0,0,0,0,0,1), \quad \zeta = 0$$

Gleichstand $0 = 0$ bei w_1 und w_2 – aufgelöst durch $(0 \mid 0,2,0) \prec (0 \mid 2,0,0)$.

Lexikographische Methode: Beispiel

Das Zykel-Beispiel, eintretend wieder die Variable mit größtem Koeffizienten; graue Spalten: ℓ_i

$$
\begin{array}{rcl|ccc|rcrcrcr|l}
\zeta & = & & 0 & 0 & 0 & & x_1 & - & 2x_2 & & - & 2x_4 & \\
\hline
w_1 & = & 0 & 1 & 0 & 0 & - & \tfrac{1}{2}x_1 & + & \tfrac{7}{2}x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_4 & w_1\colon\ (0 \mid 2,0,0) \\
w_2 & = & 0 & 0 & 1 & 0 & - & \tfrac{1}{2}x_1 & + & x_2 & + & \tfrac{1}{2}x_3 & - & \tfrac{1}{2}x_4 & w_2\colon\ (0 \mid 0,2,0) \\
w_3 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & - & x_1 & & & & & & & w_3\colon\ (1 \mid 0,0,1)
\end{array}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) = (0,0,0,0,0,0,1), \quad \zeta = 0$$

Gleichstand $0 = 0$ bei w_1 und w_2 – aufgelöst durch $(0 \mid 0,2,0) \prec (0 \mid 2,0,0)$.

Lexikographische Methode: Beispiel

Das Zykel-Beispiel, eintretend wieder die Variable mit größtem Koeffizienten; graue Spalten: ℓ_i

$$
\begin{array}{rcl|ccc|l}
\zeta & = & & 0 & 2 & 0 & -2w_2 + x_3 - 3x_4 \\
\hline
w_1 & = & 0 & 1 & -1 & 0 & +w_2 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4 \\
x_1 & = & 0 & 0 & 2 & 0 & -2w_2 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\
w_3 & = & 1 & 0 & -2 & 1 & +2w_2 - 2x_2 - x_3 + x_4
\end{array}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \quad \zeta = 0$$

Gleichstand $0 = 0$ bei w_1 und w_2 – aufgelöst durch $(0 \mid 0, 2, 0) \prec (0 \mid 2, 0, 0)$.

Lexikographische Methode: Beispiel

Das Zykel-Beispiel, eintretend wieder die Variable mit größtem Koeffizienten; graue Spalten: ℓ_i

$$
\begin{array}{rcccccccccc}
\zeta & = & 0 & 2 & 0 & - & 2w_2 & + & x_3 & - & 3x_4 \\
\hline
w_1 & = & 0 & 1 & -1 & 0 & + & w_2 + \frac{5}{2}x_2 & + \frac{3}{2}x_3 & - & \frac{7}{2}x_4 \\
x_1 & = & 0 & 0 & 2 & 0 & - & 2w_2 + 2x_2 & + x_3 & - & x_4 \\
w_3 & = & 1 & 0 & -2 & 1 & + & 2w_2 - 2x_2 & - x_3 & + & x_4
\end{array}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \quad \zeta = 0$$

Gleichstand $0 = 0$ bei w_1 und w_2 – aufgelöst durch $(0 \mid 0, 2, 0) \prec (0 \mid 2, 0, 0)$.

Lexikographische Methode: Beispiel

Das Zykel-Beispiel, eintretend wieder die Variable mit größtem Koeffizienten; graue Spalten: ℓ_i

$$
\begin{array}{rcccccccccccl}
\zeta & = & & 0 & 2 & 0 & - & 2w_2 & & + & x_3 & - & 3x_4 & \\
\hline
w_1 & = & 0 & 1 & -1 & 0 & + & w_2 & + \tfrac{5}{2}x_2 & + & \tfrac{3}{2}x_3 & - & \tfrac{7}{2}x_4 & w_1\colon \text{ keine Schranke} \\
x_1 & = & 0 & 0 & 2 & 0 & - & 2w_2 & + 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & x_1\colon \text{ keine Schranke} \\
w_3 & = & 1 & 0 & -2 & 1 & + & 2w_2 & - 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & w_3\colon\ (1 \mid 0, -2, 1)
\end{array}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \quad \zeta = 0$$

Gleichstand $0 = 0$ bei w_1 und w_2 – aufgelöst durch $(0 \mid 0, 2, 0) \prec (0 \mid 2, 0, 0)$.

Lexikographische Methode: Beispiel

Das Zykel-Beispiel, eintretend wieder die Variable mit größtem Koeffizienten; graue Spalten: ℓ_i

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
\zeta & = & & 0 & 2 & 0 & - & 2w_2 & & + & x_3 & - & 3x_4 \\
\hline
w_1 & = & 0 & 1 & -1 & 0 & + & w_2 & + \tfrac{5}{2}x_2 & + & \tfrac{3}{2}x_3 & - & \tfrac{7}{2}x_4 \\
x_1 & = & 0 & 0 & 2 & 0 & - & 2w_2 & + 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 \\
w_3 & = & 1 & 0 & -2 & 1 & + & 2w_2 & - 2x_2 & - & x_3 & + & x_4
\end{array}
$$

w_1: keine Schranke

x_1: keine Schranke

w_3: $(1 \mid 0, -2, 1)$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \quad \zeta = 0$$

Gleichstand $0 = 0$ bei w_1 und w_2 – aufgelöst durch $(0 \mid 0, 2, 0) \prec (0 \mid 2, 0, 0)$.

Lexikographische Methode: Beispiel

Das Zykel-Beispiel, eintretend wieder die Variable mit größtem Koeffizienten; graue Spalten: ℓ_i

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrrrrr}
\zeta &=& 1 & 0 & 0 & 1 & & & -2x_2 & - & w_3 & - & 2x_4 \\
\hline
w_1 &=& \frac{3}{2} & 1 & -4 & \frac{3}{2} & + 4w_2 & - & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{3}{2}w_3 & - & 2x_4 \\
x_1 &=& 1 & 0 & 0 & 1 & & & & - & w_3 & & \\
x_3 &=& 1 & 0 & -2 & 1 & + 2w_2 & - & 2x_2 & - & w_3 & + & x_4
\end{array}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 1, 0, \tfrac{3}{2}, 0, 0), \quad \zeta = 1$$

Gleichstand $0 = 0$ bei w_1 und w_2 – aufgelöst durch $(0 \mid 0, 2, 0) \prec (0 \mid 2, 0, 0)$.

Lexikographische Methode: Beispiel

Das Zykel-Beispiel, eintretend wieder die Variable mit größtem Koeffizienten; graue Spalten: ℓ_i

$$
\begin{array}{rcrrrrrrrrrrrr}
\zeta & = & 1 & 0 & 0 & 1 & & & - & 2x_2 & - & w_3 & - & 2x_4 \\
\hline
w_1 & = & \frac{3}{2} & 1 & -4 & \frac{3}{2} & + & 4w_2 & - & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{3}{2}w_3 & - & 2x_4 \\
x_1 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & & - & w_3 & & \\
x_3 & = & 1 & 0 & -2 & 1 & + & 2w_2 & - & 2x_2 & - & w_3 & + & x_4
\end{array}
$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2, w_3) = (1, 0, 1, 0, \tfrac{3}{2}, 0, 0), \quad \zeta = 1$$

Gleichstand $0 = 0$ bei w_1 und w_2 – aufgelöst durch $(0 \mid 0, 2, 0) \prec (0 \mid 2, 0, 0)$.

Terminierung der lexikographischen Methode

Theorem

Mit lexikographischem Quotiententest terminiert Simplex (ab einem zulässigen Dictionary).

Erinnerung

$$r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i) \;\; (i \in \mathcal{B}), \quad r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$$

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}}\, r_k, \quad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}}\, r_k \;\; (i \neq k), \quad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}}\, r_k$$

Zu Beginn: $\ell_i = e_i,\ \ell_0 = 0$

Pivot: x_e ein, x_k aus, $\bar{a}_{ke} > 0$

Terminierung der lexikographischen Methode

Theorem

Mit lexikographischem Quotiententest terminiert Simplex (ab einem zulässigen Dictionary).

Erinnerung

$$r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i) \;\; (i \in \mathcal{B}), \quad r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$$

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}}\, r_k, \quad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}}\, r_k \;\; (i \neq k), \quad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}}\, r_k$$

Zu Beginn: $\ell_i = e_i,\ \ell_0 = 0$

Pivot: x_e ein, x_k aus, $\bar{a}_{ke} > 0$

- **Invariante 1:** Die Matrix $L = (\ell_i)_{i \in \mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (Zeilen ℓ_i) ist invertierbar.

Terminierung der lexikographischen Methode

Theorem

Mit lexikographischem Quotiententest terminiert Simplex (ab einem zulässigen Dictionary).

Erinnerung

$$r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i) \ \ (i \in \mathcal{B}), \quad r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$$

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}}\, r_k, \quad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}}\, r_k \ \ (i \neq k), \quad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}}\, r_k$$

Zu Beginn: $\ell_i = e_i,\ \ell_0 = 0$

Pivot: x_e ein, x_k aus, $\bar{a}_{ke} > 0$

- **Invariante 1:** Die Matrix $L = (\ell_i)_{i \in \mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (Zeilen ℓ_i) ist invertierbar.
  Gilt zu Beginn: $L = I$.

Terminierung der lexikographischen Methode

Theorem

Mit lexikographischem Quotiententest terminiert Simplex (ab einem zulässigen Dictionary).

Erinnerung

$$r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i) \ \ (i \in \mathcal{B}), \quad r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$$

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}}\, r_k, \quad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}}\, r_k \ \ (i \neq k), \quad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}}\, r_k$$

Zu Beginn: $\ell_i = e_i,\ \ell_0 = 0$

Pivot: x_e ein, x_k aus, $\bar{a}_{ke} > 0$

- **Invariante 1:** Die Matrix $L = (\ell_i)_{i \in \mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (Zeilen ℓ_i) ist invertierbar.
  Gilt zu Beginn: $L = I$.
  Pivotschritt: Zeile ℓ_k mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}}$ skalieren (wird ℓ'_e), Vielfache davon zu den anderen Zeilen addieren.

Terminierung der lexikographischen Methode

Theorem

Mit lexikographischem Quotiententest terminiert Simplex (ab einem zulässigen Dictionary).

Erinnerung

$$r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i) \ \ (i \in \mathcal{B}), \quad r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$$

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}}\, r_k, \quad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}}\, r_k \ \ (i \neq k), \quad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}}\, r_k$$

Zu Beginn: $\ell_i = e_i,\ \ell_0 = 0$

Pivot: x_e ein, x_k aus, $\bar{a}_{ke} > 0$

- **Invariante 1:** Die Matrix $L = (\ell_i)_{i \in \mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (Zeilen ℓ_i) ist invertierbar.
  Gilt zu Beginn: $L = I$.
  Pivotschritt: Zeile ℓ_k mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}}$ skalieren (wird ℓ'_e), Vielfache davon zu den anderen Zeilen addieren.
  Zeilenoperationen wie bei Gauss; diese erhalten den Rang.

Terminierung der lexikographischen Methode

Theorem

Mit lexikographischem Quotiententest terminiert Simplex (ab einem zulässigen Dictionary).

Erinnerung

$$r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i) \ \ (i \in \mathcal{B}), \quad r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0) \qquad \text{Zu Beginn: } \ell_i = e_i,\ \ell_0 = 0$$

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}}\, r_k, \quad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}}\, r_k \ \ (i \neq k), \quad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}}\, r_k \qquad \text{Pivot: } x_e \text{ ein},\ x_k \text{ aus},\ \bar{a}_{ke} > 0$$

- **Invariante 1:** Die Matrix $L = (\ell_i)_{i \in \mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (Zeilen ℓ_i) ist invertierbar.
  Gilt zu Beginn: $L = I$.
  Pivotschritt: Zeile ℓ_k mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}}$ skalieren (wird ℓ'_e), Vielfache davon zu den anderen Zeilen addieren.
  Zeilenoperationen wie bei Gauss; diese erhalten den Rang.
  $\Rightarrow$ Das Minimum im lexikographischen Quotiententest ist **eindeutig**:

Terminierung der lexikographischen Methode

Theorem

Mit lexikographischem Quotiententest terminiert Simplex (ab einem zulässigen Dictionary).

Erinnerung

$$r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i) \ \ (i \in \mathcal{B}), \quad r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0) \qquad \text{Zu Beginn: } \ell_i = e_i,\ \ell_0 = 0$$

$$r'_e = \tfrac{1}{\bar{a}_{ke}}\, r_k, \quad r'_i = r_i - \tfrac{\bar{a}_{ie}}{\bar{a}_{ke}}\, r_k \ \ (i \neq k), \quad r'_0 = r_0 + \tfrac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}}\, r_k \qquad \text{Pivot: } x_e \text{ ein},\ x_k \text{ aus},\ \bar{a}_{ke} > 0$$

- **Invariante 1:** Die Matrix $L = (\ell_i)_{i \in \mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (Zeilen ℓ_i) ist invertierbar.
  Gilt zu Beginn: $L = I$.
  Pivotschritt: Zeile ℓ_k mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}}$ skalieren (wird ℓ'_e), Vielfache davon zu den anderen Zeilen addieren.
  Zeilenoperationen wie bei Gauss; diese erhalten den Rang.
  $\Rightarrow$ Das Minimum im lexikographischen Quotiententest ist **eindeutig**:
  aus $\frac{1}{\bar{a}_{ie}} r_i = \frac{1}{\bar{a}_{i'e}} r_{i'}$ für $i \neq i'$ würde $\frac{1}{\bar{a}_{ie}} \ell_i = \frac{1}{\bar{a}_{i'e}} \ell_{i'}$ folgen; dann wären $\ell_i, \ell_{i'}$ linear abhängig!

Terminierung der lexikographischen Methode (2)

Lexikographischer Quotiententest:

x_k tritt aus mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k \prec \frac{1}{\bar{a}_{ie}} r_i$ für alle anderen i mit $\bar{a}_{ie} > 0$ (eindeutig nach Invariante 1).

Terminierung der lexikographischen Methode (2)

Lexikographischer Quotiententest:
x_k tritt aus mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k \prec \frac{1}{\bar{a}_{ie}} r_i$ für alle anderen i mit $\bar{a}_{ie} > 0$ (eindeutig nach Invariante 1).

Invariante 2: Alle $r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i)$, $i \in \mathcal{B}$, sind lexikographisch positiv.

Terminierung der lexikographischen Methode (2)

Lexikographischer Quotiententest:
x_k tritt aus mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k \prec \frac{1}{\bar{a}_{ie}} r_i$ für alle anderen i mit $\bar{a}_{ie} > 0$ (eindeutig nach Invariante 1).

Invariante 2: Alle $r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i)$, $i \in \mathcal{B}$, sind lexikographisch positiv.
Anfangs $r_i = (\bar{b}_i \mid e_i) \succ 0$, da $\bar{b}_i \geq 0$ (zulässig) und $e_i \succ 0$.

Terminierung der lexikographischen Methode (2)

Lexikographischer Quotiententest:
x_k tritt aus mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k \prec \frac{1}{\bar{a}_{ie}} r_i$ für alle anderen i mit $\bar{a}_{ie} > 0$ (eindeutig nach Invariante 1).

Invariante 2: Alle $r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i)$, $i \in \mathcal{B}$, sind lexikographisch positiv.
Anfangs $r_i = (\bar{b}_i \mid e_i) \succ 0$, da $\bar{b}_i \geq 0$ (zulässig) und $e_i \succ 0$.

Pivotschritt: x_e tritt ein, x_k tritt aus ($\bar{a}_{ke} > 0$):

Terminierung der lexikographischen Methode (2)

Lexikographischer Quotiententest:
x_k tritt aus mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k \prec \frac{1}{\bar{a}_{ie}} r_i$ für alle anderen i mit $\bar{a}_{ie} > 0$ (eindeutig nach Invariante 1).

Invariante 2: Alle $r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i)$, $i \in \mathcal{B}$, sind lexikographisch positiv.
Anfangs $r_i = (\bar{b}_i \mid e_i) \succ 0$, da $\bar{b}_i \geq 0$ (zulässig) und $e_i \succ 0$.

Pivotschritt: x_e tritt ein, x_k tritt aus ($\bar{a}_{ke} > 0$):

- neue Zeile e: $r'_e = \frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ 0$

Terminierung der lexikographischen Methode (2)

Lexikographischer Quotiententest:
x_k tritt aus mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k \prec \frac{1}{\bar{a}_{ie}} r_i$ für alle anderen i mit $\bar{a}_{ie} > 0$ (eindeutig nach Invariante 1).

Invariante 2: Alle $r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i)$, $i \in \mathcal{B}$, sind lexikographisch positiv.
Anfangs $r_i = (\bar{b}_i \mid e_i) \succ 0$, da $\bar{b}_i \geq 0$ (zulässig) und $e_i \succ 0$.

Pivotschritt: x_e tritt ein, x_k tritt aus ($\bar{a}_{ke} > 0$):

- neue Zeile e: $r'_e = \frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ 0$
- $\bar{a}_{ie} \leq 0$: $r'_i = r_i + \frac{|\bar{a}_{ie}|}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ 0$ (Summe lexikographisch positiver Vektoren)

Terminierung der lexikographischen Methode (2)

Lexikographischer Quotiententest:
x_k tritt aus mit $\frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k \prec \frac{1}{\bar{a}_{ie}} r_i$ für alle anderen i mit $\bar{a}_{ie} > 0$ (eindeutig nach Invariante 1).

Invariante 2: Alle $r_i = (\bar{b}_i \mid \ell_i)$, $i \in \mathcal{B}$, sind lexikographisch positiv.
Anfangs $r_i = (\bar{b}_i \mid e_i) \succ 0$, da $\bar{b}_i \geq 0$ (zulässig) und $e_i \succ 0$.

Pivotschritt: x_e tritt ein, x_k tritt aus ($\bar{a}_{ke} > 0$):

- neue Zeile e: $r'_e = \frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ 0$
- $\bar{a}_{ie} \leq 0$: $r'_i = r_i + \frac{|\bar{a}_{ie}|}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ 0$ (Summe lexikographisch positiver Vektoren)
- $\bar{a}_{ie} > 0$: $r'_i = \bar{a}_{ie}\left(\frac{1}{\bar{a}_{ie}} r_i - \frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k\right) \succ 0$, da $\frac{1}{\bar{a}_{ke}} r_k$ das *einzige lexikographische Minimum* ist

Terminierung der lexikographischen Methode (3)

Terminierung der lexikographischen Methode (3)

- **Zielfunktion:** $r_0' = r_0 + \frac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ r_0$, da $\bar{c}_e > 0$, $\bar{a}_{ke} > 0$ und $r_k \succ 0$.

Terminierung der lexikographischen Methode (3)

- **Zielfunktion:** $r_0' = r_0 + \frac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ r_0$, da $\bar{c}_e > 0$, $\bar{a}_{ke} > 0$ und $r_k \succ 0$.
- Der Vektor $r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$ wächst also in *jedem* Schritt lexikographisch, auch in degenerierten.

Terminierung der lexikographischen Methode (3)

- **Zielfunktion:** $r_0' = r_0 + \frac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ r_0$, da $\bar{c}_e > 0$, $\bar{a}_{ke} > 0$ und $r_k \succ 0$.
- Der Vektor $r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$ wächst also in *jedem* Schritt lexikographisch, auch in degenerierten.
- Genau wie die $\bar{a}_{ij}, \bar{c}_j, \bar{b}_i$ ist r_0 durch die Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt.

Terminierung der lexikographischen Methode (3)

- **Zielfunktion:** $r_0' = r_0 + \frac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ r_0$, da $\bar{c}_e > 0$, $\bar{a}_{ke} > 0$ und $r_k \succ 0$.
- Der Vektor $r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$ wächst also in *jedem* Schritt lexikographisch, auch in degenerierten.
- Genau wie die $\bar{a}_{ij}, \bar{c}_j, \bar{b}_i$ ist r_0 durch die Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt.
- Also kommt keine Basis zweimal vor $\Rightarrow$ höchstens $\binom{n+m}{m}$ Pivotschritte. $\square$

Terminierung der lexikographischen Methode (3)

- **Zielfunktion:** $r_0' = r_0 + \frac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ r_0$, da $\bar{c}_e > 0$, $\bar{a}_{ke} > 0$ und $r_k \succ 0$.
- Der Vektor $r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$ wächst also in *jedem* Schritt lexikographisch, auch in degenerierten.
- Genau wie die $\bar{a}_{ij}, \bar{c}_j, \bar{b}_i$ ist r_0 durch die Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt.
- Also kommt keine Basis zweimal vor $\Rightarrow$ höchstens $\binom{n+m}{m}$ Pivotschritte. $\square$

Bemerkung: Start und Phase I/II

Die Konstruktion braucht nur ein *zulässiges* Startdictionary: Im Zweiphasensimplex setzt man $\ell_i = e_i$, $\ell_0 = 0$ nach dem ersten Pivotschritt mit x_0 und erneut zu Beginn von Phase II.

Terminierung der lexikographischen Methode (3)

- **Zielfunktion:** $r_0' = r_0 + \frac{\bar{c}_e}{\bar{a}_{ke}} r_k \succ r_0$, da $\bar{c}_e > 0$, $\bar{a}_{ke} > 0$ und $r_k \succ 0$.
- Der Vektor $r_0 = (\bar{\zeta} \mid \ell_0)$ wächst also in *jedem* Schritt lexikographisch, auch in degenerierten.
- Genau wie die $\bar{a}_{ij}, \bar{c}_j, \bar{b}_i$ ist r_0 durch die Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmt.
- Also kommt keine Basis zweimal vor $\Rightarrow$ höchstens $\binom{n+m}{m}$ Pivotschritte. $\square$

Bemerkung: Start und Phase I/II

Die Konstruktion braucht nur ein *zulässiges* Startdictionary: Im Zweiphasensimplex setzt man $\ell_i = e_i$, $\ell_0 = 0$ nach dem ersten Pivotschritt mit x_0 und erneut zu Beginn von Phase II.

Bemerkung: Lazyness

Man kann die ℓ_i an jedem beliebigen zulässigen Dictionary einführen, z.B. sobald man mögliches Zykeln entdeckt hat. In der Praxis ist *stalling* (viele degenerierte Pivots ohne echtes Zykeln) häufig ein größeres Problem.

Bemerkung: symbolische Perturbation (Störung)

Bemerkung: symbolische Perturbation (Störung)

- Lies ℓ_i als Koeffizienten neuer Symbole: $\bar{b}_i + \ell_{i1}\varepsilon_1 + \cdots + \ell_{im}\varepsilon_m$

Bemerkung: symbolische Perturbation (Störung)

- Lies ℓ_i als Koeffizienten neuer Symbole: $\bar{b}_i + \ell_{i1}\varepsilon_1 + \cdots + \ell_{im}\varepsilon_m$
- Das ist Simplex auf dem **gestörten** LP mit rechter Seite $b_i + \varepsilon_i$, wobei $0 < \varepsilon_m \ll \cdots \ll \varepsilon_1 \ll 1$

Bemerkung: symbolische Perturbation (Störung)

- Lies ℓ_i als Koeffizienten neuer Symbole: $\bar{b}_i + \ell_{i1}\varepsilon_1 + \cdots + \ell_{im}\varepsilon_m$
- Das ist Simplex auf dem **gestörten** LP mit rechter Seite $b_i + \varepsilon_i$, wobei $0 < \varepsilon_m \ll \cdots \ll \varepsilon_1 \ll 1$
- „$\ll$“ heißt: $\bar{b}_i + \sum_t \ell_{it}\varepsilon_t > 0 \;\Leftrightarrow\; (\bar{b}_i \mid \ell_i) \succ 0$

Bemerkung: symbolische Perturbation (Störung)

- Lies ℓ_i als Koeffizienten neuer Symbole: $\bar{b}_i + \ell_{i1}\varepsilon_1 + \cdots + \ell_{im}\varepsilon_m$
- Das ist Simplex auf dem **gestörten** LP mit rechter Seite $b_i + \varepsilon_i$, wobei $0 < \varepsilon_m \ll \cdots \ll \varepsilon_1 \ll 1$
- „$\ll$“ heißt: $\bar{b}_i + \sum_t \ell_{it}\varepsilon_t > 0 \;\Leftrightarrow\; (\bar{b}_i \mid \ell_i) \succ 0$
- Invariante 2 sagt dann: Kein gestörtes Dictionary ist degeneriert.

  Daher heißt die Methode auch *Perturbationsmethode*.

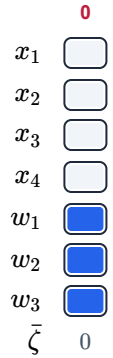
$$
\begin{array}{rcllllllll}
\zeta &=& 0 & & +2\varepsilon_2 & & -2w_2 & & +x_3 - 3x_4 \\
\hline
w_1 &=& 0 & +\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & & + w_2 + \tfrac{5}{2}x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 - \tfrac{7}{2}x_4 \\
x_1 &=& 0 & & +2\varepsilon_2 & & -2w_2 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\
w_3 &=& 1 & & -2\varepsilon_2 & +\varepsilon_3 & +2w_2 - 2x_2 - x_3 + x_4
\end{array}
$$

Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & x_1 &- 2x_2 & &- 2x_4 \\
\hline
w_1 &= 0 &- \tfrac{1}{2}x_1 &+ \tfrac{7}{2}x_2 &+ 2x_3 &- 4x_4 \\
w_2 &= 0 &- \tfrac{1}{2}x_1 &+ x_2 &+ \tfrac{1}{2}x_3 &- \tfrac{1}{2}x_4 \\
w_3 &= 1 &- x_1 & & &
\end{aligned}
$$



(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

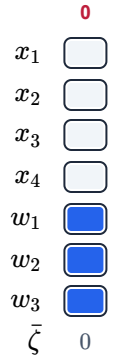
Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & x_1 &- 2x_2 & &- 2x_4 \\
\hline
w_1 &= 0 & - \tfrac{1}{2}x_1 &+ \tfrac{7}{2}x_2 &+ 2x_3 &- 4x_4 \\
w_2 &= 0 & - \tfrac{1}{2}x_1 &+ x_2 &+ \tfrac{1}{2}x_3 &- \tfrac{1}{2}x_4 \\
w_3 &= 1 & - x_1 & & &
\end{aligned}
$$

x_1 tritt in die Basis ein, w_1 tritt aus



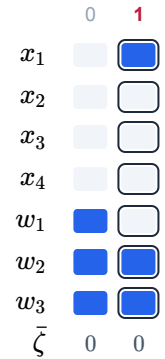
(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= &&- 2w_1 + 5x_2 + 4x_3 - 10x_4 \\
\hline
x_1 &= 0 &&- 2w_1 + 7x_2 + 4x_3 - 8x_4 \\
w_2 &= 0 &&+ w_1 - \tfrac{5}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 + \tfrac{7}{2}x_4 \\
w_3 &= 1 &&+ 2w_1 - 7x_2 - 4x_3 + 8x_4
\end{aligned}
$$



(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

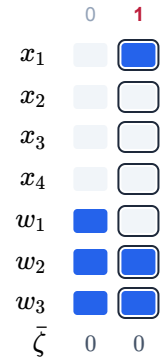
Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -2w_1 + 5x_2 + 4x_3 - 10x_4 \\
\hline
x_1 &= 0 - 2w_1 + 7x_2 + 4x_3 - 8x_4 \\
w_2 &= 0 + w_1 - \tfrac{5}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 + \tfrac{7}{2}x_4 \\
w_3 &= 1 + 2w_1 - 7x_2 - 4x_3 + 8x_4
\end{aligned}
$$

x_2 tritt in die Basis ein, w_2 tritt aus



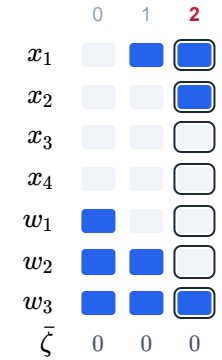
(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= && - 2w_2 + x_3 - 3x_4 \\
\hline
x_1 &= 0 + \tfrac{4}{5}w_1 - \tfrac{14}{5}w_2 - \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{9}{5}x_4 \\
x_2 &= 0 + \tfrac{2}{5}w_1 - \tfrac{2}{5}w_2 - \tfrac{3}{5}x_3 + \tfrac{7}{5}x_4 \\
w_3 &= 1 - \tfrac{4}{5}w_1 + \tfrac{14}{5}w_2 + \tfrac{1}{5}x_3 - \tfrac{9}{5}x_4
\end{aligned}
$$



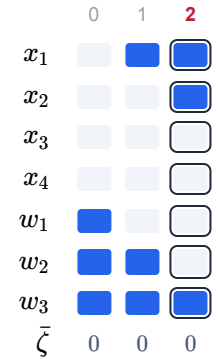
(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & & & -2w_2 & + x_3 & - 3x_4 \\
\hline
x_1 &= 0 & + \tfrac{4}{5}w_1 & - \tfrac{14}{5}w_2 & - \tfrac{1}{5}x_3 & + \tfrac{9}{5}x_4 \\
x_2 &= 0 & + \tfrac{2}{5}w_1 & - \tfrac{2}{5}w_2 & - \tfrac{3}{5}x_3 & + \tfrac{7}{5}x_4 \\
w_3 &= 1 & - \tfrac{4}{5}w_1 & + \tfrac{14}{5}w_2 & + \tfrac{1}{5}x_3 & - \tfrac{9}{5}x_4
\end{aligned}
$$

x_3 tritt in die Basis ein, x_1 tritt aus



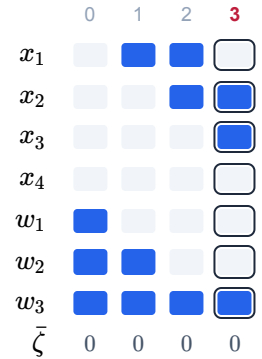
(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 4w_1 - 16w_2 - 5x_1 + 6x_4 \\
\hline
x_3 &= 0 + 4w_1 - 14w_2 - 5x_1 + 9x_4 \\
x_2 &= 0 - 2w_1 + 8w_2 + 3x_1 - 4x_4 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$



(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

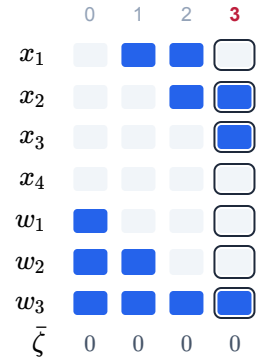
Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 4w_1 - 16w_2 - 5x_1 + 6x_4 \\
\hline
x_3 &= 0 + 4w_1 - 14w_2 - 5x_1 + 9x_4 \\
x_2 &= 0 - 2w_1 + 8w_2 + 3x_1 - 4x_4 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$

x_4 tritt in die Basis ein, x_2 tritt aus



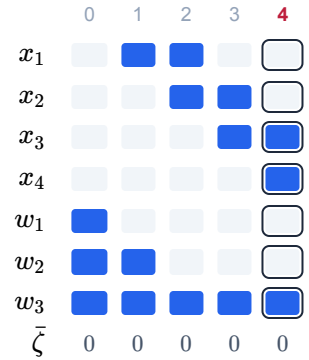
(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= && w_1 - 4w_2 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 \\
\hline
x_3 &= 0 - \tfrac{1}{2}w_1 + 4w_2 + \tfrac{7}{4}x_1 - \tfrac{9}{4}x_2 \\
x_4 &= 0 - \tfrac{1}{2}w_1 + 2w_2 + \tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$



(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

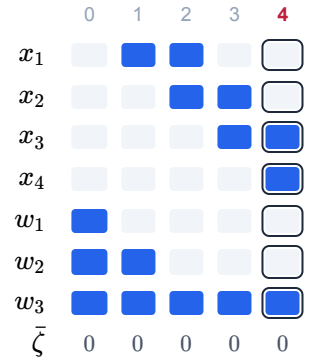
Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & & w_1 - 4w_2 - \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 \\
\hline
x_3 &= 0 - \tfrac{1}{2}w_1 + 4w_2 + \tfrac{7}{4}x_1 - \tfrac{9}{4}x_2 \\
x_4 &= 0 - \tfrac{1}{2}w_1 + 2w_2 + \tfrac{3}{4}x_1 - \tfrac{1}{4}x_2 \\
w_3 &= 1 & & - x_1
\end{aligned}
$$

w_1 tritt in die Basis ein, x_3 tritt aus



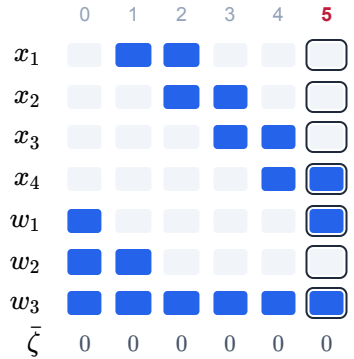
(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -2x_3 + 4w_2 + 3x_1 - 6x_2 \\
\hline
w_1 &= 0 - 2x_3 + 8w_2 + \tfrac{7}{2}x_1 - \tfrac{9}{2}x_2 \\
x_4 &= 0 + x_3 - 2w_2 - x_1 + 2x_2 \\
w_3 &= 1 - x_1
\end{aligned}
$$



(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

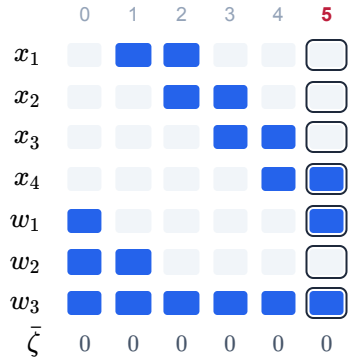
Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & - 2x_3 + 4w_2 &+ 3x_1 - 6x_2 \\
\hline
w_1 &= 0 - 2x_3 + 8w_2 &+ \tfrac{7}{2}x_1 - \tfrac{9}{2}x_2 \\
x_4 &= 0 + x_3 - 2w_2 &- x_1 + 2x_2 \\
w_3 &= 1 & - x_1
\end{aligned}
$$

x_1 tritt in die Basis ein, x_4 tritt aus



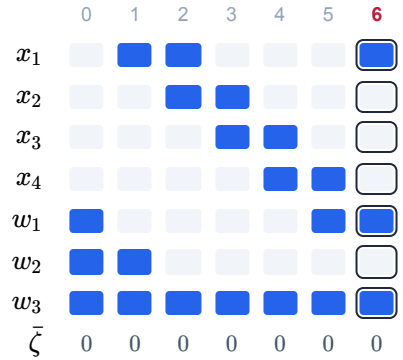
(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & x_3 - 2w_2 - 3x_4 \\
\hline
w_1 &= 0 + \tfrac{3}{2}x_3 + w_2 - \tfrac{7}{2}x_4 + \tfrac{5}{2}x_2 \\
x_1 &= 0 + x_3 - 2w_2 - x_4 + 2x_2 \\
w_3 &= 1 - x_3 + 2w_2 + x_4 - 2x_2
\end{aligned}
$$



(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

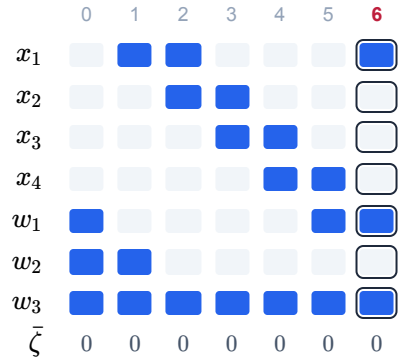
Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= & & x_3 & - 2w_2 & - 3x_4 \\
\hline
w_1 &= 0 & + \tfrac{3}{2}x_3 & + w_2 & - \tfrac{7}{2}x_4 & + \tfrac{5}{2}x_2 \\
x_1 &= 0 & + x_3 & - 2w_2 & - x_4 & + 2x_2 \\
w_3 &= 1 & - x_3 & + 2w_2 & + x_4 & - 2x_2
\end{aligned}
$$

x_3 tritt in die Basis ein, w_3 tritt aus



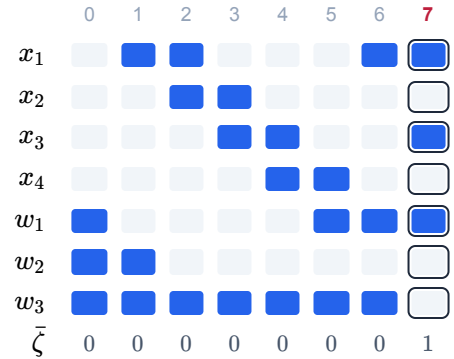
(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 1 - w_3 - 2x_4 - 2x_2 \\
\hline
w_1 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}w_3 + 4w_2 - 2x_4 - \tfrac{1}{2}x_2 \\
x_1 &= 1 - w_3 \\
x_3 &= 1 - w_3 + 2w_2 + x_4 - 2x_2
\end{aligned}
$$



(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

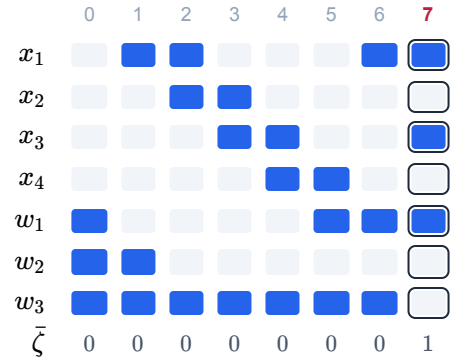
Regel von Bland

Theorem (Bland, 1977)

Wählt man als eintretende Variable unter allen x_j mit $\bar{c}_j > 0$ die mit **kleinstem Index** und bei Gleichstand im Quotiententest ebenfalls die mit kleinstem Index, so zykelt der Simplex-Algorithmus nicht.

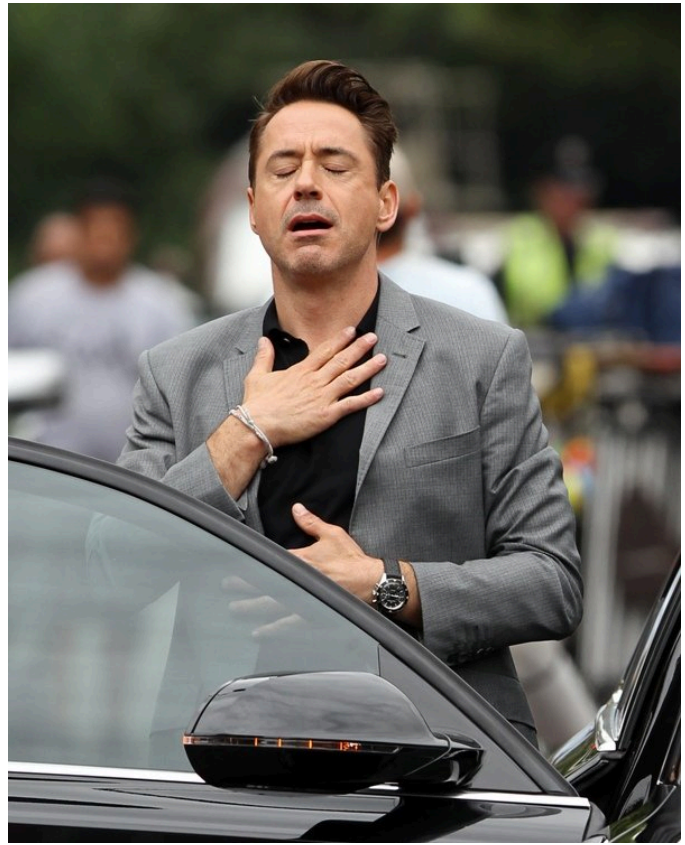
$$
\begin{aligned}
\zeta &= 1 - w_3 - 2x_4 - 2x_2 \\
\hline
w_1 &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{3}{2}w_3 + 4w_2 - 2x_4 - \tfrac{1}{2}x_2 \\
x_1 &= 1 - w_3 \\
x_3 &= 1 - w_3 + 2w_2 + x_4 - 2x_2
\end{aligned}
$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal



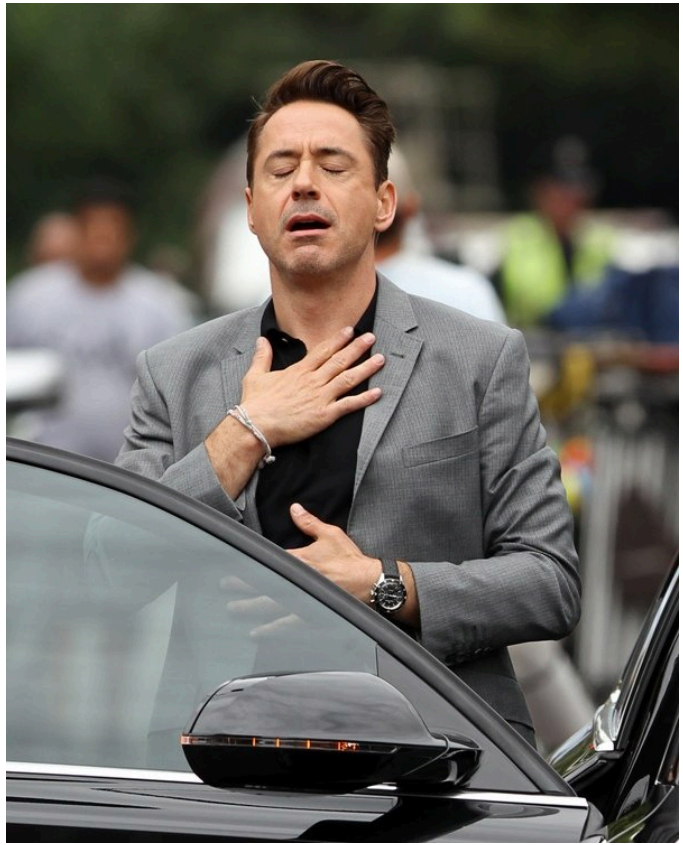
(Beweis z. B. Vanderbei, Kap. 3 oder Chvátal, Kap. 3.) Einfach umzusetzen, aber oft *viele* Iterationen.

Phew!



Phew!

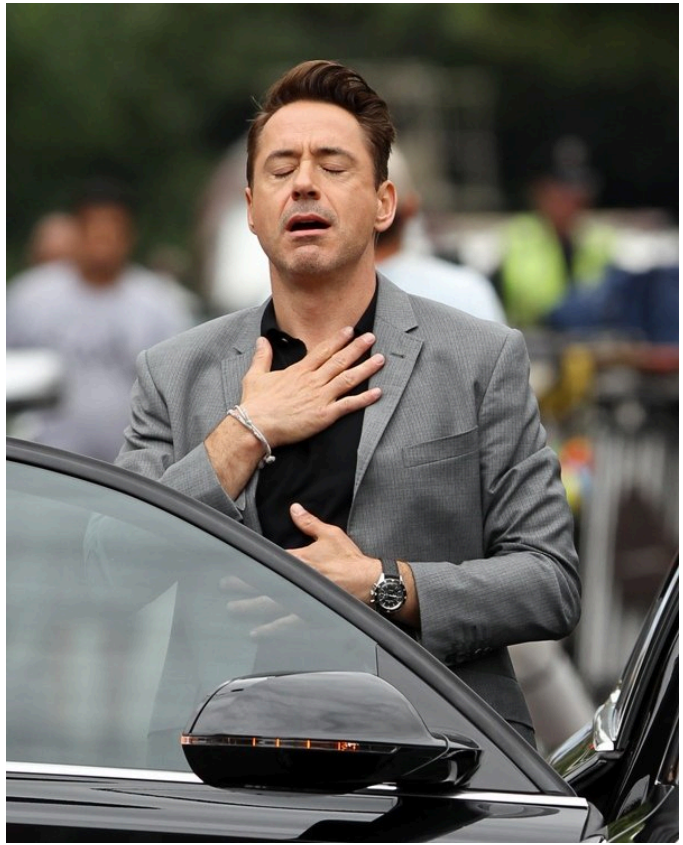
Mit geeigneter Pivotregel (lexikographisch, Bland):
Simplex-Algorithmus **terminiert immer!**



Phew!

Mit geeigneter Pivotregel (lexikographisch, Bland):
Simplex-Algorithmus **terminiert immer!**

Mögliche Ergebnisse nach Terminierung:
unzulässig, optimale Basislösung oder unbeschränkt.



Fundamentalsatz – jetzt algorithmisch

Theorem (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Für jedes LP in Standardform gilt:

1. Hat es keine optimale Lösung, so ist es unzulässig oder unbeschränkt.
2. Hat es eine zulässige Lösung, so hat es eine zulässige Basislösung.
3. Hat es eine optimale Lösung, so hat es eine optimale Basislösung.

Fundamentalsatz – jetzt algorithmisch

Theorem (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Für jedes LP in Standardform gilt:

1. Hat es keine optimale Lösung, so ist es unzulässig oder unbeschränkt.
2. Hat es eine zulässige Lösung, so hat es eine zulässige Basislösung.
3. Hat es eine optimale Lösung, so hat es eine optimale Basislösung.

Beweis: Zweiphasensimplex mit lexikographischer Methode terminiert.

Fundamentalsatz – jetzt algorithmisch

Theorem (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Für jedes LP in Standardform gilt:

1. Hat es keine optimale Lösung, so ist es unzulässig oder unbeschränkt.
2. Hat es eine zulässige Lösung, so hat es eine zulässige Basislösung.
3. Hat es eine optimale Lösung, so hat es eine optimale Basislösung.

Beweis: Zweiphasensimplex mit lexikographischer Methode terminiert.

- Phase I endet mit $\xi^* < 0$ (unzulässig) oder $\xi^* = 0$ und einer zulässigen Basislösung: 2. erledigt.

Fundamentalsatz – jetzt algorithmisch

Theorem (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Für jedes LP in Standardform gilt:

1. Hat es keine optimale Lösung, so ist es unzulässig oder unbeschränkt.
2. Hat es eine zulässige Lösung, so hat es eine zulässige Basislösung.
3. Hat es eine optimale Lösung, so hat es eine optimale Basislösung.

Beweis: Zweiphasensimplex mit lexikographischer Methode terminiert.

- Phase I endet mit $\xi^* < 0$ (unzulässig) oder $\xi^* = 0$ und einer zulässigen Basislösung: 2. erledigt.
- Ggf. müssen wir x_0 per degeneriertem Pivot aus der Basis entfernen, damit die Basis nicht x_0 enthält.

Fundamentalsatz – jetzt algorithmisch

Theorem (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Für jedes LP in Standardform gilt:

1. Hat es keine optimale Lösung, so ist es unzulässig oder unbeschränkt.
2. Hat es eine zulässige Lösung, so hat es eine zulässige Basislösung.
3. Hat es eine optimale Lösung, so hat es eine optimale Basislösung.

Beweis: Zweiphasensimplex mit lexikographischer Methode terminiert.

- Phase I endet mit $\xi^* < 0$ (unzulässig) oder $\xi^* = 0$ und einer zulässigen Basislösung: 2. erledigt.
- Ggf. müssen wir x_0 per degeneriertem Pivot aus der Basis entfernen, damit die Basis nicht x_0 enthält.
- Phase II endet mit „unbeschränkt“ oder einer optimalen Basislösung: 1. und 3. erledigt.

Fundamentalsatz – jetzt algorithmisch

Theorem (Fundamentalsatz der linearen Optimierung)

Für jedes LP in Standardform gilt:

1. Hat es keine optimale Lösung, so ist es unzulässig oder unbeschränkt.
2. Hat es eine zulässige Lösung, so hat es eine zulässige Basislösung.
3. Hat es eine optimale Lösung, so hat es eine optimale Basislösung.

Beweis: Zweiphasensimplex mit lexikographischer Methode terminiert.

- Phase I endet mit $\xi^* < 0$ (unzulässig) oder $\xi^* = 0$ und einer zulässigen Basislösung: 2. erledigt.
- Ggf. müssen wir x_0 per degeneriertem Pivot aus der Basis entfernen, damit die Basis nicht x_0 enthält.
- Phase II endet mit „unbeschränkt“ oder einer optimalen Basislösung: 1. und 3. erledigt.
- Mit „Basislösungen = Ecken“ ist das der Fundamentalsatz aus Kapitel 1 mit algorithmischem Beweis.

Pivotregeln und Laufzeit

Pivotregeln

Regel	Wahl	Zykelt?	Bemerkung
Größter Koeffizient (Dantzig)	eintretend: größtes $\bar{c}_j$	möglich	einfach, in der Praxis meist gut
Größter Zuwachs	eintretend: größte Verbesserung von ζ	möglich	Quotiententest für jede Spalte – teuer pro Iteration
Bland	kleinster Index (ein- und austretend)	nein	oft viele Iterationen
Lexikographisch	austretend: lexikographischer Quotiententest	nein	beliebige Regel für die eintretende Variable
Zufällig	zufällig unter allen $\bar{c}_j > 0$ (und im Quotiententest)	fast sicher nicht	Bland-Schritte haben stets W'keit > 0

Pivotregeln

Regel	Wahl	Zykelt?	Bemerkung
Größter Koeffizient (Dantzig)	eintretend: größtes $\bar{c}_j$	möglich	einfach, in der Praxis meist gut
Größter Zuwachs	eintretend: größte Verbesserung von ζ	möglich	Quotiententest für jede Spalte – teuer pro Iteration
Bland	kleinster Index (ein- und austretend)	nein	oft viele Iterationen
Lexikographisch	austretend: lexikographischer Quotiententest	nein	beliebige Regel für die eintretende Variable
Zufällig	zufällig unter allen $\bar{c}_j > 0$ (und im Quotiententest)	fast sicher nicht	Bland-Schritte haben stets W'keit > 0

Die Regel beeinflusst Terminierung **und** Laufzeit. Wie viele Pivotschritte sind es im schlimmsten Fall?

Laufzeit des Simplex-Algorithmus

Laufzeit des Simplex-Algorithmus

- **Größen:** n Variablen, m Nebenbedingungen, Anzahl der Nicht-Null-Koeffizienten.

Laufzeit des Simplex-Algorithmus

- **Größen:** n Variablen, m Nebenbedingungen, Anzahl der Nicht-Null-Koeffizienten.
- Faustregel: je mehr Nullen, desto schneller; später mehr dazu.

Laufzeit des Simplex-Algorithmus

- **Größen:** n Variablen, m Nebenbedingungen, Anzahl der Nicht-Null-Koeffizienten.
- Faustregel: je mehr Nullen, desto schneller; später mehr dazu.
- Der Worst Case hängt aber vor allem von n und m ab.

Laufzeit des Simplex-Algorithmus

- **Größen:** n Variablen, m Nebenbedingungen, Anzahl der Nicht-Null-Koeffizienten.
- Faustregel: je mehr Nullen, desto schneller; später mehr dazu.
- Der Worst Case hängt aber vor allem von n und m ab.
- **Laufzeit:** $T_{\text{gesamt}} = N_{\text{Iterationen}} \cdot T_{\text{Iteration}}$

Laufzeit des Simplex-Algorithmus

- **Größen:** n Variablen, m Nebenbedingungen, Anzahl der Nicht-Null-Koeffizienten.
- Faustregel: je mehr Nullen, desto schneller; später mehr dazu.
- Der Worst Case hängt aber vor allem von n und m ab.
- **Laufzeit:** $T_{\text{gesamt}} = N_{\text{Iterationen}} \cdot T_{\text{Iteration}}$
- **Eine Iteration:** Hausaufgabe!

Laufzeit des Simplex-Algorithmus

- **Größen:** n Variablen, m Nebenbedingungen, Anzahl der Nicht-Null-Koeffizienten.
- Faustregel: je mehr Nullen, desto schneller; später mehr dazu.
- Der Worst Case hängt aber vor allem von n und m ab.
- **Laufzeit:** $T_{\text{gesamt}} = N_{\text{Iterationen}} \cdot T_{\text{Iteration}}$
- **Eine Iteration:** Hausaufgabe!
- **Anzahl Iterationen:** Ohne Zykeln kommt keine Basis doppelt vor; es gibt höchstens $\binom{n+m}{m}$ Basen.

Laufzeit des Simplex-Algorithmus

- **Größen:** n Variablen, m Nebenbedingungen, Anzahl der Nicht-Null-Koeffizienten.
- Faustregel: je mehr Nullen, desto schneller; später mehr dazu.
- Der Worst Case hängt aber vor allem von n und m ab.
- **Laufzeit:** $T_{\text{gesamt}} = N_{\text{Iterationen}} \cdot T_{\text{Iteration}}$
- **Eine Iteration:** Hausaufgabe!
- **Anzahl Iterationen:** Ohne Zykeln kommt keine Basis doppelt vor; es gibt höchstens $\binom{n+m}{m}$ Basen.
- Für $n = m$: $\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$ – exponentiell!


ABER WIR MÜSSEN NICHT
ALLE BASISLÖSUNGEN DURCH.


ABER WIR MÜSSEN NICHT
ALLE BASISLÖSUNGEN DURCH.
ODER?

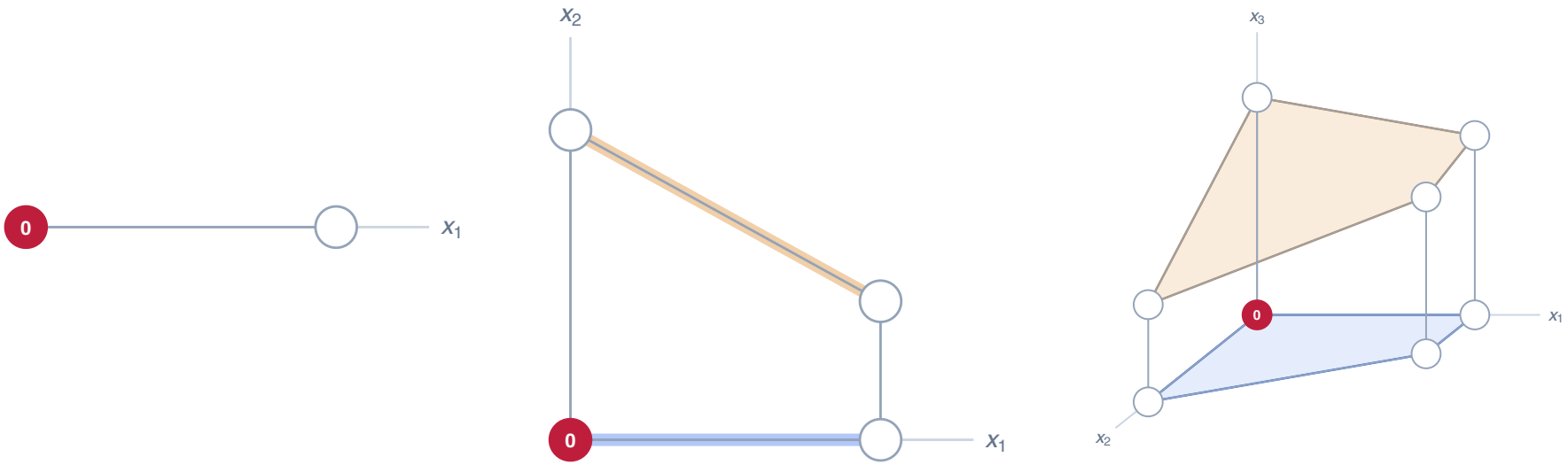

WE HAVE TO VISIT THEM ALL!


WE HAVE TO VISIT THEM ALL!
AND NOT JUST Ω(#corners) - ALL!


WE HAVE TO VISIT THEM ALL!
AND NOT JUST Ω(#corners) - ALL!
EVERY SINGLE ONE!

Klee-Minty-Würfel: die Idee

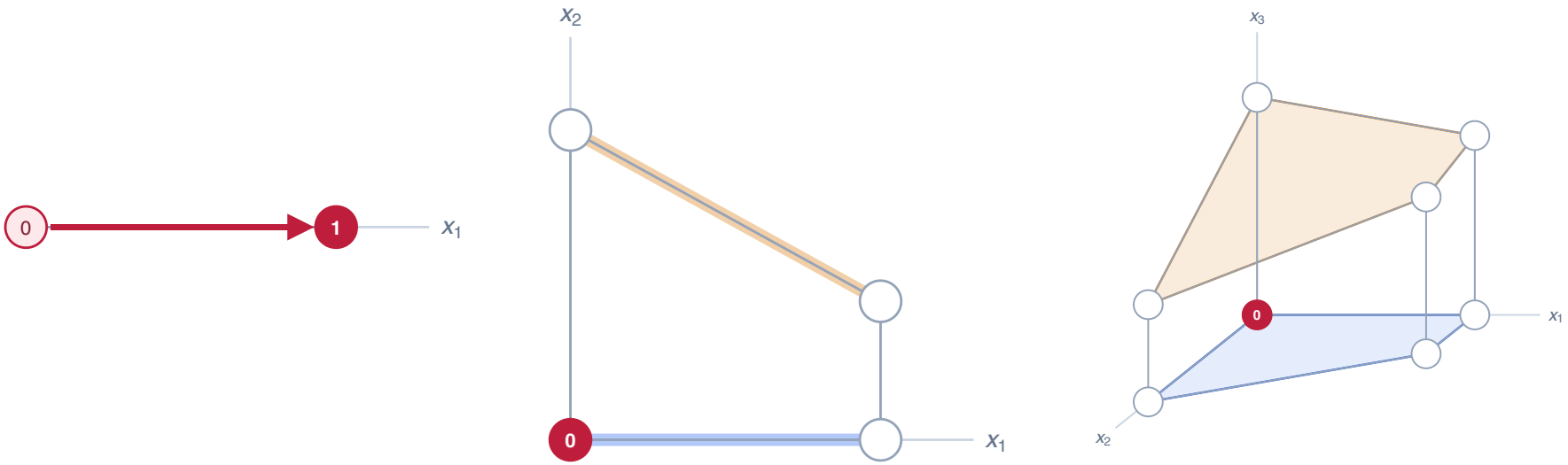
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n - 1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

Klee-Minty-Würfel: die Idee

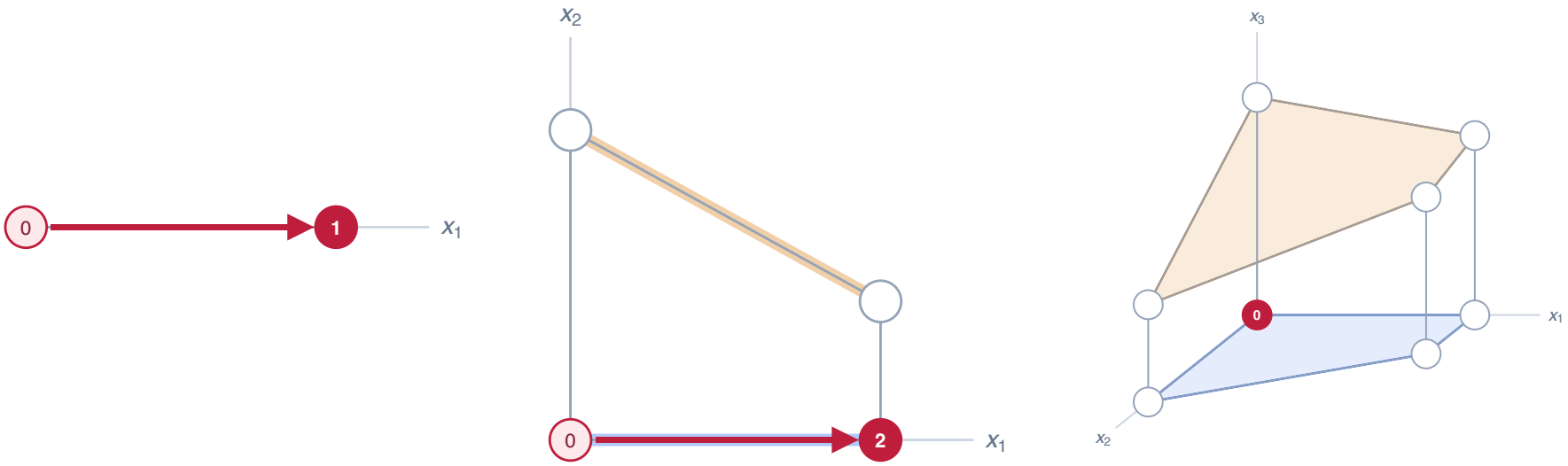
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n - 1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

Klee-Minty-Würfel: die Idee

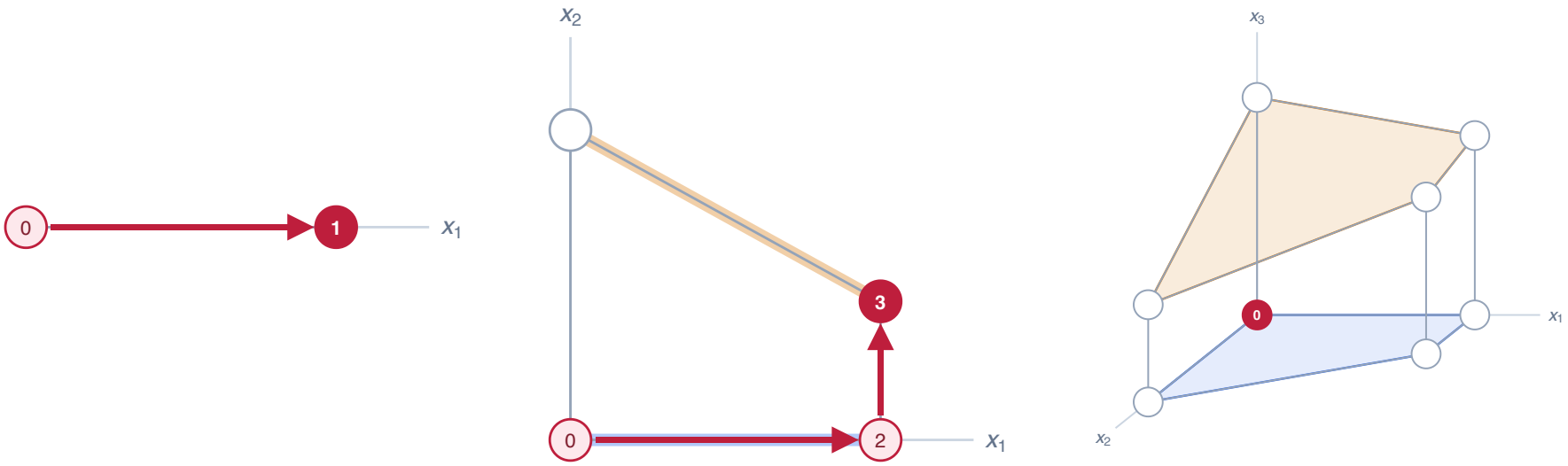
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n - 1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

Klee-Minty-Würfel: die Idee

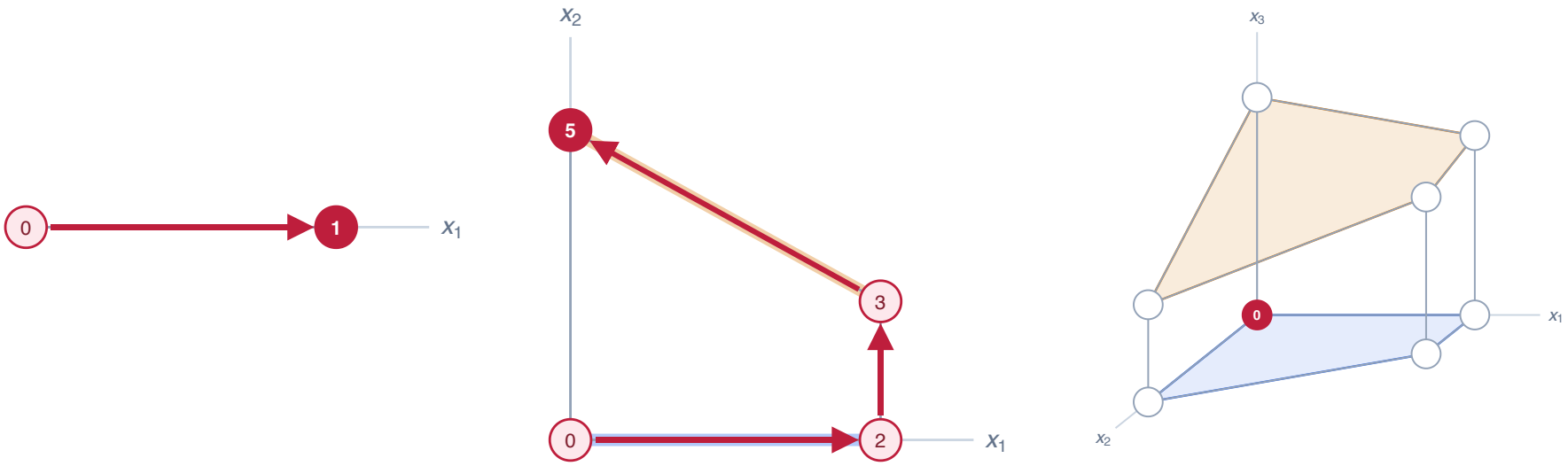
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n-1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

Klee-Minty-Würfel: die Idee

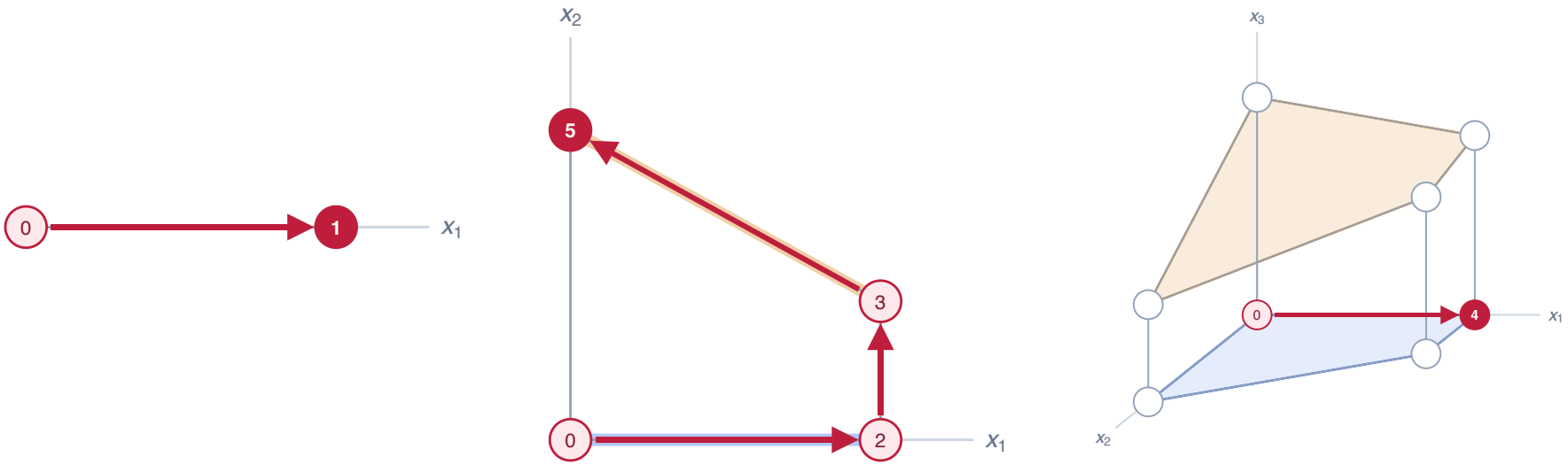
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n - 1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

Klee-Minty-Würfel: die Idee

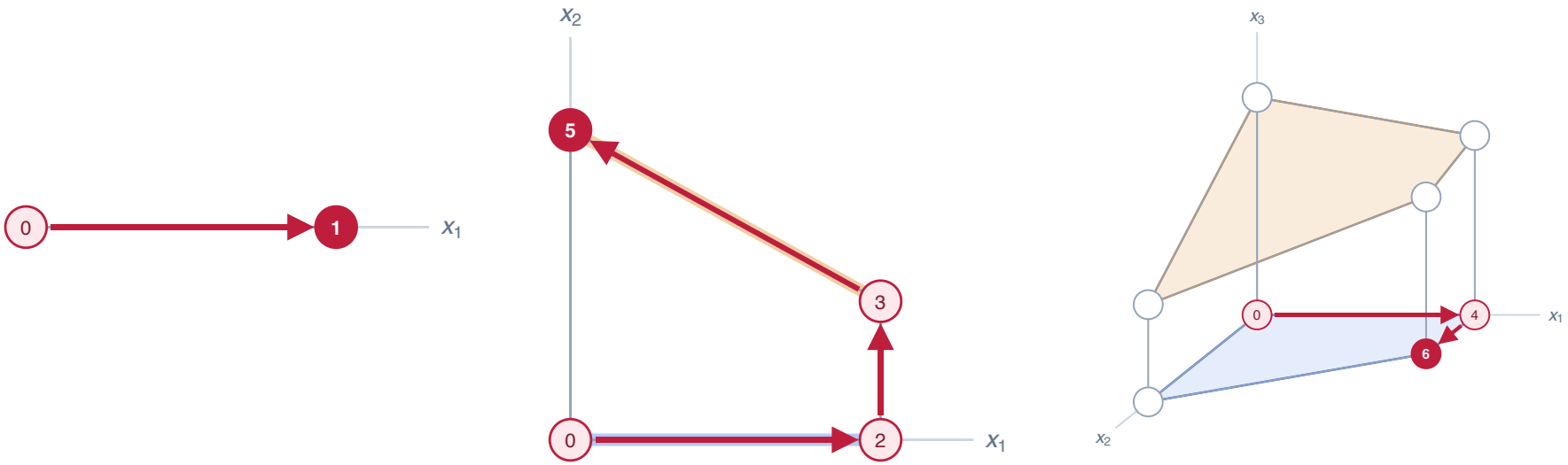
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n - 1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

Klee-Minty-Würfel: die Idee

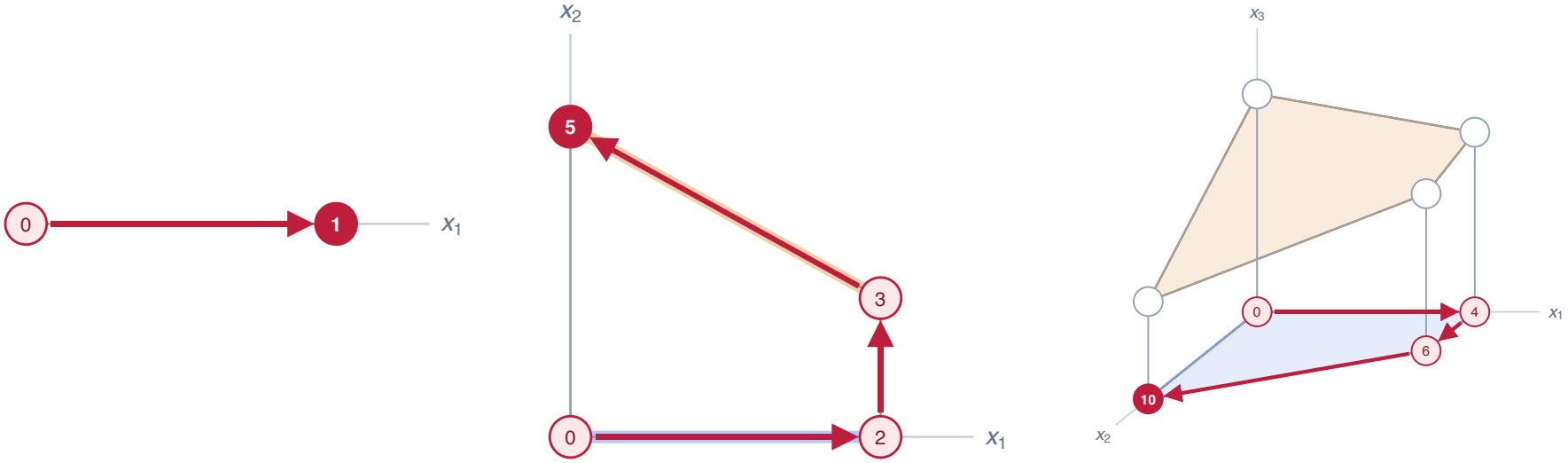
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n - 1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

Klee-Minty-Würfel: die Idee

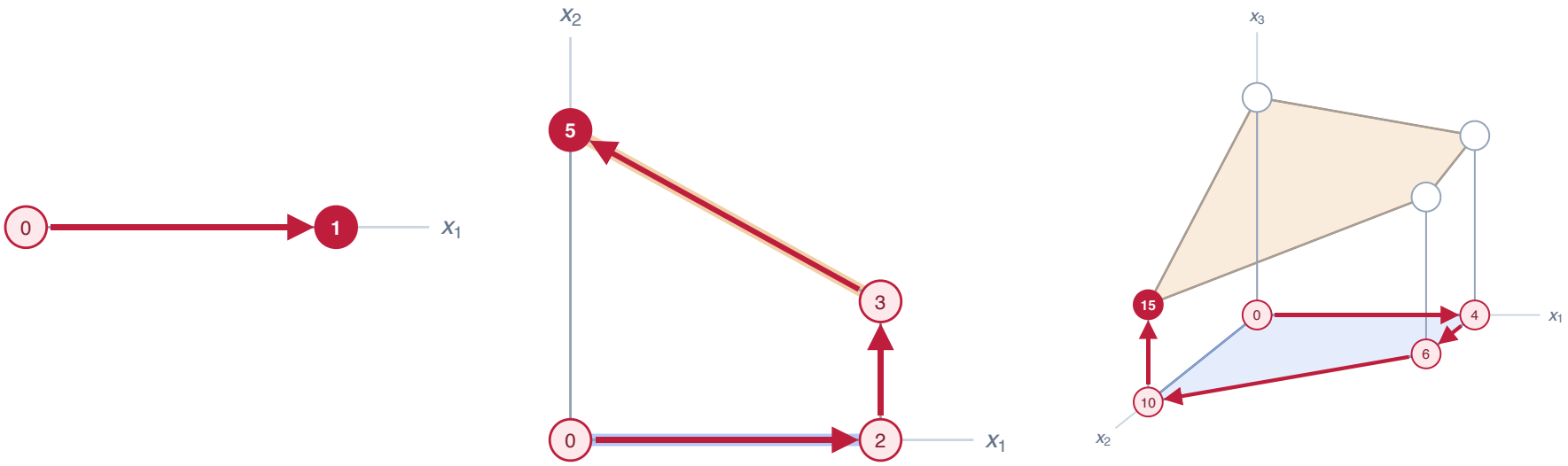
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n - 1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

Klee-Minty-Würfel: die Idee

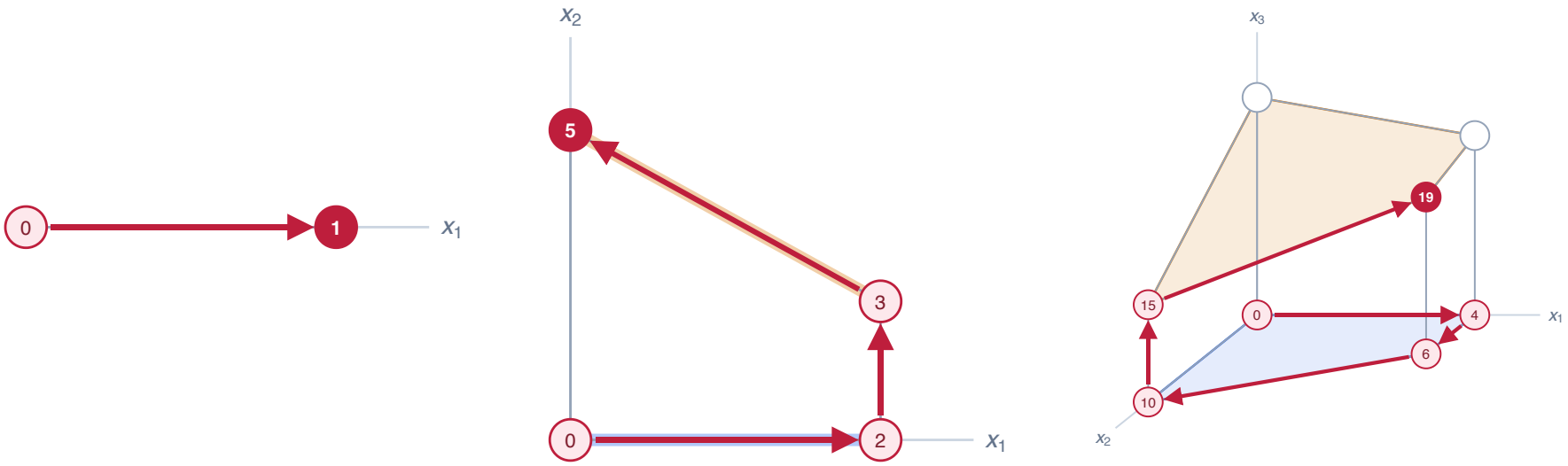
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n - 1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

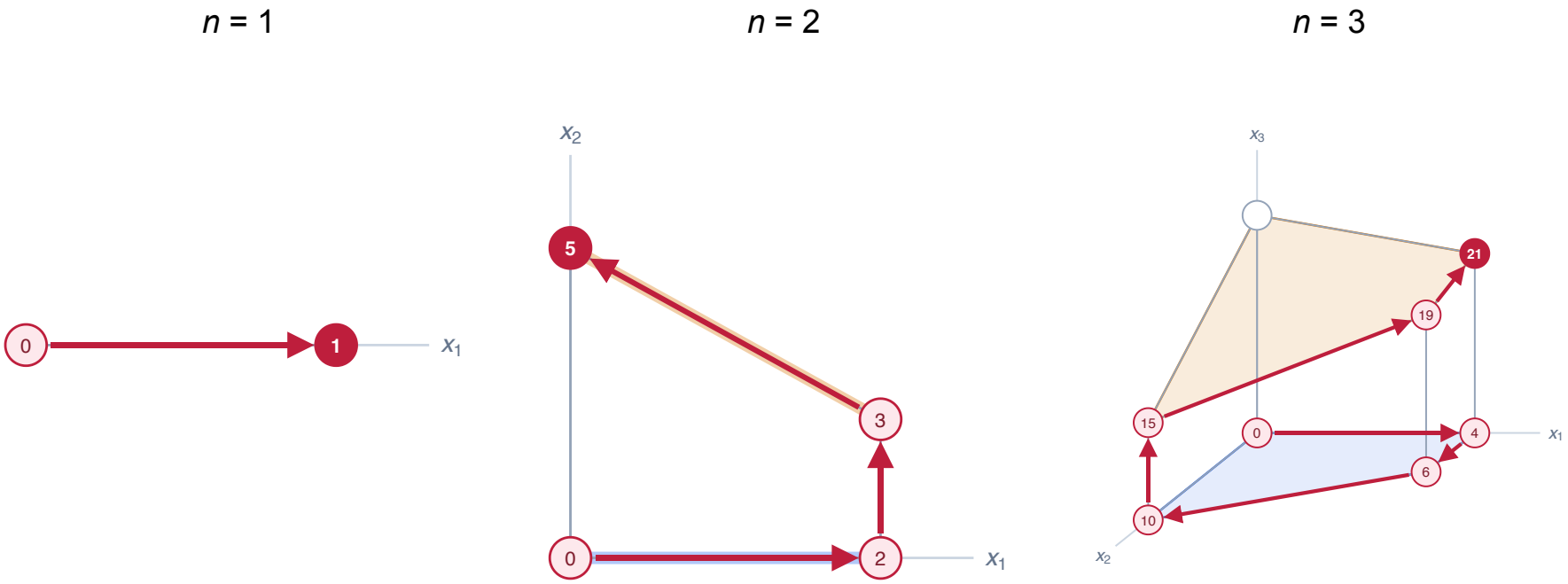
Klee-Minty-Würfel: die Idee

$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n - 1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

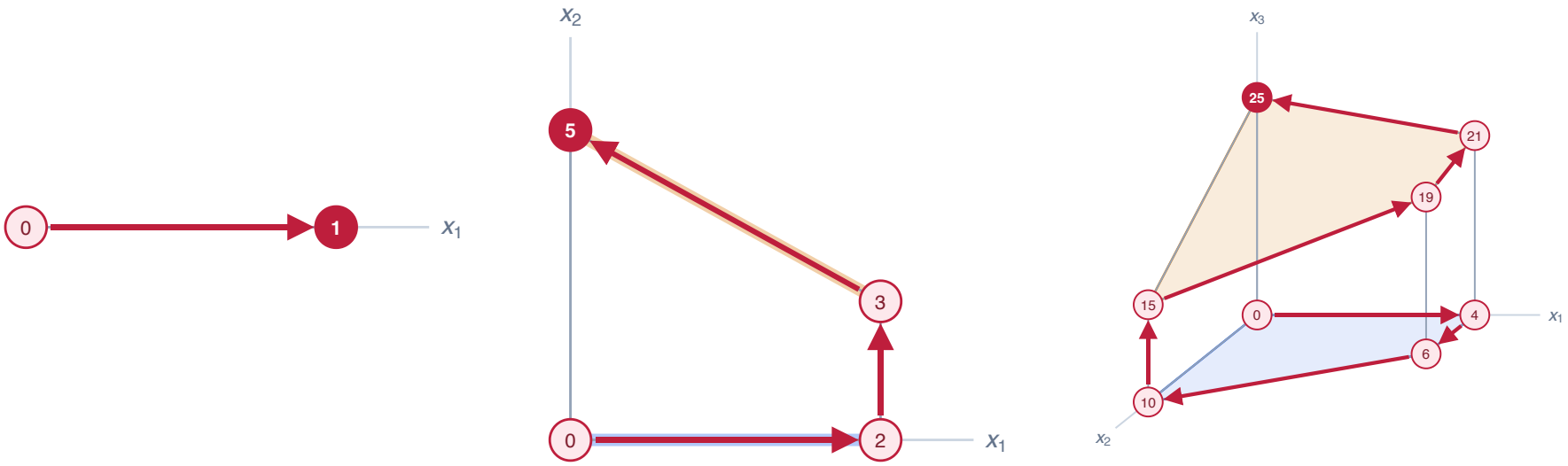
Klee-Minty-Würfel: die Idee



Prisma über dem Würfel der Dimension $n-1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

Klee-Minty-Würfel: die Idee

$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$



Prisma über dem Würfel der Dimension $n - 1$: **Boden** = alter Weg, dann x_n erhöhen, **Deckel** = alter Weg **rückwärts**. Zahlen: ζ in der Ecke.

Klee-Minty-Würfel: das LP

Sei $\beta > 4$ (z. B. $\beta = 5$; bei Vanderbei $\beta = 100$):

$$\max\ \zeta_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \le \beta^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n), \qquad x \ge 0$$

Klee-Minty-Würfel: das LP

Sei $\beta > 4$ (z. B. $\beta = 5$; bei Vanderbei $\beta = 100$):

$$\max\ \zeta_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \le \beta^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n), \qquad x \ge 0$$

- $n = 3, \beta = 5$: $\max\ 4x_1 + 2x_2 + x_3$ s.t. $x_1 \le 1,\ \ 4x_1 + x_2 \le 5,\ \ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25$

Klee-Minty-Würfel: das LP

Sei $\beta > 4$ (z. B. $\beta = 5$; bei Vanderbei $\beta = 100$):

$$\max\ \zeta_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \le \beta^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n), \qquad x \ge 0$$

- $n = 3, \beta = 5$: $\max\ 4x_1 + 2x_2 + x_3$ s.t. $x_1 \le 1,\ \ 4x_1 + x_2 \le 5,\ \ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25$
- Insbesondere: $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 25$ (verzerrter Würfel)

Klee-Minty-Würfel: das LP

Sei $\beta > 4$ (z. B. $\beta = 5$; bei Vanderbei $\beta = 100$):

$$\max\ \zeta_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \le \beta^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n), \qquad x \ge 0$$

- $n = 3, \beta = 5$: $\max\ 4x_1 + 2x_2 + x_3$ s.t. $x_1 \le 1,\ \ 4x_1 + x_2 \le 5,\ \ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25$
- Insbesondere: $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 25$ (verzerrter Würfel)
- **Rekursiv:** $\zeta_n = 2\zeta_{n-1} + x_n$, und die letzte Nebenbedingung ist $4\zeta_{n-1} + x_n \le \beta^{n-1}$.

Klee-Minty-Würfel: das LP

Sei $\beta > 4$ (z. B. $\beta = 5$; bei Vanderbei $\beta = 100$):

$$\max\ \zeta_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \le \beta^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n), \qquad x \ge 0$$

- $n = 3, \beta = 5$: $\max\ 4x_1 + 2x_2 + x_3$ s.t. $x_1 \le 1,\ \ 4x_1 + x_2 \le 5,\ \ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25$
- Insbesondere: $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 25$ (verzerrter Würfel)
- **Rekursiv:** $\zeta_n = 2\zeta_{n-1} + x_n$, und die letzte Nebenbedingung ist $4\zeta_{n-1} + x_n \le \beta^{n-1}$.
- **Boden** ($x_n = 0$): $\zeta_n = 2\zeta_{n-1}$ – dasselbe Problem wie in Dimension $n - 1$.

Klee-Minty-Würfel: das LP

Sei $\beta > 4$ (z. B. $\beta = 5$; bei Vanderbei $\beta = 100$):

$$\max\ \zeta_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \le \beta^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n), \qquad x \ge 0$$

- $n = 3, \beta = 5$: $\max\ 4x_1 + 2x_2 + x_3$ s.t. $x_1 \le 1,\ \ 4x_1 + x_2 \le 5,\ \ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25$
- Insbesondere: $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 25$ (verzerrter Würfel)
- **Rekursiv:** $\zeta_n = 2\zeta_{n-1} + x_n$, und die letzte Nebenbedingung ist $4\zeta_{n-1} + x_n \le \beta^{n-1}$.
- **Boden** ($x_n = 0$): $\zeta_n = 2\zeta_{n-1}$ – dasselbe Problem wie in Dimension $n - 1$.
- **Deckel** ($w_n = 0$): $x_n = \beta^{n-1} - 4\zeta_{n-1}$, also $\zeta_n = \beta^{n-1} - 2\zeta_{n-1}$ – Zielfunktion **gespiegelt**!

Klee-Minty-Würfel: das LP

Sei $\beta > 4$ (z. B. $\beta = 5$; bei Vanderbei $\beta = 100$):

$$\max\ \zeta_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \le \beta^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n), \qquad x \ge 0$$

- $n = 3, \beta = 5$: $\max\ 4x_1 + 2x_2 + x_3$ s.t. $x_1 \le 1,\ \ 4x_1 + x_2 \le 5,\ \ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25$
- Insbesondere: $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 25$ (verzerrter Würfel)
- **Rekursiv:** $\zeta_n = 2\zeta_{n-1} + x_n$, und die letzte Nebenbedingung ist $4\zeta_{n-1} + x_n \le \beta^{n-1}$.
- **Boden** ($x_n = 0$): $\zeta_n = 2\zeta_{n-1}$ – dasselbe Problem wie in Dimension $n - 1$.
- **Deckel** ($w_n = 0$): $x_n = \beta^{n-1} - 4\zeta_{n-1}$, also $\zeta_n = \beta^{n-1} - 2\zeta_{n-1}$ – Zielfunktion **gespiegelt**!
- $\beta > 4$**:** Mit $\zeta_{n-1} \le \beta^{n-2}$ ist jede Ecke oben besser als jede unten: $\beta^{n-1} - 2\beta^{n-2} > 2\beta^{n-2}$.

Klee-Minty-Würfel: das LP

Sei $\beta > 4$ (z. B. $\beta = 5$; bei Vanderbei $\beta = 100$):

$$\max\ \zeta_n = \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} x_j \quad \text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j + x_i \le \beta^{i-1} \quad (i = 1, \dots, n), \qquad x \ge 0$$

- $n = 3, \beta = 5$: $\max\ 4x_1 + 2x_2 + x_3$ s.t. $x_1 \le 1,\ \ 4x_1 + x_2 \le 5,\ \ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \le 25$
- Insbesondere: $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 5, 0 \le x_3 \le 25$ (verzerrter Würfel)
- **Rekursiv:** $\zeta_n = 2\zeta_{n-1} + x_n$, und die letzte Nebenbedingung ist $4\zeta_{n-1} + x_n \le \beta^{n-1}$.
- **Boden** ($x_n = 0$): $\zeta_n = 2\zeta_{n-1}$ – dasselbe Problem wie in Dimension $n - 1$.
- **Deckel** ($w_n = 0$): $x_n = \beta^{n-1} - 4\zeta_{n-1}$, also $\zeta_n = \beta^{n-1} - 2\zeta_{n-1}$ – Zielfunktion **gespiegelt**!
- $\beta > 4$**:** Mit $\zeta_{n-1} \le \beta^{n-2}$ ist jede Ecke oben besser als jede unten: $\beta^{n-1} - 2\beta^{n-2} > 2\beta^{n-2}$.
- Beste Basis: $\mathcal{B} = \{x_n, w_1, \dots, w_{n-1}\}$

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \\
\hline
w_1 &= 1 - x_1 \\
w_2 &= 5 - 4x_1 - x_2 \\
w_3 &= 25 - 8x_1 - 4x_2 - x_3 \\
w_4 &= 125 - 16x_1 - 8x_2 - 4x_3 - x_4
\end{aligned}
$$



Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i,
ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 8 - 8w_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \\
\hline
x_1 &= 1 - w_1 \\
w_2 &= 1 + 4w_1 - x_2 \\
w_3 &= 17 + 8w_1 - 4x_2 - x_3 \\
w_4 &= 109 + 16w_1 - 8x_2 - 4x_3 - x_4
\end{aligned}
$$

x_1 tritt in die Basis ein, w_1 tritt aus



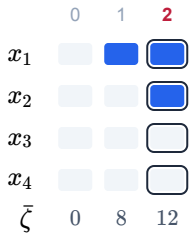
Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 12 + 8w_1 - 4w_2 + 2x_3 + x_4 \\
\hline
x_1 &= 1 - w_1 \\
x_2 &= 1 + 4w_1 - w_2 \\
w_3 &= 13 - 8w_1 + 4w_2 - x_3 \\
w_4 &= 101 - 16w_1 + 8w_2 - 4x_3 - x_4
\end{aligned}
$$

x_2 tritt in die Basis ein, w_2 tritt aus



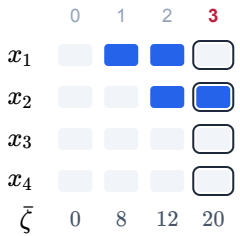
Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i,
ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 20 - 8x_1 - 4w_2 + 2x_3 + x_4 \\
\hline
w_1 &= 1 - x_1 \\
x_2 &= 5 - 4x_1 - w_2 \\
w_3 &= 5 + 8x_1 + 4w_2 - x_3 \\
w_4 &= 85 + 16x_1 + 8w_2 - 4x_3 - x_4
\end{aligned}
$$

w_1 tritt in die Basis ein, x_1 tritt aus



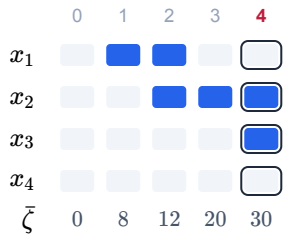
Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 30 + 8x_1 + 4w_2 - 2w_3 + x_4 \\
\hline
w_1 &= 1 - x_1 \\
x_2 &= 5 - 4x_1 - w_2 \\
x_3 &= 5 + 8x_1 + 4w_2 - w_3 \\
w_4 &= 65 - 16x_1 - 8w_2 + 4w_3 - x_4
\end{aligned}
$$

x_3 tritt in die Basis ein, w_3 tritt aus



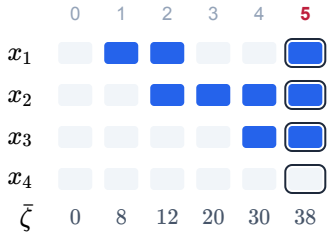
Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 38 - 8w_1 + 4w_2 - 2w_3 + x_4 \\
\hline
x_1 &= 1 - w_1 \\
x_2 &= 1 + 4w_1 - w_2 \\
x_3 &= 13 - 8w_1 + 4w_2 - w_3 \\
w_4 &= 49 + 16w_1 - 8w_2 + 4w_3 - x_4
\end{aligned}
$$

x_1 tritt in die Basis ein, w_1 tritt aus



Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 42 + 8w_1 - 4x_2 - 2w_3 + x_4 \\
\hline
x_1 &= 1 - w_1 \\
w_2 &= 1 + 4w_1 - x_2 \\
x_3 &= 17 + 8w_1 - 4x_2 - w_3 \\
w_4 &= 41 - 16w_1 + 8x_2 + 4w_3 - x_4
\end{aligned}
$$

w_2 tritt in die Basis ein, x_2 tritt aus



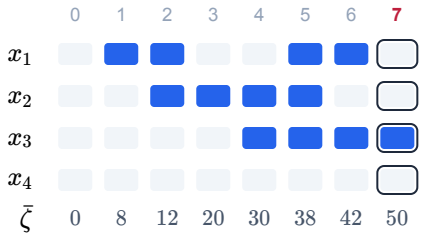
Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 50 - 8x_1 - 4x_2 - 2w_3 + x_4 \\
\hline
w_1 &= 1 - x_1 \\
w_2 &= 5 - 4x_1 - x_2 \\
x_3 &= 25 - 8x_1 - 4x_2 - w_3 \\
w_4 &= 25 + 16x_1 + 8x_2 + 4w_3 - x_4
\end{aligned}
$$

w_1 tritt in die Basis ein, x_1 tritt aus



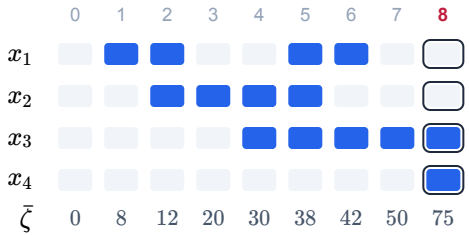
Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 75 + 8x_1 + 4x_2 + 2w_3 - w_4 \\
\hline
w_1 &= 1 - x_1 \\
w_2 &= 5 - 4x_1 - x_2 \\
x_3 &= 25 - 8x_1 - 4x_2 - w_3 \\
x_4 &= 25 + 16x_1 + 8x_2 + 4w_3 - w_4
\end{aligned}
$$

x_4 tritt in die Basis ein, w_4 tritt aus



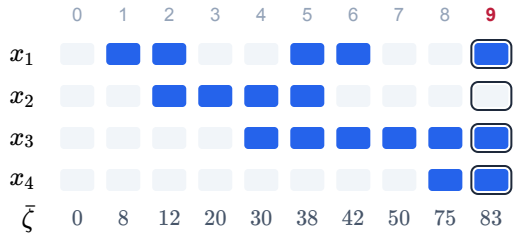
Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 83 - 8w_1 + 4x_2 + 2w_3 - w_4 \\
\hline
x_1 &= 1 - w_1 \\
w_2 &= 1 + 4w_1 - x_2 \\
x_3 &= 17 + 8w_1 - 4x_2 - w_3 \\
x_4 &= 41 - 16w_1 + 8x_2 + 4w_3 - w_4
\end{aligned}
$$

x_1 tritt in die Basis ein, w_1 tritt aus



Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 87 + 8w_1 - 4w_2 + 2w_3 - w_4 \\
\hline
x_1 &= 1 - w_1 \\
x_2 &= 1 + 4w_1 - w_2 \\
x_3 &= 13 - 8w_1 + 4w_2 - w_3 \\
x_4 &= 49 + 16w_1 - 8w_2 + 4w_3 - w_4
\end{aligned}
$$

x_2 tritt in die Basis ein, w_2 tritt aus



Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 95 - 8x_1 - 4w_2 + 2w_3 - w_4 \\
\hline
w_1 &= 1 - x_1 \\
x_2 &= 5 - 4x_1 - w_2 \\
x_3 &= 5 + 8x_1 + 4w_2 - w_3 \\
x_4 &= 65 - 16x_1 - 8w_2 + 4w_3 - w_4
\end{aligned}
$$

w_1 tritt in die Basis ein, x_1 tritt aus



Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 105 + 8x_1 + 4w_2 - 2x_3 - w_4 \\
\hline
w_1 &= 1 - x_1 \\
x_2 &= 5 - 4x_1 - w_2 \\
w_3 &= 5 + 8x_1 + 4w_2 - x_3 \\
x_4 &= 85 + 16x_1 + 8w_2 - 4x_3 - w_4
\end{aligned}
$$

w_3 tritt in die Basis ein, x_3 tritt aus



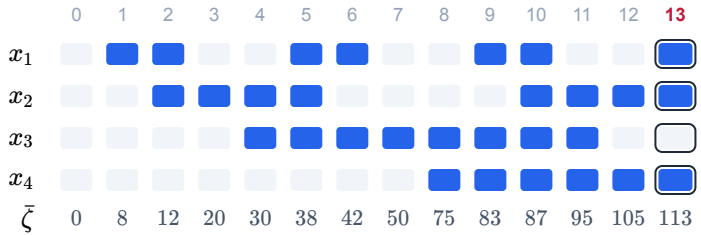
Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 113 - 8w_1 + 4w_2 - 2x_3 - w_4 \\
\hline
x_1 &= 1 - w_1 \\
x_2 &= 1 + 4w_1 - w_2 \\
w_3 &= 13 - 8w_1 + 4w_2 - x_3 \\
x_4 &= 101 - 16w_1 + 8w_2 - 4x_3 - w_4
\end{aligned}
$$

x_1 tritt in die Basis ein, w_1 tritt aus



Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 117 + 8w_1 - 4x_2 - 2x_3 - w_4 \\
\hline
x_1 &= 1 - w_1 \\
w_2 &= 1 + 4w_1 - x_2 \\
w_3 &= 17 + 8w_1 - 4x_2 - x_3 \\
x_4 &= 109 + 16w_1 - 8x_2 - 4x_3 - w_4
\end{aligned}
$$

w_2 tritt in die Basis ein, x_2 tritt aus



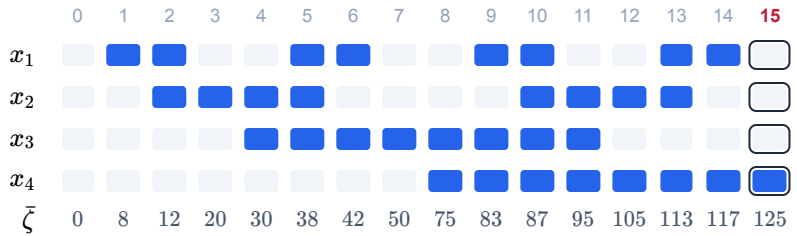
Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i,
ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 125 - 8x_1 - 4x_2 - 2x_3 - w_4 \\
\hline
w_1 &= 1 - x_1 \\
w_2 &= 5 - 4x_1 - x_2 \\
w_3 &= 25 - 8x_1 - 4x_2 - x_3 \\
x_4 &= 125 - 16x_1 - 8x_2 - 4x_3 - w_4
\end{aligned}
$$

w_1 tritt in die Basis ein, x_1 tritt aus



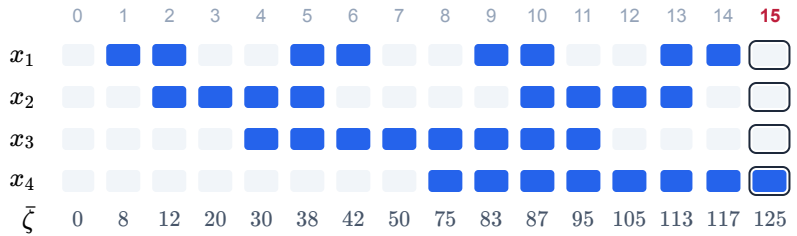
Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel in 4D

$$\begin{aligned}
\zeta &= 125 - 8x_1 - 4x_2 - 2x_3 - w_4 \\
\hline
w_1 &= 1 - x_1 \\
w_2 &= 5 - 4x_1 - x_2 \\
w_3 &= 25 - 8x_1 - 4x_2 - x_3 \\
x_4 &= 125 - 16x_1 - 8x_2 - 4x_3 - w_4
\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal



Regel des größten Koeffizienten, ein Pivotschritt pro Klick. Unten: welche x_i in der Basis sind (blau) – ein Gray-Code, alle $2^4 = 16$ Ecken.

Beobachtungen: stets entweder w_i oder x_i in Basis, Pivots nur zwischen w_i und x_i, ζ-Koeffizienten bleiben (nur Variable und Vorzeichen wechseln)

Klee-Minty-Würfel: Laufzeit

Lemma (Klee, Minty 1972)

Mit der Regel des größten Koeffizienten braucht der Simplex-Algorithmus auf dem Klee-Minty-Würfel $2^n - 1$ Pivotschritte und besucht alle 2^n Ecken.

Klee-Minty-Würfel: Laufzeit

Lemma (Klee, Minty 1972)

Mit der Regel des größten Koeffizienten braucht der Simplex-Algorithmus auf dem Klee-Minty-Würfel $2^n - 1$ Pivotschritte und besucht alle 2^n Ecken.

- **Beweisidee (Induktion über n):** Die Koeffizienten von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (bzw. $w_1, \ldots, w_{n-1}$) in ζ_n sind doppelt so groß wie in ζ_{n-1}, also mindestens 2; x_n hat Koeffizient 1.

Klee-Minty-Würfel: Laufzeit

Lemma (Klee, Minty 1972)

Mit der Regel des größten Koeffizienten braucht der Simplex-Algorithmus auf dem Klee-Minty-Würfel $2^n - 1$ Pivotschritte und besucht alle 2^n Ecken.

- **Beweisidee (Induktion über n):** Die Koeffizienten von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (bzw. $w_1, \ldots, w_{n-1}$) in ζ_n sind doppelt so groß wie in ζ_{n-1}, also mindestens 2; x_n hat Koeffizient 1.
- Also tritt x_n erst ein, wenn unten nichts mehr geht: $2^{n-1} - 1$ Schritte auf dem Boden.

Klee-Minty-Würfel: Laufzeit

Lemma (Klee, Minty 1972)

Mit der Regel des größten Koeffizienten braucht der Simplex-Algorithmus auf dem Klee-Minty-Würfel $2^n - 1$ Pivotschritte und besucht alle 2^n Ecken.

- **Beweisidee (Induktion über n):** Die Koeffizienten von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (bzw. $w_1, \ldots, w_{n-1}$) in ζ_n sind doppelt so groß wie in ζ_{n-1}, also mindestens 2; x_n hat Koeffizient 1.
- Also tritt x_n erst ein, wenn unten nichts mehr geht: $2^{n-1} - 1$ Schritte auf dem Boden.
- Ein Schritt nach oben (x_n tritt ein, w_n tritt aus).

Klee-Minty-Würfel: Laufzeit

Lemma (Klee, Minty 1972)

Mit der Regel des größten Koeffizienten braucht der Simplex-Algorithmus auf dem Klee-Minty-Würfel $2^n - 1$ Pivotschritte und besucht alle 2^n Ecken.

- **Beweisidee (Induktion über n):** Die Koeffizienten von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (bzw. $w_1, \ldots, w_{n-1}$) in ζ_n sind doppelt so groß wie in ζ_{n-1}, also mindestens 2; x_n hat Koeffizient 1.
- Also tritt x_n erst ein, wenn unten nichts mehr geht: $2^{n-1} - 1$ Schritte auf dem Boden.
- Ein Schritt nach oben (x_n tritt ein, w_n tritt aus).
- Oben ist die Zielfunktion gespiegelt: derselbe Weg rückwärts, $2^{n-1} - 1$ Schritte.

Klee-Minty-Würfel: Laufzeit

Lemma (Klee, Minty 1972)

Mit der Regel des größten Koeffizienten braucht der Simplex-Algorithmus auf dem Klee-Minty-Würfel $2^n - 1$ Pivotschritte und besucht alle 2^n Ecken.

- **Beweisidee (Induktion über n):** Die Koeffizienten von $x_1, \ldots, x_{n-1}$ (bzw. $w_1, \ldots, w_{n-1}$) in ζ_n sind doppelt so groß wie in ζ_{n-1}, also mindestens 2; x_n hat Koeffizient 1.
- Also tritt x_n erst ein, wenn unten nichts mehr geht: $2^{n-1} - 1$ Schritte auf dem Boden.
- Ein Schritt nach oben (x_n tritt ein, w_n tritt aus).
- Oben ist die Zielfunktion gespiegelt: derselbe Weg rückwärts, $2^{n-1} - 1$ Schritte.
- Insgesamt $2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$.

Simplex in der Praxis

Simplex in der Praxis

- Mit der Regel des größten Koeffizienten brauchen wir im schlimmsten Fall **exponentiell** viele Schritte.

Simplex in der Praxis

- Mit der Regel des größten Koeffizienten brauchen wir im schlimmsten Fall **exponentiell** viele Schritte.
- Ähnliche Beispiele gibt es für viele andere Regeln (größter Zuwachs, Bland, …).

Simplex in der Praxis

- Mit der Regel des größten Koeffizienten brauchen wir im schlimmsten Fall **exponentiell** viele Schritte.
- Ähnliche Beispiele gibt es für viele andere Regeln (größter Zuwachs, Bland, …).
- **Offen:** Gibt es eine Pivotregel mit polynomiell vielen Schritten?

Simplex in der Praxis

- Mit der Regel des größten Koeffizienten brauchen wir im schlimmsten Fall **exponentiell** viele Schritte.
- Ähnliche Beispiele gibt es für viele andere Regeln (größter Zuwachs, Bland, …).
- **Offen:** Gibt es eine Pivotregel mit polynomiell vielen Schritten?
- **In der Praxis** ist Simplex trotzdem sehr schnell: meist nur ein kleines Vielfaches von m Iterationen.

Simplex in der Praxis

- Mit der Regel des größten Koeffizienten brauchen wir im schlimmsten Fall **exponentiell** viele Schritte.
- Ähnliche Beispiele gibt es für viele andere Regeln (größter Zuwachs, Bland, …).
- **Offen:** Gibt es eine Pivotregel mit polynomiell vielen Schritten?
- **In der Praxis** ist Simplex trotzdem sehr schnell: meist nur ein kleines Vielfaches von m Iterationen.
- Erklärungsversuch *smoothed analysis* (Spielman, Teng 2001):

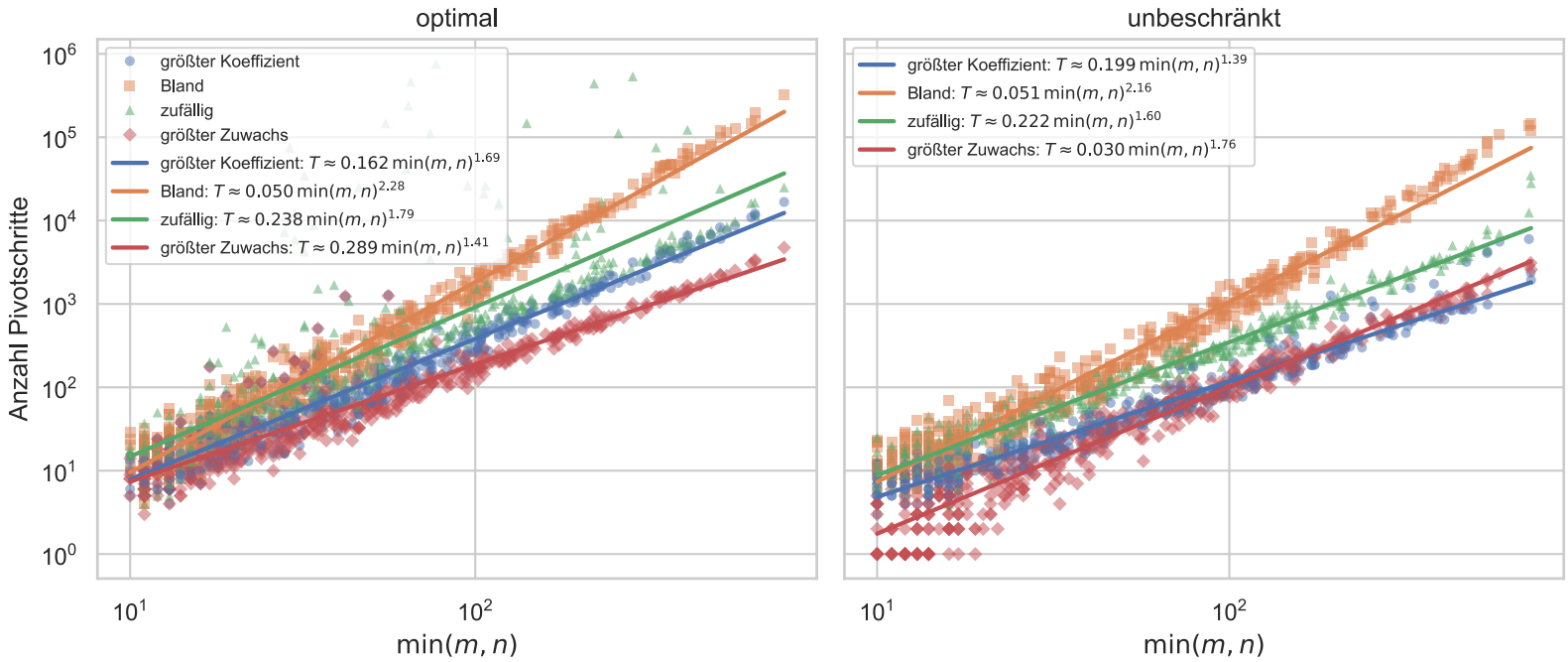
  Bei leicht zufällig gestörten Eingaben ist die erwartete Laufzeit polynomiell.

Simplex in der Praxis

- Mit der Regel des größten Koeffizienten brauchen wir im schlimmsten Fall **exponentiell** viele Schritte.
- Ähnliche Beispiele gibt es für viele andere Regeln (größter Zuwachs, Bland, …).
- **Offen:** Gibt es eine Pivotregel mit polynomiell vielen Schritten?
- **In der Praxis** ist Simplex trotzdem sehr schnell: meist nur ein kleines Vielfaches von m Iterationen.
- Erklärungsversuch *smoothed analysis* (Spielman, Teng 2001):

  Bei leicht zufällig gestörten Eingaben ist die erwartete Laufzeit polynomiell.
- LPs sind trotzdem in Polynomialzeit lösbar – mit anderen Verfahren (später mehr)

Experiment: Pivotregeln auf Zufalls-LPs



1000 Zufalls-LPs wie bei Vanderbei 4.5 ($m, n \in [10, 1000]$ log-gleichverteilt), alle Regeln auf denselben Instanzen

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: degeneriert, Zykeln, lexikographische Ordnung, Pivotregel, Klee-Minty-Würfel

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: degeneriert, Zykeln, lexikographische Ordnung, Pivotregel, Klee-Minty-Würfel

- Degenerierte Pivots ändern die Basis, aber nicht die Basislösung, und können zum Zykeln führen.

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: degeneriert, Zykeln, lexikographische Ordnung, Pivotregel, Klee-Minty-Würfel

- Degenerierte Pivots ändern die Basis, aber nicht die Basislösung, und können zum Zykeln führen.
- Simplex terminiert nicht $\Leftrightarrow$ Simplex zykelt.

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: degeneriert, Zykeln, lexikographische Ordnung, Pivotregel, Klee-Minty-Würfel

- Degenerierte Pivots ändern die Basis, aber nicht die Basislösung, und können zum Zykeln führen.
- Simplex terminiert nicht $\Leftrightarrow$ Simplex zykelt.
- Lexikographische Methode und Bland's Pivotregel verhindern Zykeln.

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: degeneriert, Zykeln, lexikographische Ordnung, Pivotregel, Klee-Minty-Würfel

- Degenerierte Pivots ändern die Basis, aber nicht die Basislösung, und können zum Zykeln führen.
- Simplex terminiert nicht $\Leftrightarrow$ Simplex zykelt.
- Lexikographische Methode und Bland's Pivotregel verhindern Zykeln.
- Daraus folgt der Fundamentalsatz algorithmisch.

Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: degeneriert, Zykeln, lexikographische Ordnung, Pivotregel, Klee-Minty-Würfel

- Degenerierte Pivots ändern die Basis, aber nicht die Basislösung, und können zum Zykeln führen.
- Simplex terminiert nicht $\Leftrightarrow$ Simplex zykelt.
- Lexikographische Methode und Bland's Pivotregel verhindern Zykeln.
- Daraus folgt der Fundamentalsatz algorithmisch.
- Eine Iteration ist polynomiell, aber die Anzahl der Iterationen kann exponentiell sein (Klee-Minty).

Nächste Woche

Nächste Woche

- Jede zulässige Lösung, die Simplex unterwegs findet, ist eine **untere Schranke** für das Optimum.

Nächste Woche

- Jede zulässige Lösung, die Simplex unterwegs findet, ist eine **untere Schranke** für das Optimum.
- Können wir auch **obere Schranken** bestimmen?

Nächste Woche

- Jede zulässige Lösung, die Simplex unterwegs findet, ist eine **untere Schranke** für das Optimum.
- Können wir auch **obere Schranken** bestimmen?
- Können wir so beweisen, dass eine Lösung optimal ist, ohne Simplex nachzurechnen?

Nächste Woche

- Jede zulässige Lösung, die Simplex unterwegs findet, ist eine **untere Schranke** für das Optimum.
- Können wir auch **obere Schranken** bestimmen?
- Können wir so beweisen, dass eine Lösung optimal ist, ohne Simplex nachzurechnen?

  $\Rightarrow$ **Dualität**