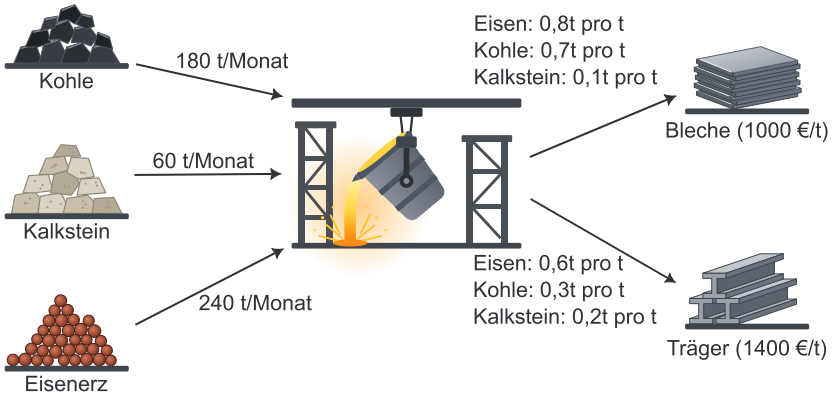
Technische Universität Braunschweig

Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Algorithmik

Mathematische Methoden der Algorithmik
Der Simplex-Algorithmus

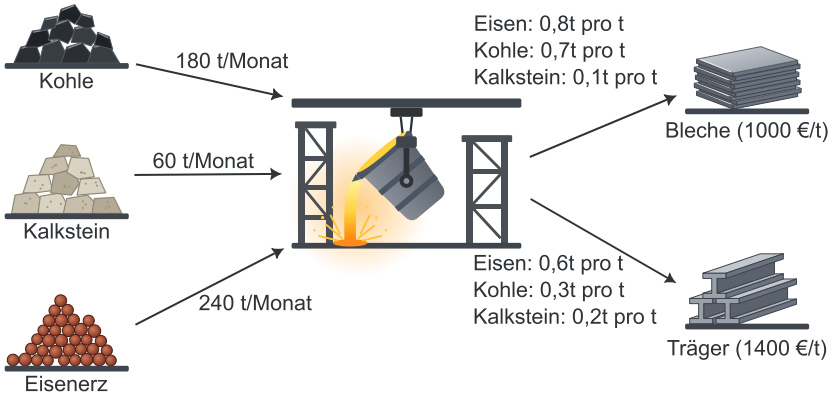
Wintersemester 2026/27

Letzte Woche



$$
\begin{aligned}
\max\ & 1000\,x_b + 1400\,x_t \\
\text{s.t. } & 0.8\,x_b + 0.6\,x_t \leq 240 \\
& 0.7\,x_b + 0.3\,x_t \leq 180 \\
& 0.1\,x_b + 0.2\,x_t \leq 60 \\
& x_b, x_t \geq 0
\end{aligned}
$$

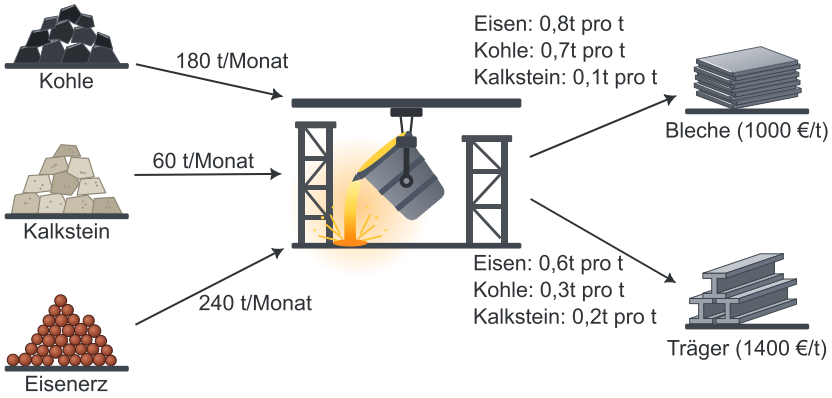
Letzte Woche



$$
\begin{aligned}
\max\ & 1000\, x_b + 1400\, x_t \\
\text{s.t. } & 0.8\, x_b + 0.6\, x_t \leq 240 \\
& 0.7\, x_b + 0.3\, x_t \leq 180 \\
& 0.1\, x_b + 0.2\, x_t \leq 60 \\
& x_b, x_t \geq 0
\end{aligned}
$$

- *Standardform*: $\max \{c^\top x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$

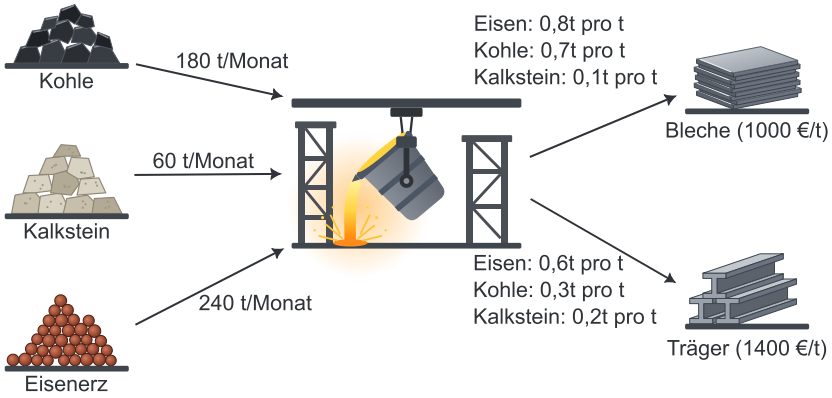
Letzte Woche



$$
\begin{aligned}
\max\ & 1000\, x_b + 1400\, x_t \\
\text{s.t. } & 0.8\, x_b + 0.6\, x_t \leq 240 \\
& 0.7\, x_b + 0.3\, x_t \leq 180 \\
& 0.1\, x_b + 0.2\, x_t \leq 60 \\
& x_b, x_t \geq 0
\end{aligned}
$$

- *Standardform*: $\max \{c^\top x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$
- *Lösung*, *Zulässigkeitsbereich* $\mathbb{L}(P)$, *(un)zulässig*

Letzte Woche



$$
\begin{aligned}
\max\ & 1000\,x_b + 1400\,x_t \\
\text{s.t. } & 0.8\,x_b + 0.6\,x_t \leq 240 \\
& 0.7\,x_b + 0.3\,x_t \leq 180 \\
& 0.1\,x_b + 0.2\,x_t \leq 60 \\
& x_b, x_t \geq 0
\end{aligned}
$$

- *Standardform*: $\max\{c^\top x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$
- *Lösung*, *Zulässigkeitsbereich* $\mathbb{L}(P)$, *(un)zulässig*
- *optimal*, *unbeschränkt*

Letzte Woche: Geometrie

symbolisch | konkret | Pfeil | 3D

$$\max \; c_b x_b + c_t x_t$$

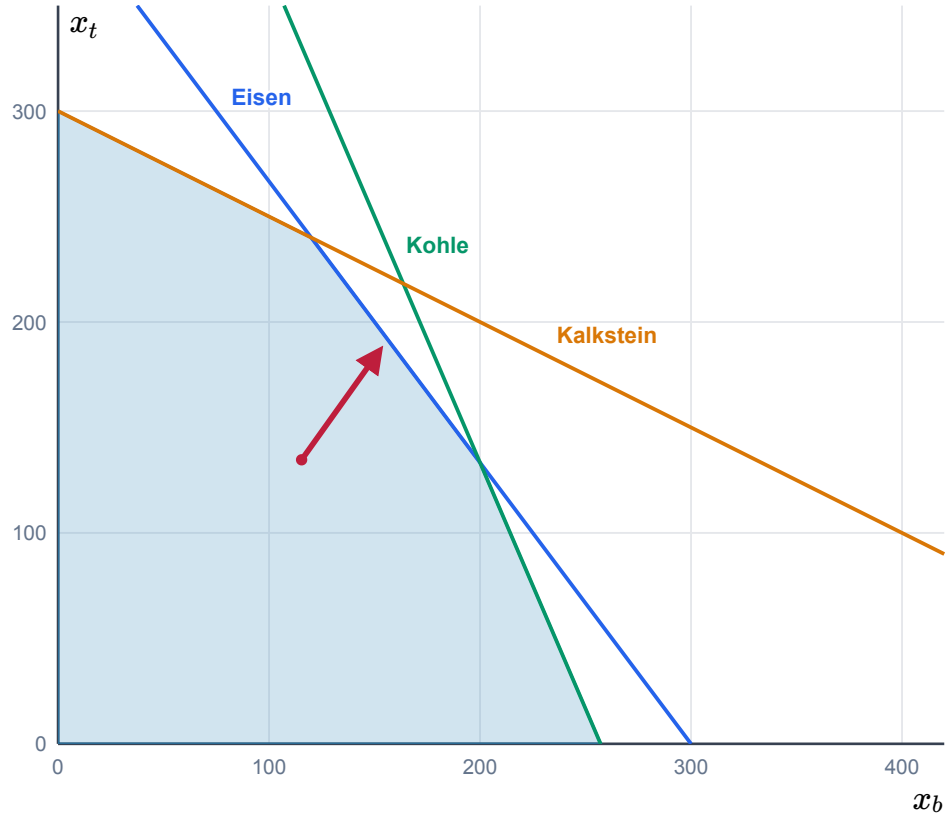
u.d.N.

$$a_{e,b} x_b + a_{e,t} x_t \leq b_e \quad \text{Eisen}$$

$$a_{k,b} x_b + a_{k,t} x_t \leq b_k \quad \text{Kohle}$$

$$a_{s,b} x_b + a_{s,t} x_t \leq b_s \quad \text{Kalkstein}$$

$$x_b, \; x_t \geq 0$$



Letzte Woche: Fundamentalsatz

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

Letzte Woche: Fundamentalsatz

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

- Trivialer Algorithmus: alle $\binom{m+n}{n}$ Kandidaten für Ecken durchprobieren

Letzte Woche: Fundamentalsatz

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

- Trivialer Algorithmus: alle $\binom{m+n}{n}$ Kandidaten für Ecken durchprobieren
- Endlich, aber viel zu langsam

Letzte Woche: Fundamentalsatz

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

- Trivialer Algorithmus: alle $\binom{m+n}{n}$ Kandidaten für Ecken durchprobieren
- Endlich, aber viel zu langsam
- **Heute:** von einer Ecke zu einer *benachbarten, besseren* Ecke laufen

Kapitel 2: Der Simplex-Algorithmus

Transformation des Problems

Transformation des Problems

- Ungleichungen können komplizierter sein als Gleichungen

Transformation des Problems

- Ungleichungen können komplizierter sein als Gleichungen
- Beim Fundamentalsatz: $\hat{A} = \binom{A}{-I}$, damit x zulässig gdw. $\hat{A}x \leq \hat{b}$

  (in VL 1: $\bar{A}, \bar{b}$ – den Balken brauchen wir heute für was anderes)

Transformation des Problems

- Ungleichungen können komplizierter sein als Gleichungen
- Beim Fundamentalsatz: $\hat{A} = \binom{A}{-I}$, damit x zulässig gdw. $\hat{A}x \leq \hat{b}$
  (in VL 1: $\bar{A}, \bar{b}$ – den Balken brauchen wir heute für was anderes)
- Haben aktive Zeilen betrachtet (und damit auf Gleichungen reduziert)

Transformation des Problems

- Ungleichungen können komplizierter sein als Gleichungen
- Beim Fundamentalsatz: $\hat{A} = \binom{A}{-I}$, damit x zulässig gdw. $\hat{A}x \leq \hat{b}$
  (in VL 1: $\bar{A}, \bar{b}$ – den Balken brauchen wir heute für was anderes)
- Haben aktive Zeilen betrachtet (und damit auf Gleichungen reduziert)
- Hier: Transformation in die Form $Ax = b, x \geq 0$

Transformation des Problems

- Ungleichungen können komplizierter sein als Gleichungen
- Beim Fundamentalsatz: $\hat{A} = \binom{A}{-I}$, damit x zulässig gdw. $\hat{A}x \leq \hat{b}$
  (in VL 1: $\bar{A}, \bar{b}$ – den Balken brauchen wir heute für was anderes)
- Haben aktive Zeilen betrachtet (und damit auf Gleichungen reduziert)
- Hier: Transformation in die Form $Ax = b, x \geq 0$
- **Frage:** Wie geht das?

Transformation des Problems

- Ungleichungen können komplizierter sein als Gleichungen
- Beim Fundamentalsatz: $\hat{A} = \binom{A}{-I}$, damit x zulässig gdw. $\hat{A}x \leq \hat{b}$
  (in VL 1: $\bar{A}, \bar{b}$ – den Balken brauchen wir heute für was anderes)
- Haben aktive Zeilen betrachtet (und damit auf Gleichungen reduziert)
- Hier: Transformation in die Form $Ax = b, x \geq 0$
- **Frage:** Wie geht das?
- **Antwort:** Einführen von Schlupfvariablen (*slack variables*) $w_i \geq 0, i \in \{1, \ldots, m\}$

Transformation des Problems

- Ungleichungen können komplizierter sein als Gleichungen
- Beim Fundamentalsatz: $\hat{A} = \binom{A}{-I}$, damit x zulässig gdw. $\hat{A}x \leq \hat{b}$
  (in VL 1: $\bar{A}, \bar{b}$ – den Balken brauchen wir heute für was anderes)
- Haben aktive Zeilen betrachtet (und damit auf Gleichungen reduziert)
- Hier: Transformation in die Form $Ax = b, x \geq 0$
- **Frage:** Wie geht das?
- **Antwort:** Einführen von Schlupfvariablen (*slack variables*) $w_i \geq 0, i \in \{1, \ldots, m\}$
- Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i = b_i$

Transformation des Problems

- Ungleichungen können komplizierter sein als Gleichungen
- Beim Fundamentalsatz: $\hat{A} = \binom{A}{-I}$, damit x zulässig gdw. $\hat{A}x \leq \hat{b}$
  (in VL 1: $\bar{A}, \bar{b}$ – den Balken brauchen wir heute für was anderes)
- Haben aktive Zeilen betrachtet (und damit auf Gleichungen reduziert)
- Hier: Transformation in die Form $Ax = b, x \geq 0$
- **Frage:** Wie geht das?
- **Antwort:** Einführen von Schlupfvariablen (*slack variables*) $w_i \geq 0, i \in \{1, \dots, m\}$
- Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i = b_i$
- $w_i \geq 0$ ist der *Slack* $b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ zwischen der rechten und linken Seite

Transformation des Problems

- Ungleichungen können komplizierter sein als Gleichungen
- Beim Fundamentalsatz: $\hat{A} = \binom{A}{-I}$, damit x zulässig gdw. $\hat{A}x \leq \hat{b}$
  (in VL 1: $\bar{A}, \bar{b}$ – den Balken brauchen wir heute für was anderes)
- Haben aktive Zeilen betrachtet (und damit auf Gleichungen reduziert)
- Hier: Transformation in die Form $Ax = b, x \geq 0$
- **Frage:** Wie geht das?
- **Antwort:** Einführen von Schlupfvariablen (*slack variables*) $w_i \geq 0, i \in \{1, \ldots, m\}$
- Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + w_i = b_i$
- $w_i \geq 0$ ist der *Slack* $b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ zwischen der rechten und linken Seite
- Die $x, w \geq 0$-Bedingungen bleiben erhalten

Slack-Variablen am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Slack-Variablen am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 \leq 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 \leq 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 \leq 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Slack-Variablen am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Slack-Variablen am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Slack-Variablen am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

nach den w_i auflösen:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= 5 \\
w_2 &= 11 \\
w_3 &= 8
\end{aligned}
$$

Slack-Variablen am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

nach den w_i auflösen:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

Slack-Variablen am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

nach den w_i auflösen:

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

Slack-Variablen am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

nach den w_i auflösen:

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

- Dieses Format nennen wir *dictionary*.

Slack-Variablen am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

nach den w_i auflösen:

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

- Dieses Format nennen wir *dictionary*.
- Die Variablen links (hier: w_1, w_2, w_3) heißen ***abhängige*** Variablen oder **Basisvariablen**.

Slack-Variablen am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11 \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8 \\
& x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

nach den w_i auflösen:

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

- Dieses Format nennen wir *dictionary*.
- Die Variablen links (hier: w_1, w_2, w_3) heißen ***abhängige*** Variablen oder **Basisvariablen**.
- Die anderen Variablen heißen ***unabhängige*** Variablen oder **Nichtbasisvariablen**.

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

Warum *dictionary*?

Dictionaries: Beispiel

$$\begin{aligned}
\zeta &= \boxed{0} + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
\qquad w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{5}{2}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \qquad & w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{5}{2} \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \qquad & w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{11}{4} \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{5}{2} \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 && w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{11}{4} \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 && w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{8}{3}
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{5}{2} \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 && w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{11}{4} \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 && w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{8}{3}
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\hline
w_1 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{5}{2} \\
w_2 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 && w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{11}{4} \\
w_3 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 && w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{8}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \quad x_1 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}w_1 - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3
$$

$$
(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, 5, 11, 8), \quad \zeta = 0
$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \boxed{\tfrac{25}{2}} - \tfrac{5}{2}w_1 - \tfrac{7}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \\
\hline
x_1 &= \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}w_1 - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
w_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}w_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\
\hline
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
w_3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\
\hline
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
w_3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3
\end{aligned}
\qquad x_1 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 5
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\
\hline
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \qquad x_1 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 5 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \qquad\qquad\qquad\quad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \infty \\
w_3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\
\hline
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \qquad x_1 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 5 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \qquad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \infty \\
w_3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \qquad w_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 1
\end{aligned}
$$

$$
(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}
$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \qquad x_1 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 5 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \qquad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \infty \\
w_3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \qquad w_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 1
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{25}{2} - \frac{5}{2}w_1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\
\hline
x_1 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \qquad x_1 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 5 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \qquad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \infty \\
w_3 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \qquad w_3 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 1
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad x_3 = 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \tfrac{1}{2}), \quad \zeta = \tfrac{25}{2}$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \zeta = 13$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Dictionaries: Beispiel

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}
$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \zeta = 13$$

Warum *dictionary*? Weil man die ***dictionary solution*** bzw. *Basislösung* einfach ablesen kann!

Optimalität

$$\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \zeta = 13$$

Wie können wir uns sicher sein, dass wir die optimale Lösung haben?

Optimalität

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}
$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \zeta = 13$$

Wie können wir uns sicher sein, dass wir die optimale Lösung haben?

- Haben mit $\zeta = 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ angefangen, der ursprünglichen Zielfunktion

Optimalität

$$\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \zeta = 13$$

Wie können wir uns sicher sein, dass wir die optimale Lösung haben?

- Haben mit $\zeta = 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ angefangen, der ursprünglichen Zielfunktion
- Haben nur *Äquivalenzumformungen* der Nebenbedingungen genutzt: nach Variable umstellen, Einsetzen

Optimalität

$$\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \zeta = 13$$

Wie können wir uns sicher sein, dass wir die optimale Lösung haben?

- Haben mit $\zeta = 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ angefangen, der ursprünglichen Zielfunktion
- Haben nur *Äquivalenzumformungen* der Nebenbedingungen genutzt: nach Variable umstellen, Einsetzen
- Das LP im aktuellen Dictionary (mit konstantem Zielfunktionsterm) ist *äquivalent* zum ursprünglichen LP!

Optimalität

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}
$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \zeta = 13$$

Wie können wir uns sicher sein, dass wir die optimale Lösung haben?

- Haben mit $\zeta = 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ angefangen, der ursprünglichen Zielfunktion
- Haben nur *Äquivalenzumformungen* der Nebenbedingungen genutzt: nach Variable umstellen, Einsetzen
- Das LP im aktuellen Dictionary (mit konstantem Zielfunktionsterm) ist *äquivalent* zum ursprünglichen LP!
- Die Zielfunktion hat die Form $\zeta^* - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j$, $\bar{c}_j \geq 0$ mit $x_j \geq 0$.

Optimalität

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 13 - w_1 - 3x_2 - w_3 \\
\hline
x_1 &= 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
x_3 &= 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3
\end{aligned}
$$

alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 1, 0, 1, 0), \quad \zeta = 13$$

Wie können wir uns sicher sein, dass wir die optimale Lösung haben?

- Haben mit $\zeta = 0 + 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$ angefangen, der ursprünglichen Zielfunktion
- Haben nur *Äquivalenzumformungen* der Nebenbedingungen genutzt: nach Variable umstellen, Einsetzen
- Das LP im aktuellen Dictionary (mit konstantem Zielfunktionsterm) ist *äquivalent* zum ursprünglichen LP!
- Die Zielfunktion hat die Form $\zeta^* - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j$, $\bar{c}_j \geq 0$ mit $x_j \geq 0$.
- Keine Belegung der unabhängigen Variablen $\neq 0$ kann besser sein als ζ^*!

Notation: Simplex auf Dictionaries

Notation: Simplex auf Dictionaries

Statt $x_j, 1 \leq j \leq n$ und $w_i, 1 \leq i \leq m$ schreibe $x_j, 1 \leq j \leq n+m$, $w_1 = x_{n+1}, \ldots, w_m = x_{n+m}$.

Notation: Simplex auf Dictionaries

Statt $x_j, 1 \leq j \leq n$ und $w_i, 1 \leq i \leq m$ schreibe $x_j, 1 \leq j \leq n+m$, $w_1 = x_{n+1}, \ldots, w_m = x_{n+m}$.

Haben eine Menge $\mathcal{B}$ von **Basisvariablen** und $\mathcal{N}$ von **Nichtbasisvariablen**;
diese ändert sich im Verlauf des Algorithmus durch **Basiswechsel** durch **Pivotschritte**.

Notation: Simplex auf Dictionaries

Statt $x_j, 1 \leq j \leq n$ und $w_i, 1 \leq i \leq m$ schreibe $x_j, 1 \leq j \leq n+m$, $w_1 = x_{n+1}, \ldots, w_m = x_{n+m}$.

Haben eine Menge $\mathcal{B}$ von **Basisvariablen** und $\mathcal{N}$ von **Nichtbasisvariablen**;
diese ändert sich im Verlauf des Algorithmus durch **Basiswechsel** durch **Pivotschritte**.

Notation des Dictionaries im Ablauf des Algorithmus:

Notation: Simplex auf Dictionaries

Statt $x_j, 1 \leq j \leq n$ und $w_i, 1 \leq i \leq m$ schreibe $x_j, 1 \leq j \leq n+m$, $w_1 = x_{n+1}, \ldots, w_m = x_{n+m}$.

Haben eine Menge $\mathcal{B}$ von **Basisvariablen** und $\mathcal{N}$ von **Nichtbasisvariablen**;
diese ändert sich im Verlauf des Algorithmus durch **Basiswechsel** durch **Pivotschritte**.

Notation des Dictionaries im Ablauf des Algorithmus:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, \qquad i \in \mathcal{B}$$

Notation: Simplex auf Dictionaries

Statt $x_j, 1 \leq j \leq n$ und $w_i, 1 \leq i \leq m$ schreibe $x_j, 1 \leq j \leq n+m$, $w_1 = x_{n+1}, \ldots, w_m = x_{n+m}$.

Haben eine Menge $\mathcal{B}$ von **Basisvariablen** und $\mathcal{N}$ von **Nichtbasisvariablen**;
diese ändert sich im Verlauf des Algorithmus durch **Basiswechsel** durch **Pivotschritte**.

Notation des Dictionaries im Ablauf des Algorithmus:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$
$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, \qquad i \in \mathcal{B}$$

Die Balken kennzeichnen die Werte im *aktuellen* Dictionary; sie ändern sich mit jedem Pivotschritt.

Notation: Simplex auf Dictionaries

Statt $x_j, 1 \leq j \leq n$ und $w_i, 1 \leq i \leq m$ schreibe $x_j, 1 \leq j \leq n+m$, $w_1 = x_{n+1}, \ldots, w_m = x_{n+m}$.

Haben eine Menge $\mathcal{B}$ von **Basisvariablen** und $\mathcal{N}$ von **Nichtbasisvariablen**;
diese ändert sich im Verlauf des Algorithmus durch **Basiswechsel** durch **Pivotschritte**.

Notation des Dictionaries im Ablauf des Algorithmus:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, \qquad i \in \mathcal{B}$$

Die Balken kennzeichnen die Werte im *aktuellen* Dictionary; sie ändern sich mit jedem Pivotschritt.

Zu Beginn: $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{B} = \{n+1, \ldots, n+m\}$, $\bar{\zeta} = 0$, $\bar{c}_j = c_j$, $\bar{b}_{n+i} = b_i$, $\bar{a}_{n+i,j} = a_{ij}$.

Notation: Simplex auf Dictionaries

Statt $x_j, 1 \leq j \leq n$ und $w_i, 1 \leq i \leq m$ schreibe $x_j, 1 \leq j \leq n+m$, $w_1 = x_{n+1}, \ldots, w_m = x_{n+m}$.

Haben eine Menge $\mathcal{B}$ von **Basisvariablen** und $\mathcal{N}$ von **Nichtbasisvariablen**;
diese ändert sich im Verlauf des Algorithmus durch **Basiswechsel** durch **Pivotschritte**.

Notation des Dictionaries im Ablauf des Algorithmus:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$
$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j, \qquad i \in \mathcal{B}$$

Die Balken kennzeichnen die Werte im *aktuellen* Dictionary; sie ändern sich mit jedem Pivotschritt.

Zu Beginn: $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{B} = \{n+1, \ldots, n+m\}$, $\bar{\zeta} = 0$, $\bar{c}_j = c_j$, $\bar{b}_{n+i} = b_i$, $\bar{a}_{n+i,j} = a_{ij}$.

Das gibt eine **zulässige Basislösung** (alle $\bar{b}_i \geq 0$) genau dann, wenn alle $b_i \geq 0$.

Kleine Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Dictionary, Basis- und Nichtbasisvariablen, Basiswechsel, Pivotschritt

Was haben wir gemacht:

Kleine Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Dictionary, Basis- und Nichtbasisvariablen, Basiswechsel, Pivotschritt

Was haben wir gemacht:

- Angefangen in Standardform

Kleine Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Dictionary, Basis- und Nichtbasisvariablen, Basiswechsel, Pivotschritt

Was haben wir gemacht:

- Angefangen in Standardform
- Slack-Variablen hinzugefügt, neue Form $Ax = b, x \geq 0$

Kleine Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Dictionary, Basis- und Nichtbasisvariablen, Basiswechsel, Pivotschritt

Was haben wir gemacht:

- Angefangen in Standardform
- Slack-Variablen hinzugefügt, neue Form $Ax = b, x \geq 0$
- Startlösung: irgendeine Menge $\mathcal{B}$ als Basisvariablen (zulässige Basislösung: alle Basisvariablen $\bar{b}_i \geq 0$)

Kleine Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Dictionary, Basis- und Nichtbasisvariablen, Basiswechsel, Pivotschritt

Was haben wir gemacht:

- Angefangen in Standardform
- Slack-Variablen hinzugefügt, neue Form $Ax = b, x \geq 0$
- Startlösung: irgendeine Menge $\mathcal{B}$ als Basisvariablen (zulässige Basislösung: alle Basisvariablen $\bar{b}_i \geq 0$)
- Dann: *entering variable* x_j mit $\bar{c}_j > 0$ (irgendwie) gewählt – falls das nicht existiert: optimal!

Kleine Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Dictionary, Basis- und Nichtbasisvariablen, Basiswechsel, Pivotschritt

Was haben wir gemacht:

- Angefangen in Standardform
- Slack-Variablen hinzugefügt, neue Form $Ax = b, x \geq 0$
- Startlösung: irgendeine Menge $\mathcal{B}$ als Basisvariablen (zulässige Basislösung: alle Basisvariablen $\bar{b}_i \geq 0$)
- Dann: *entering variable* x_j mit $\bar{c}_j > 0$ (irgendwie) gewählt – falls das nicht existiert: optimal!
- Haben x_j erhöht, bis eine Basisvariable auf 0 fällt: *leaving variable* $k = \arg\min_{k \in \mathcal{B}, \bar{a}_{kj} > 0} \left(\bar{b}_k / \bar{a}_{kj} \right)$

Kleine Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Dictionary, Basis- und Nichtbasisvariablen, Basiswechsel, Pivotschritt

Was haben wir gemacht:

- Angefangen in Standardform
- Slack-Variablen hinzugefügt, neue Form $Ax = b, x \geq 0$
- Startlösung: irgendeine Menge $\mathcal{B}$ als Basisvariablen (zulässige Basislösung: alle Basisvariablen $\bar{b}_i \geq 0$)
- Dann: *entering variable* x_j mit $\bar{c}_j > 0$ (irgendwie) gewählt – falls das nicht existiert: optimal!
- Haben x_j erhöht, bis eine Basisvariable auf 0 fällt: *leaving variable* $k = \arg\min_{k \in \mathcal{B}, \bar{a}_{kj} > 0} \left(\bar{b}_k / \bar{a}_{kj} \right)$
- Gleichung für x_k nach x_j umgestellt und ersetzt

Kleine Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Dictionary, Basis- und Nichtbasisvariablen, Basiswechsel, Pivotschritt

Was haben wir gemacht:

- Angefangen in Standardform
- Slack-Variablen hinzugefügt, neue Form $Ax = b, x \geq 0$
- Startlösung: irgendeine Menge $\mathcal{B}$ als Basisvariablen (zulässige Basislösung: alle Basisvariablen $\bar{b}_i \geq 0$)
- Dann: *entering variable* x_j mit $\bar{c}_j > 0$ (irgendwie) gewählt – falls das nicht existiert: optimal!
- Haben x_j erhöht, bis eine Basisvariable auf 0 fällt: *leaving variable* $k = \arg\min_{k \in \mathcal{B}, \bar{a}_{kj} > 0} \left(\bar{b}_k / \bar{a}_{kj} \right)$
- Gleichung für x_k nach x_j umgestellt und ersetzt
- Neue Definition für x_j in den anderen Zeilen eingesetzt

Kleine Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Dictionary, Basis- und Nichtbasisvariablen, Basiswechsel, Pivotschritt

Was haben wir gemacht:

- Angefangen in Standardform
- Slack-Variablen hinzugefügt, neue Form $Ax = b, x \geq 0$
- Startlösung: irgendeine Menge $\mathcal{B}$ als Basisvariablen (zulässige Basislösung: alle Basisvariablen $\bar{b}_i \geq 0$)
- Dann: *entering variable* x_j mit $\bar{c}_j > 0$ (irgendwie) gewählt – falls das nicht existiert: optimal!
- Haben x_j erhöht, bis eine Basisvariable auf 0 fällt: *leaving variable* $k = \arg\min_{k \in \mathcal{B}, \bar{a}_{kj} > 0} \left(\bar{b}_k / \bar{a}_{kj} \right)$
- Gleichung für x_k nach x_j umgestellt und ersetzt
- Neue Definition für x_j in den anderen Zeilen eingesetzt

Das ist eine allgemeine Beschreibung des Simplex-Algorithmus auf Dictionaries!

Kleine Zusammenfassung

Wichtige Begriffe: Dictionary, Basis- und Nichtbasisvariablen, Basiswechsel, Pivotschritt

Was haben wir gemacht:

- Angefangen in Standardform
- Slack-Variablen hinzugefügt, neue Form $Ax = b, x \geq 0$
- Startlösung: irgendeine Menge $\mathcal{B}$ als Basisvariablen (zulässige Basislösung: alle Basisvariablen $\bar{b}_i \geq 0$)
- Dann: *entering variable* x_j mit $\bar{c}_j > 0$ (irgendwie) gewählt – falls das nicht existiert: optimal!
- Haben x_j erhöht, bis eine Basisvariable auf 0 fällt: *leaving variable* $k = \arg\min_{k \in \mathcal{B}, \bar{a}_{kj} > 0} \left(\bar{b}_k / \bar{a}_{kj} \right)$
- Gleichung für x_k nach x_j umgestellt und ersetzt
- Neue Definition für x_j in den anderen Zeilen eingesetzt

Das ist eine allgemeine Beschreibung des Simplex-Algorithmus auf Dictionaries!

Offene Fragen: Startlösung/Zulässigkeit, Unbeschränktheit, Wahl der x_j/x_k

Startlösung und Zulässigkeit: Hilfsproblem

Startlösung und Zulässigkeit: Hilfsproblem

Wenn alle $b_i \geq 0$ sind: offensichtliche Wahl der Startbasis $\mathcal{B} = \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\}$ wie im Beispiel.

Startlösung und Zulässigkeit: Hilfsproblem

Wenn alle $b_i \geq 0$ sind: offensichtliche Wahl der Startbasis $\mathcal{B} = \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\}$ wie im Beispiel.

Sonst: Reduziere Zulässigkeit auf Optimalität – immer zulässiges Hilfsproblem:

Startlösung und Zulässigkeit: Hilfsproblem

Wenn alle $b_i \geq 0$ sind: offensichtliche Wahl der Startbasis $\mathcal{B} = \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\}$ wie im Beispiel.

Sonst: Reduziere Zulässigkeit auf Optimalität – immer zulässiges Hilfsproblem:

$$\max -x_0 \quad \text{s. t.}$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} : -x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$
$$x \geq 0$$

Startlösung und Zulässigkeit: Hilfsproblem

Wenn alle $b_i \geq 0$ sind: offensichtliche Wahl der Startbasis $\mathcal{B} = \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\}$ wie im Beispiel.

Sonst: Reduziere Zulässigkeit auf Optimalität – immer zulässiges Hilfsproblem:

$$\max -x_0 \quad \text{s. t.}$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} : -x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$
$$x \geq 0$$

Idee: Minimiere die Unzulässigkeit (die maximale Verletzung x_0 einer Nebenbedingung).

Startlösung und Zulässigkeit: Hilfsproblem

Wenn alle $b_i \geq 0$ sind: offensichtliche Wahl der Startbasis $\mathcal{B} = \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\}$ wie im Beispiel.

Sonst: Reduziere Zulässigkeit auf Optimalität – immer zulässiges Hilfsproblem:

$$\max -x_0 \quad \text{s. t.}$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} : -x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$
$$x \geq 0$$

Idee: Minimiere die Unzulässigkeit (die maximale Verletzung x_0 einer Nebenbedingung).

Frage: Einfache Schranke an x_0?

Startlösung und Zulässigkeit: Hilfsproblem

Wenn alle $b_i \geq 0$ sind: offensichtliche Wahl der Startbasis $\mathcal{B} = \{x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}\}$ wie im Beispiel.

Sonst: Reduziere Zulässigkeit auf Optimalität – immer zulässiges Hilfsproblem:

$$\max -x_0 \quad \text{s. t.}$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} : -x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$
$$x \geq 0$$

Idee: Minimiere die Unzulässigkeit (die maximale Verletzung x_0 einer Nebenbedingung).

Frage: Einfache Schranke an x_0?

Frage: Wann zeigt das Hilfsproblem, dass das ursprüngliche Problem *unzulässig* ist?

Hilfsproblem und Dictionaries

Hilfsproblem und Dictionaries

Wie kriegen wir jetzt eine Startbasis und das initiale Dictionary?

Hilfsproblem und Dictionaries

Wie kriegen wir jetzt eine Startbasis und das initiale Dictionary? Das triviale Dictionary ist unzulässig!

Beispiel: $\max\ -2x_1 - x_2$ s.t. $-x_1 + x_2 \leq -1, -x_1 - 2x_2 \leq -2, x_2 \leq 1, x \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\xi &= -x_0 \\
\hline
w_1 &= -1 + x_0 + x_1 - x_2 \\
w_2 &= -2 + x_0 + x_1 + 2x_2 \\
w_3 &= 1 + x_0 - x_2
\end{aligned}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, -1, -2, 1), \quad \xi = 0$$

Hilfsproblem und Dictionaries

Wie kriegen wir jetzt eine Startbasis und das initiale Dictionary? Das triviale Dictionary ist unzulässig!

Trotzdem nutzen und einen Pivotschritt mit x_0 (entering) und $x_{n+i}, i = \arg\min_{i \in \mathcal{B}} b_i$ (leaving) durchführen

Beispiel: $\max\ -2x_1 - x_2$ s.t. $-x_1 + x_2 \leq -1, -x_1 - 2x_2 \leq -2, x_2 \leq 1, x \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\xi &= -x_0 \\
\hline
w_1 &= -1 + x_0 + x_1 - x_2 \\
w_2 &= -2 + x_0 + x_1 + 2x_2 \\
w_3 &= 1 + x_0 - x_2
\end{aligned}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, 0, 0, -1, -2, 1), \quad \xi = 0$$

Hilfsproblem und Dictionaries

Wie kriegen wir jetzt eine Startbasis und das initiale Dictionary? Das triviale Dictionary ist unzulässig!

Trotzdem nutzen und einen Pivotschritt mit x_0 (entering) und $x_{n+i}, i = \arg\min_{i \in \mathcal{B}} b_i$ (leaving) durchführen

Beispiel: $\max\ -2x_1 - x_2$ s.t. $-x_1 + x_2 \leq -1, -x_1 - 2x_2 \leq -2, x_2 \leq 1, x \geq 0$

$$\begin{aligned} \xi &= -2 - w_2 + x_1 + 2x_2 \\ \hline w_1 &= 1 + w_2 - 3x_2 \\ x_0 &= 2 + w_2 - x_1 - 2x_2 \\ w_3 &= 3 + w_2 - x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 0, 1, 0, 3), \quad \xi = -2$$

Hilfsproblem und Dictionaries

Wie kriegen wir jetzt eine Startbasis und das initiale Dictionary? Das triviale Dictionary ist unzulässig!

Trotzdem nutzen und einen Pivotschritt mit x_0 (entering) und $x_{n+i}, i = \arg\min_{i \in \mathcal{B}} b_i$ (leaving) durchführen

Beispiel: $\max\ -2x_1 - x_2$ s.t. $-x_1 + x_2 \leq -1, -x_1 - 2x_2 \leq -2, x_2 \leq 1, x \geq 0$

$$\begin{aligned} \xi &= -2 - w_2 + x_1 + 2x_2 \\ \hline w_1 &= 1 + w_2 - 3x_2 \\ x_0 &= 2 + w_2 - x_1 - 2x_2 \\ w_3 &= 3 + w_2 - x_1 - 3x_2 \end{aligned}$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 0, 1, 0, 3), \quad \xi = -2$$

Nach diesem ersten Pivotschritt ist das Dictionary **immer zulässig**!

Hilfsproblem und Dictionaries

Wie kriegen wir jetzt eine Startbasis und das initiale Dictionary? Das triviale Dictionary ist unzulässig!

Trotzdem nutzen und einen Pivotschritt mit x_0 (entering) und $x_{n+i}, i = \arg\min_{i \in \mathcal{B}} b_i$ (leaving) durchführen

Beispiel: $\max\ -2x_1 - x_2$ s.t. $-x_1 + x_2 \leq -1, -x_1 - 2x_2 \leq -2, x_2 \leq 1, x \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\xi &= -2 - w_2 + x_1 + 2x_2 \\
\hline
w_1 &= 1 + w_2 - 3x_2 \\
x_0 &= 2 + w_2 - x_1 - 2x_2 \\
w_3 &= 3 + w_2 - x_1 - 3x_2
\end{aligned}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 0, 1, 0, 3), \quad \xi = -2$$

Nach diesem ersten Pivotschritt ist das Dictionary **immer zulässig**!

Hilfsproblem lösen: Phase I, Hauptproblem lösen: Phase II – gesamter Algorithmus: **Zweiphasensimplex**.

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{aligned}
\xi &= -2 - w_2 + x_1 + 2x_2 \\
\hline
w_1 &= 1 + w_2 - 3x_2 \\
x_0 &= 2 + w_2 - x_1 - 2x_2 \\
w_3 &= 3 + w_2 - x_1 - 3x_2
\end{aligned}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 0, 1, 0, 3), \quad \xi = -2$$

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{aligned}
\xi &= -2 - w_2 + x_1 + 2x_2 \\
\hline
w_1 &= 1 + w_2 - 3x_2 \\
x_0 &= 2 + w_2 - x_1 - 2x_2 \\
w_3 &= 3 + w_2 - x_1 - 3x_2
\end{aligned}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 0, 1, 0, 3), \quad \xi = -2$$

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{aligned}
\xi &= -2 - w_2 + x_1 + 2x_2 \\
\hline
w_1 &= 1 + w_2 - 3x_2 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq \tfrac{1}{3} \\
x_0 &= 2 + w_2 - x_1 - 2x_2 && x_0 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 1 \\
w_3 &= 3 + w_2 - x_1 - 3x_2 && w_3 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 1
\end{aligned}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 0, 1, 0, 3), \quad \xi = -2$$

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
\xi & = & -2 & - & w_2 & + & x_1 & + & 2x_2 \\
\hline
w_1 & = & 1 & + & w_2 & & & - & 3x_2 \\
x_0 & = & 2 & + & w_2 & - & x_1 & - & 2x_2 \\
w_3 & = & 3 & + & w_2 & - & x_1 & - & 3x_2
\end{array}
$$

$w_1 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq \frac{1}{3}$

$x_0 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 1$

$w_3 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 1$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (2, 0, 0, 1, 0, 3), \quad \xi = -2$$

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{aligned}
\xi &= -\tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}w_2 + x_1 - \tfrac{2}{3}w_1 \\
\hline
x_2 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}w_2 - \tfrac{1}{3}w_1 \\
x_0 &= \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}w_2 - x_1 + \tfrac{2}{3}w_1 \\
w_3 &= 2 - x_1 + w_1
\end{aligned}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{4}{3}, 0, \tfrac{1}{3}, 0, 0, 2), \quad \xi = -\tfrac{4}{3}$$

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\xi & = & -\frac{4}{3} & - & \frac{1}{3}w_2 & + x_1 & - \frac{2}{3}w_1 \\
\hline
x_2 & = & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{3}w_2 & & - \frac{1}{3}w_1 \\
x_0 & = & \frac{4}{3} & + & \frac{1}{3}w_2 & - x_1 & + \frac{2}{3}w_1 \\
w_3 & = & 2 & & & - x_1 & + w_1
\end{array}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{4}{3}, 0, \tfrac{1}{3}, 0, 0, 2), \quad \xi = -\tfrac{4}{3}$$

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{aligned}
\xi &= -\tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}w_2 + x_1 - \tfrac{2}{3}w_1 \\
\hline
x_2 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}w_2 - \tfrac{1}{3}w_1 && x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
x_0 &= \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}w_2 - x_1 + \tfrac{2}{3}w_1 && x_0 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \tfrac{4}{3} \\
w_3 &= 2 - x_1 + w_1 && w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2
\end{aligned}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{4}{3}, 0, \tfrac{1}{3}, 0, 0, 2), \quad \xi = -\tfrac{4}{3}$$

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
\xi & = & -\frac{4}{3} & - & \frac{1}{3}w_2 & + & x_1 & - & \frac{2}{3}w_1 \\
\hline
x_2 & = & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{3}w_2 & & & - & \frac{1}{3}w_1 \\
x_0 & = & \frac{4}{3} & + & \frac{1}{3}w_2 & - & x_1 & + & \frac{2}{3}w_1 \\
w_3 & = & 2 & & & - & x_1 & + & w_1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
x_0 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{4}{3} \\
w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2
\end{array}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{4}{3}, 0, \tfrac{1}{3}, 0, 0, 2), \quad \xi = -\tfrac{4}{3}$$

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{aligned}
\xi &= && && -x_0 \\
\hline
x_2 &= \tfrac{1}{3} &&+ \tfrac{1}{3}w_2 && - \tfrac{1}{3}w_1 \\
x_1 &= \tfrac{4}{3} &&+ \tfrac{1}{3}w_2 && - x_0 + \tfrac{2}{3}w_1 \\
w_3 &= \tfrac{2}{3} &&- \tfrac{1}{3}w_2 && + x_0 + \tfrac{1}{3}w_1
\end{aligned}
$$

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, \tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0, \tfrac{2}{3}), \quad \xi = 0$$

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{aligned}
\xi &= & & & -x_0 & & \\
\hline
x_2 &= \tfrac{1}{3} &+ \tfrac{1}{3}w_2 & & & - \tfrac{1}{3}w_1 \\
x_1 &= \tfrac{4}{3} &+ \tfrac{1}{3}w_2 & - x_0 & + \tfrac{2}{3}w_1 \\
w_3 &= \tfrac{2}{3} &- \tfrac{1}{3}w_2 & + x_0 & + \tfrac{1}{3}w_1
\end{aligned}
$$

alle Koeffizienten in ξ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_0, x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (0, \tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0, \tfrac{2}{3}), \quad \xi = 0$$

Optimum des Hilfsproblems: $\xi^* = 0$, also $x_0 = 0 \Rightarrow$ die Basislösung ist zulässig für das ursprüngliche LP.

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -3 - w_2 - w_1 \\
\hline
x_2 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}w_2 - \tfrac{1}{3}w_1 \\
x_1 &= \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}w_2 + \tfrac{2}{3}w_1 \\
w_3 &= \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}w_2 + \tfrac{1}{3}w_1
\end{aligned}
$$

$$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0, \tfrac{2}{3}), \quad \zeta = -3$$

Optimum des Hilfsproblems: $\xi^* = 0$, also $x_0 = 0 \Rightarrow$ die Basislösung ist zulässig für das ursprüngliche LP.

Phase II: x_0 streichen, Zielfunktion $\zeta = -2x_1 - x_2$ in aktuellen Variablen ausdrücken, weiter mit Simplex.

Hilfsproblem am Beispiel: Phase I und II

$$
\begin{aligned}
\zeta &= -3 - w_2 - w_1 \\
\hline
x_2 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}w_2 - \tfrac{1}{3}w_1 \\
x_1 &= \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3}w_2 + \tfrac{2}{3}w_1 \\
w_3 &= \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}w_2 + \tfrac{1}{3}w_1
\end{aligned}
$$

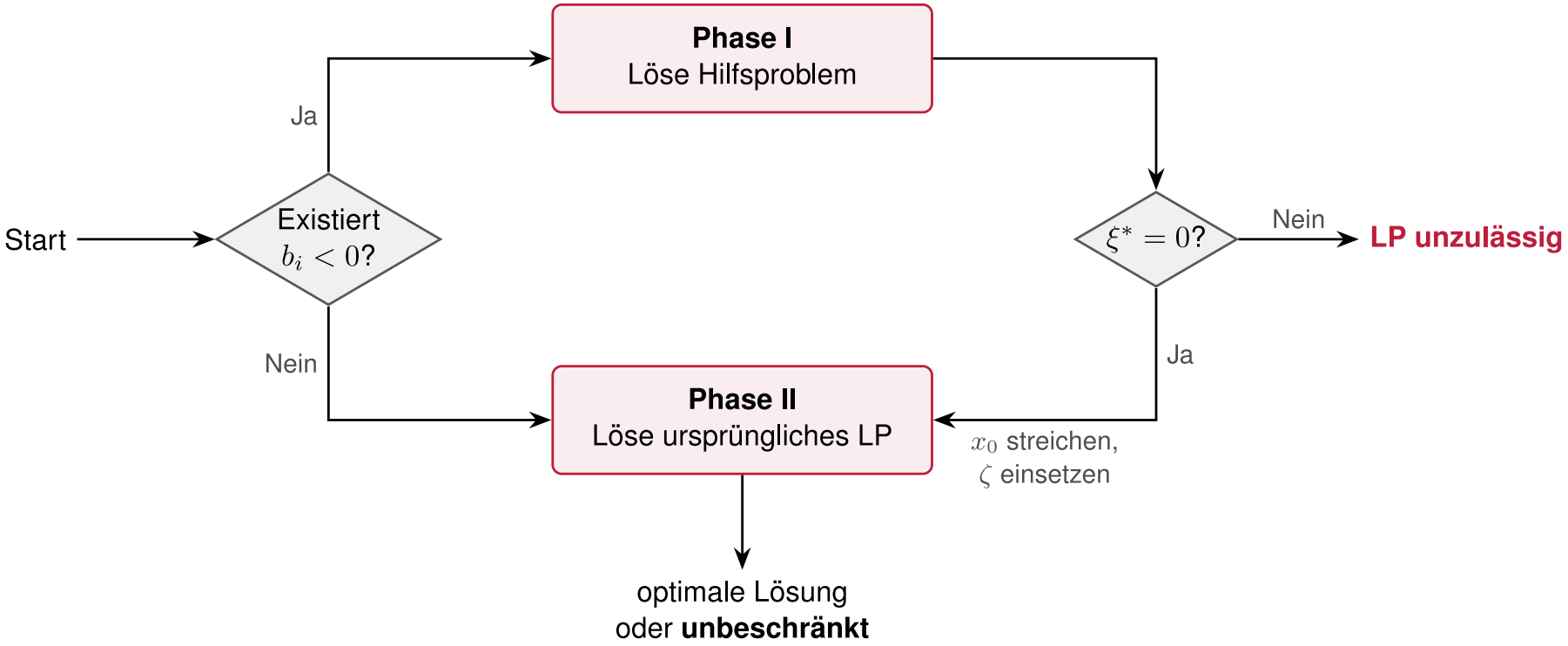
alle Koeffizienten in ζ sind $\leq 0 \Rightarrow$ optimal

$$(x_1, x_2, w_1, w_2, w_3) = (\tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0, \tfrac{2}{3}), \quad \zeta = -3$$

Optimum des Hilfsproblems: $\xi^* = 0$, also $x_0 = 0 \Rightarrow$ die Basislösung ist zulässig für das ursprüngliche LP.

Phase II: x_0 streichen, Zielfunktion $\zeta = -2x_1 - x_2$ in aktuellen Variablen ausdrücken, weiter mit Simplex.

Zweiphasensimplex



Unbeschränktheit

Wie wählt man hier das Pivot?

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 2x_1 - x_2 - x_3 \\
\hline
w_1 &= 4 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 \\
w_2 &= 10 - 2x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 6 + 3x_1 + 3x_3
\end{aligned}
$$

Unbeschränktheit

Wie wählt man hier das Pivot?

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 2x_1 - x_2 - x_3 \\
\hline
w_1 &= 4 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 \\
w_2 &= 10 - 2x_2 - 2x_3 \\
w_3 &= 6 + 3x_1 + 3x_3
\end{aligned}
$$

Unbeschränktheit

Wie wählt man hier das Pivot?

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 2x_1 - x_2 - x_3 \\
\hline
w_1 &= 4 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
w_2 &= 10 - 2x_2 - 2x_3 && w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
w_3 &= 6 + 3x_1 + 3x_3 && w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty
\end{aligned}
$$

keine Schranke für $x_1 \Rightarrow$ LP unbeschränkt

Unbeschränktheit

Wie wählt man hier das Pivot?

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 2x_1 - x_2 - x_3 \\
\hline
w_1 &= 4 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
w_2 &= 10 - 2x_2 - 2x_3 && w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
w_3 &= 6 + 3x_1 + 3x_3 && w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty
\end{aligned}
$$

keine Schranke für $x_1 \Rightarrow$ LP unbeschränkt

Alle Koeffizienten von x_1 in den Zeilen sind ≥ 0 (d.h. $\bar{a}_{i1} \leq 0$):
egal wie groß x_1 wird, alle w_i bleiben nicht-negativ, und ζ wächst mit $2x_1$ beliebig.

Unbeschränktheit

Wie wählt man hier das Pivot?

$$
\begin{aligned}
\zeta &= 0 + 2x_1 - x_2 - x_3 \\
\hline
w_1 &= 4 + 5x_1 - 2x_2 + x_3 && w_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
w_2 &= 10 - 2x_2 - 2x_3 && w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty \\
w_3 &= 6 + 3x_1 + 3x_3 && w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \infty
\end{aligned}
$$

keine Schranke für $x_1 \Rightarrow$ LP unbeschränkt

Alle Koeffizienten von x_1 in den Zeilen sind ≥ 0 (d.h. $\bar{a}_{i1} \leq 0$):
egal wie groß x_1 wird, alle w_i bleiben nicht-negativ, und ζ wächst mit $2x_1$ beliebig.

Lemma

Ist für ein $j \in \mathcal{N}$ mit $\bar{c}_j > 0$ die Menge $\{i \in \mathcal{B} \mid \bar{a}_{ij} > 0\}$ leer, dann ist das LP unbeschränkt.

Simplex: Korrektheit

Theorem (Korrektheit Zweiphasensimplex)

Falls der Zweiphasensimplex für ein LP terminiert, so bestimmt er korrekt, ob das LP unzulässig, unbeschränkt oder optimal lösbar ist, und findet eine optimale Basislösung, falls eine solche existiert.

Simplex: Korrektheit

Theorem (Korrektheit Zweiphasensimplex)

Falls der Zweiphasensimplex für ein LP terminiert, so bestimmt er korrekt, ob das LP unzulässig, unbeschränkt oder optimal lösbar ist, und findet eine optimale Basislösung, falls eine solche existiert.

- **Unzulässigkeit:** Folgt aus der optimalen Lösung des Hilfsproblems und unseren Überlegungen dazu.

Simplex: Korrektheit

Theorem (Korrektheit Zweiphasensimplex)

Falls der Zweiphasensimplex für ein LP terminiert, so bestimmt er korrekt, ob das LP unzulässig, unbeschränkt oder optimal lösbar ist, und findet eine optimale Basislösung, falls eine solche existiert.

- **Unzulässigkeit:** Folgt aus der optimalen Lösung des Hilfsproblems und unseren Überlegungen dazu.
- **Unbeschränktheit:** Wenn Simplex Unbeschränktheit findet, gibt er uns auch einen Startpunkt und eine Richtung, in die wir beliebig weit laufen können, und in die die Zielfunktion immer besser wird.

Simplex: Korrektheit

Theorem (Korrektheit Zweiphasensimplex)

Falls der Zweiphasensimplex für ein LP terminiert, so bestimmt er korrekt, ob das LP unzulässig, unbeschränkt oder optimal lösbar ist, und findet eine optimale Basislösung, falls eine solche existiert.

- **Unzulässigkeit:** Folgt aus der optimalen Lösung des Hilfsproblems und unseren Überlegungen dazu.
- **Unbeschränktheit:** Wenn Simplex Unbeschränktheit findet, gibt er uns auch einen Startpunkt und eine Richtung, in die wir beliebig weit laufen können, und in die die Zielfunktion immer besser wird.
- **Optimalität:** Haben wir bereits argumentiert – falls wir keinen der beiden anderen Fälle treffen, gibt uns Simplex eine äquivalente Umformulierung des LP, in deren Zielfunktion die Optimalität unserer Lösung offensichtlich ist.

Simplex: Korrektheit

Theorem (Korrektheit Zweiphasensimplex)

Falls der Zweiphasensimplex für ein LP terminiert, so bestimmt er korrekt, ob das LP unzulässig, unbeschränkt oder optimal lösbar ist, und findet eine optimale Basislösung, falls eine solche existiert.

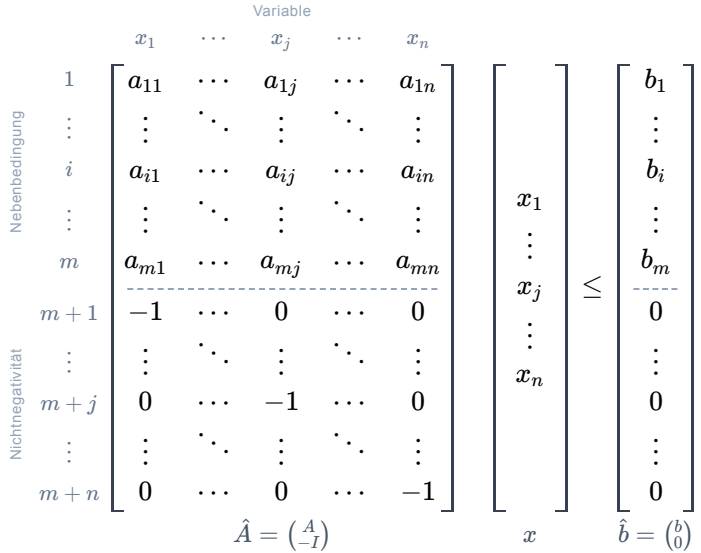
- **Unzulässigkeit:** Folgt aus der optimalen Lösung des Hilfsproblems und unseren Überlegungen dazu.
- **Unbeschränktheit:** Wenn Simplex Unbeschränktheit findet, gibt er uns auch einen Startpunkt und eine Richtung, in die wir beliebig weit laufen können, und in die die Zielfunktion immer besser wird.
- **Optimalität:** Haben wir bereits argumentiert – falls wir keinen der beiden anderen Fälle treffen, gibt uns Simplex eine äquivalente Umformulierung des LP, in deren Zielfunktion die Optimalität unserer Lösung offensichtlich ist.

Um Termination soll es beim nächsten Mal gehen.

Simplex und Geometrie

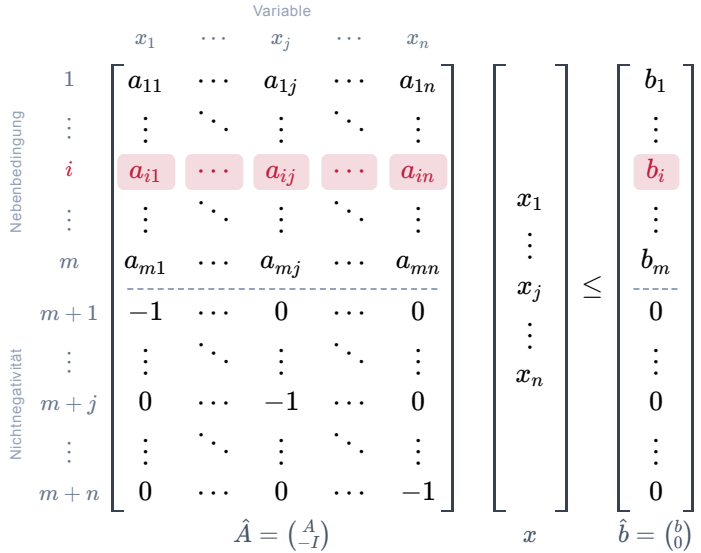
Erinnerung: erweiterte Matrix

Aus der letzten Vorlesung: $x \geq 0$ als weitere Zeilen, damit alles die Form $\hat{A}x \leq \hat{b}$ hat.



Erinnerung: erweiterte Matrix

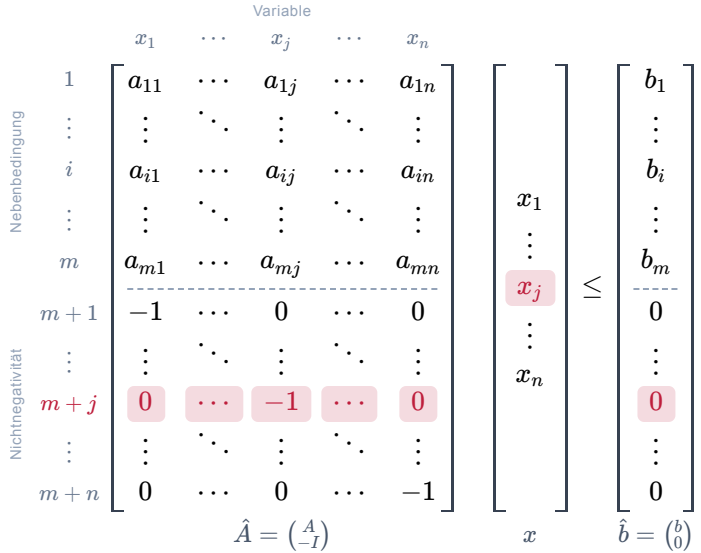
Aus der letzten Vorlesung: $x \geq 0$ als weitere Zeilen, damit alles die Form $\hat{A}x \leq \hat{b}$ hat.



Zeile $i \leq m$: die Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$

Erinnerung: erweiterte Matrix

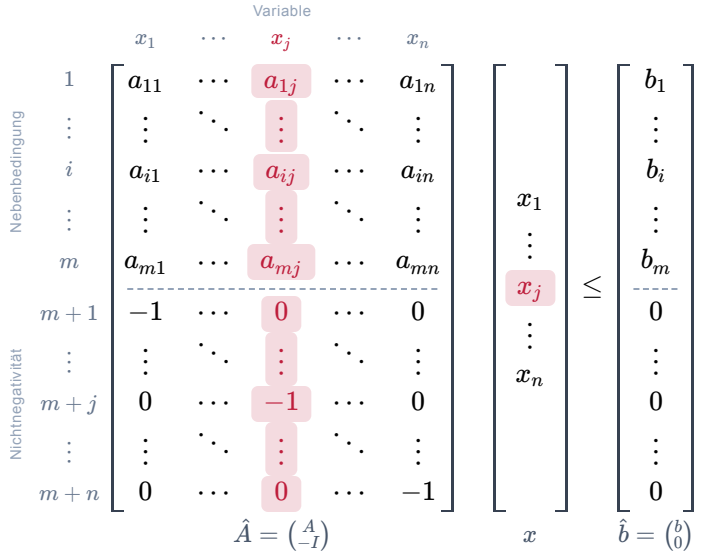
Aus der letzten Vorlesung: $x \geq 0$ als weitere Zeilen, damit alles die Form $\hat{A}x \leq \hat{b}$ hat.



Zeile $m + j$: $-x_j \leq 0$, also die Nichtnegativität $x_j \geq 0$

Erinnerung: erweiterte Matrix

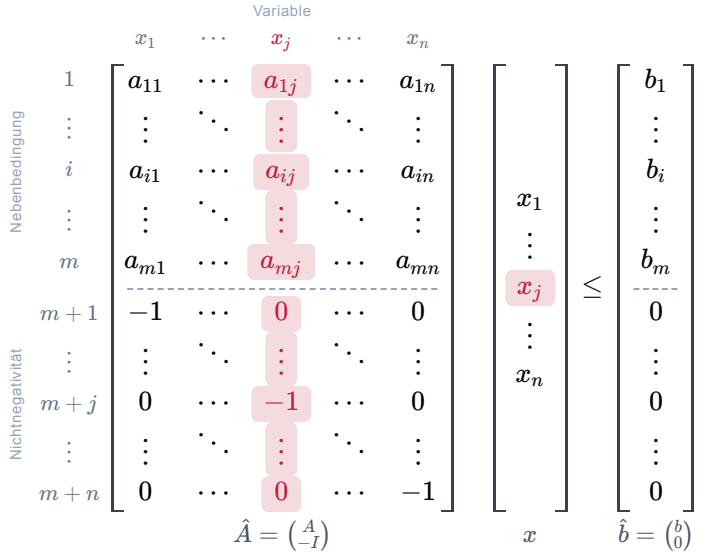
Aus der letzten Vorlesung: $x \geq 0$ als weitere Zeilen, damit alles die Form $\hat{A}x \leq \hat{b}$ hat.



Spalte j: die Koeffizienten von x_j in allen $m + n$ Nebenbedingungen von $\hat{A}x \leq \hat{b}$

Erinnerung: erweiterte Matrix

Aus der letzten Vorlesung: $x \geq 0$ als weitere Zeilen, damit alles die Form $\hat{A}x \leq \hat{b}$ hat.

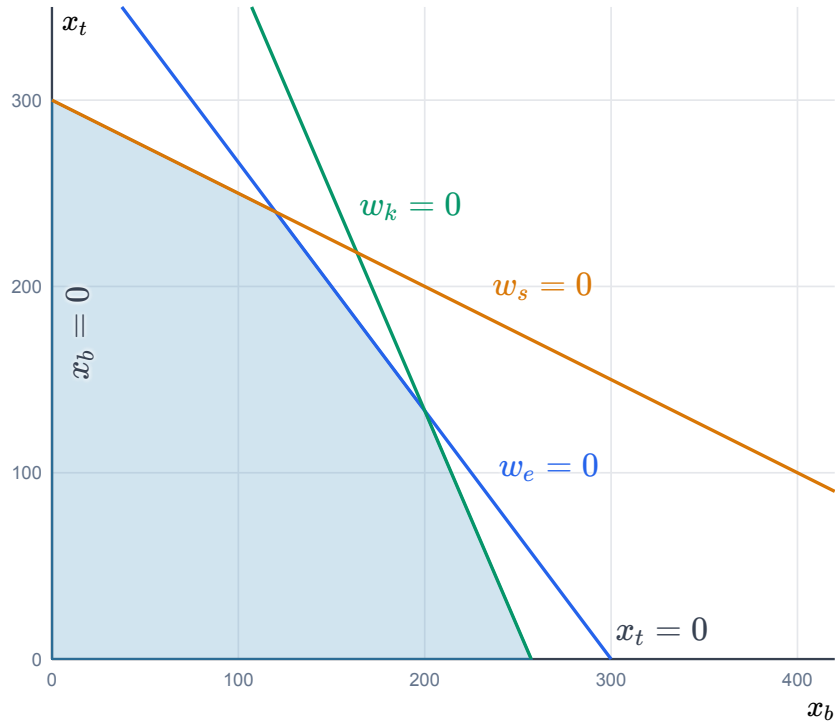


Spalte j: die Koeffizienten von x_j in allen $m + n$ Nebenbedingungen von $\hat{A}x \leq \hat{b}$

$x \in \mathbb{L}(P)$ ist eine *Ecke* $\Leftrightarrow \operatorname{rang} \hat{A}_{I(x)} = n$ (n linear unabhängige aktive Zeilen)

Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung

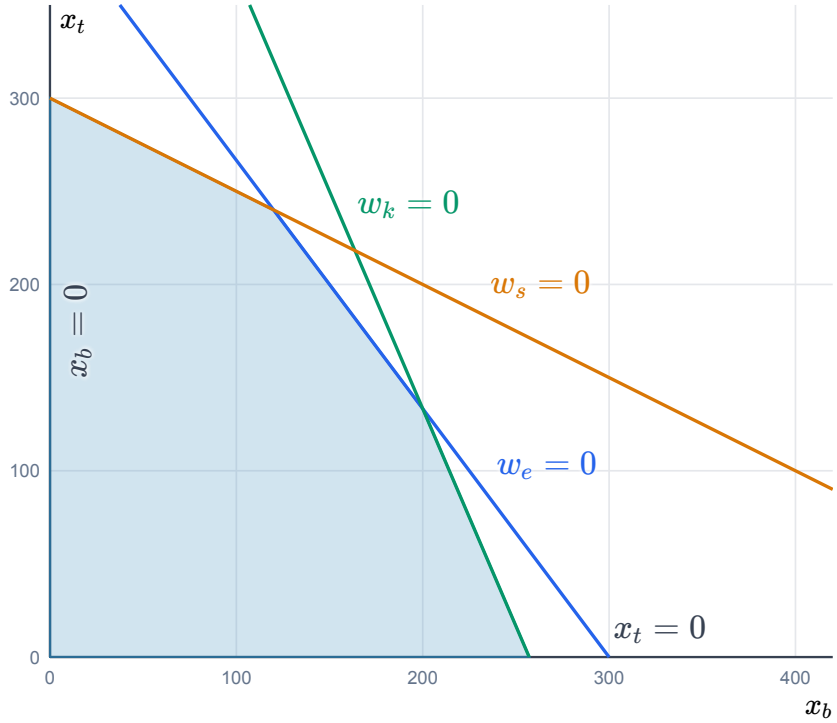
$$\hat{b} - \hat{A}x = \begin{pmatrix} b - Ax \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix}$$



Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung

$$\hat{b} - \hat{A}x = \begin{pmatrix} b - Ax \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix}$$

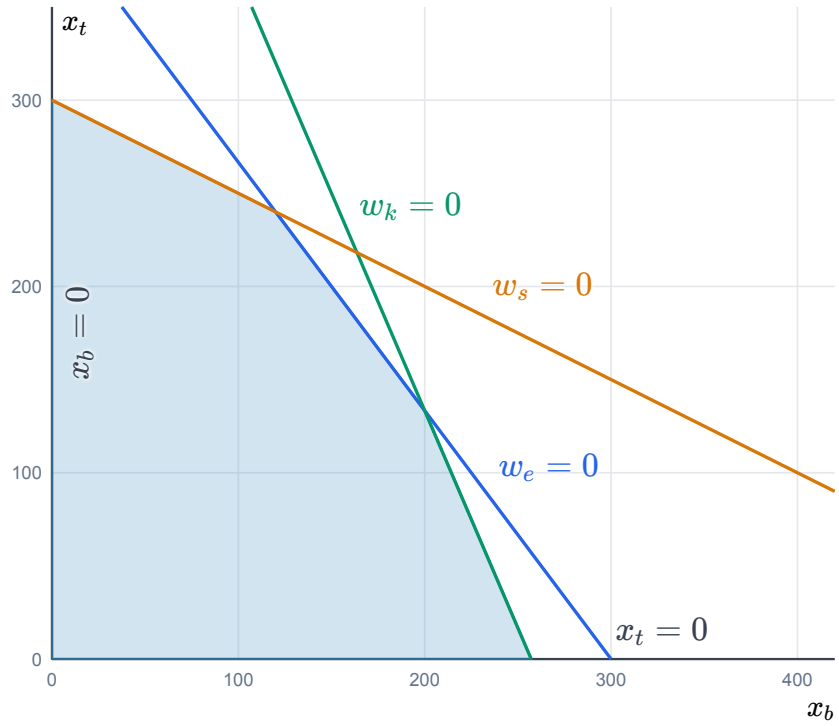
- Zu jeder der $m + n$ Zeilen von $\hat{A}$:
  genau eine Variable $(w_1, \ldots, w_m, x_1, \ldots, x_n)$



Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung

$$\hat{b} - \hat{A}x = \begin{pmatrix} b - Ax \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix}$$

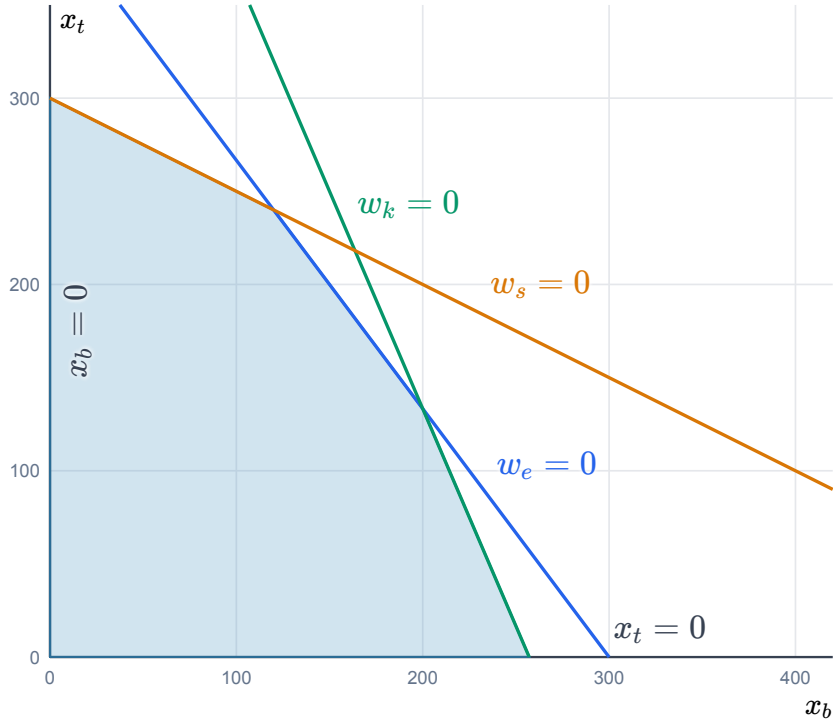
- Zu jeder der $m + n$ Zeilen von $\hat{A}$:
  genau eine Variable $(w_1, \ldots, w_m, x_1, \ldots, x_n)$
- $w_i = 0 \Leftrightarrow$ Zeile i aktiv



Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung

$$\hat{b} - \hat{A}x = \begin{pmatrix} b - Ax \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix}$$

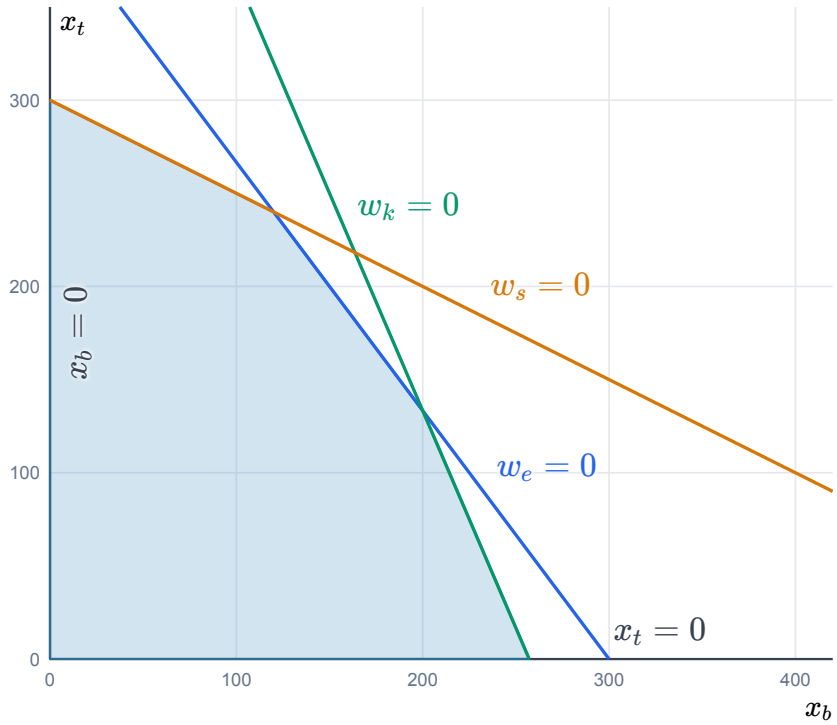
- Zu jeder der $m + n$ Zeilen von $\hat{A}$:
  genau eine Variable $(w_1, \ldots, w_m, x_1, \ldots, x_n)$
- $w_i = 0 \Leftrightarrow$ Zeile i aktiv
- $x_j = 0 \Leftrightarrow$ Zeile $m + j$ aktiv



Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung

$$\hat{b} - \hat{A}x = \begin{pmatrix} b - Ax \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix}$$

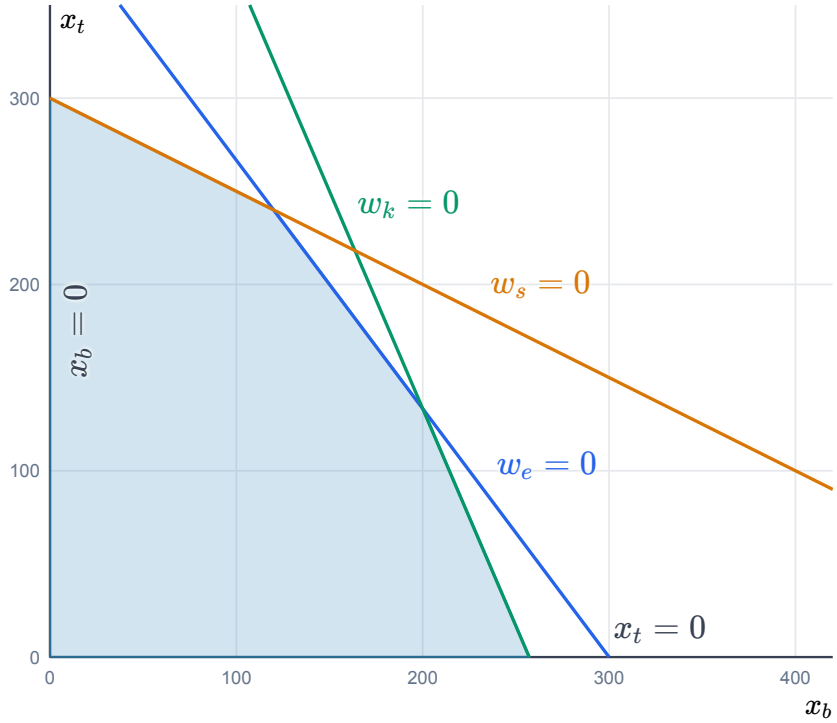
- Zu jeder der $m + n$ Zeilen von $\hat{A}$:
  genau eine Variable $(w_1, \ldots, w_m, x_1, \ldots, x_n)$
- $w_i = 0 \Leftrightarrow$ Zeile i aktiv
- $x_j = 0 \Leftrightarrow$ Zeile $m + j$ aktiv
- x zulässig $\Leftrightarrow$ alle $n + m$ Variablen ≥ 0



Schlupf = Abstand zur Nebenbedingung

$$\hat{b} - \hat{A}x = \begin{pmatrix} b - Ax \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ x \end{pmatrix}$$

- Zu jeder der $m + n$ Zeilen von $\hat{A}$:
  genau eine Variable $(w_1, \ldots, w_m, x_1, \ldots, x_n)$
- $w_i = 0 \Leftrightarrow$ Zeile i aktiv
- $x_j = 0 \Leftrightarrow$ Zeile $m + j$ aktiv
- x zulässig $\Leftrightarrow$ alle $n + m$ Variablen ≥ 0
- Nichtbasisvariable $= 0$ heißt:
  Lösung liegt *auf* dieser Geraden



Basislösungen sind Ecken

Theorem (Basislösungen und Ecken)

Ist ein Dictionary mit Nichtbasis $\mathcal{N}$ zulässig ($\bar{b}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{B}$), so entspricht seine Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) einer Ecke von $\mathbb{L}(P)$.

Basislösungen sind Ecken

Theorem (Basislösungen und Ecken)

Ist ein Dictionary mit Nichtbasis $\mathcal{N}$ zulässig ($\bar{b}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{B}$), so entspricht seine Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) einer Ecke von $\mathbb{L}(P)$.

- **Basislösung:** $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\tilde{x}_k = 0$ für alle $k \in \mathcal{N}$, dazu $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$.

Basislösungen sind Ecken

Theorem (Basislösungen und Ecken)

Ist ein Dictionary mit Nichtbasis $\mathcal{N}$ zulässig ($\bar{b}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{B}$), so entspricht seine Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) einer Ecke von $\mathbb{L}(P)$.

- **Basislösung:** $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\tilde{x}_k = 0$ für alle $k \in \mathcal{N}$, dazu $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$.
  $\Rightarrow$ die n Zeilen von $\hat{A}, \hat{b}$ zu den Variablen in $\mathcal{N}$ sind aktiv; nenne diese Teilmatrix $\hat{A}_{\mathcal{N}}, \hat{b}_{\mathcal{N}}$;

Basislösungen sind Ecken

Theorem (Basislösungen und Ecken)

Ist ein Dictionary mit Nichtbasis $\mathcal{N}$ zulässig ($\bar{b}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{B}$), so entspricht seine Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) einer Ecke von $\mathbb{L}(P)$.

- **Basislösung:** $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\tilde{x}_k = 0$ für alle $k \in \mathcal{N}$, dazu $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$.
  $\Rightarrow$ die n Zeilen von $\hat{A}, \hat{b}$ zu den Variablen in $\mathcal{N}$ sind aktiv; nenne diese Teilmatrix $\hat{A}_{\mathcal{N}}, \hat{b}_{\mathcal{N}}$; $\hat{A}_{\mathcal{N}}\hat{x} = \hat{b}_{\mathcal{N}}$.

Basislösungen sind Ecken

Theorem (Basislösungen und Ecken)

Ist ein Dictionary mit Nichtbasis $\mathcal{N}$ zulässig ($\bar{b}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{B}$), so entspricht seine Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) einer Ecke von $\mathbb{L}(P)$.

- **Basislösung:** $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\tilde{x}_k = 0$ für alle $k \in \mathcal{N}$, dazu $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$.
  $\Rightarrow$ die n Zeilen von $\hat{A}, \hat{b}$ zu den Variablen in $\mathcal{N}$ sind aktiv; nenne diese Teilmatrix $\hat{A}_\mathcal{N}, \hat{b}_\mathcal{N}$; $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$.
- Das Dictionary drückt *alle* Variablen, insbesondere $x_1, \ldots, x_n$, affin durch $x_\mathcal{N}$ aus

Basislösungen sind Ecken

Theorem (Basislösungen und Ecken)

Ist ein Dictionary mit Nichtbasis $\mathcal{N}$ zulässig ($\bar{b}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{B}$), so entspricht seine Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) einer Ecke von $\mathbb{L}(P)$.

- **Basislösung:** $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\tilde{x}_k = 0$ für alle $k \in \mathcal{N}$, dazu $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$.
  $\Rightarrow$ die n Zeilen von $\hat{A}, \hat{b}$ zu den Variablen in $\mathcal{N}$ sind aktiv; nenne diese Teilmatrix $\hat{A}_\mathcal{N}, \hat{b}_\mathcal{N}$; $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$.
- Das Dictionary drückt *alle* Variablen, insbesondere $x_1, \ldots, x_n$, affin durch $x_\mathcal{N}$ aus
- Für festes $\mathcal{N}$ können wir zu jedem $x = (x_1, \ldots, x_n)$ berechnen: $x_\mathcal{N} = \hat{b}_\mathcal{N} - \hat{A}_\mathcal{N} x$

Basislösungen sind Ecken

Theorem (Basislösungen und Ecken)

Ist ein Dictionary mit Nichtbasis $\mathcal{N}$ zulässig ($\bar{b}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{B}$), so entspricht seine Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) einer Ecke von $\mathbb{L}(P)$.

- **Basislösung:** $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\tilde{x}_k = 0$ für alle $k \in \mathcal{N}$, dazu $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$.
  $\Rightarrow$ die n Zeilen von $\hat{A}, \hat{b}$ zu den Variablen in $\mathcal{N}$ sind aktiv; nenne diese Teilmatrix $\hat{A}_\mathcal{N}, \hat{b}_\mathcal{N}$; $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$.
- Das Dictionary drückt *alle* Variablen, insbesondere $x_1, \ldots, x_n$, affin durch $x_\mathcal{N}$ aus
- Für festes $\mathcal{N}$ können wir zu jedem $x = (x_1, \ldots, x_n)$ berechnen: $x_\mathcal{N} = \hat{b}_\mathcal{N} - \hat{A}_\mathcal{N} x$
- Umgekehrt können wir zu jedem $x_\mathcal{N}$ auch $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $\hat{A}_\mathcal{N} x = \hat{b}_\mathcal{N} - x_\mathcal{N}$ berechnen

Basislösungen sind Ecken

Theorem (Basislösungen und Ecken)

Ist ein Dictionary mit Nichtbasis $\mathcal{N}$ zulässig ($\bar{b}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{B}$), so entspricht seine Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) einer Ecke von $\mathbb{L}(P)$.

- **Basislösung:** $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\tilde{x}_k = 0$ für alle $k \in \mathcal{N}$, dazu $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$.
  $\Rightarrow$ die n Zeilen von $\hat{A}, \hat{b}$ zu den Variablen in $\mathcal{N}$ sind aktiv; nenne diese Teilmatrix $\hat{A}_\mathcal{N}, \hat{b}_\mathcal{N}$; $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$.
- Das Dictionary drückt *alle* Variablen, insbesondere $x_1, \ldots, x_n$, affin durch $x_\mathcal{N}$ aus
- Für festes $\mathcal{N}$ können wir zu jedem $x = (x_1, \ldots, x_n)$ berechnen: $x_\mathcal{N} = \hat{b}_\mathcal{N} - \hat{A}_\mathcal{N} x$
- Umgekehrt können wir zu jedem $x_\mathcal{N}$ auch $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $\hat{A}_\mathcal{N} x = \hat{b}_\mathcal{N} - x_\mathcal{N}$ berechnen
- Also ist $x \mapsto x_\mathcal{N}$ umkehrbar $\Rightarrow \hat{A}_\mathcal{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar

Basislösungen sind Ecken

Theorem (Basislösungen und Ecken)

Ist ein Dictionary mit Nichtbasis $\mathcal{N}$ zulässig ($\bar{b}_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{B}$), so entspricht seine Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) einer Ecke von $\mathbb{L}(P)$.

- **Basislösung:** $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\tilde{x}_k = 0$ für alle $k \in \mathcal{N}$, dazu $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$.
  $\Rightarrow$ die n Zeilen von $\hat{A}, \hat{b}$ zu den Variablen in $\mathcal{N}$ sind aktiv; nenne diese Teilmatrix $\hat{A}_\mathcal{N}, \hat{b}_\mathcal{N}$; $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$.
- Das Dictionary drückt *alle* Variablen, insbesondere $x_1, \ldots, x_n$, affin durch $x_\mathcal{N}$ aus
- Für festes $\mathcal{N}$ können wir zu jedem $x = (x_1, \ldots, x_n)$ berechnen: $x_\mathcal{N} = \hat{b}_\mathcal{N} - \hat{A}_\mathcal{N} x$
- Umgekehrt können wir zu jedem $x_\mathcal{N}$ auch $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $\hat{A}_\mathcal{N} x = \hat{b}_\mathcal{N} - x_\mathcal{N}$ berechnen
- Also ist $x \mapsto x_\mathcal{N}$ umkehrbar $\Rightarrow \hat{A}_\mathcal{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar
  $\Rightarrow \operatorname{rang} \hat{A}_{I(\tilde{x})} \geq \operatorname{rang} \hat{A}_\mathcal{N} = n$, und x ist zulässig $\Rightarrow$ Ecke

Ecken sind Basislösungen

Theorem (Umkehrung)

Zu jeder Ecke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{L}(P)$ gibt es ein zulässiges Dictionary, dessen Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) $\hat{x}$ ist.

Ecken sind Basislösungen

Theorem (Umkehrung)

Zu jeder Ecke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{L}(P)$ gibt es ein zulässiges Dictionary, dessen Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) $\hat{x}$ ist.

- **Wahl der Basis:** $\hat{x}$ Ecke $\Rightarrow$ n l. u. aktive Zeilen; $\mathcal{N} :=$ ihre n Variablen, $\mathcal{B} :=$ die übrigen m.

Ecken sind Basislösungen

Theorem (Umkehrung)

Zu jeder Ecke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{L}(P)$ gibt es ein zulässiges Dictionary, dessen Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) $\hat{x}$ ist.

- **Wahl der Basis:** $\hat{x}$ Ecke $\Rightarrow$ n l. u. aktive Zeilen; $\mathcal{N} :=$ ihre n Variablen, $\mathcal{B} :=$ die übrigen m.
  $\Rightarrow \hat{A}_{\mathcal{N}}$ invertierbar und $\hat{A}_{\mathcal{N}}\hat{x} = \hat{b}_{\mathcal{N}}$, also $\hat{x} = \hat{A}_{\mathcal{N}}^{-1}\hat{b}_{\mathcal{N}}$.

Ecken sind Basislösungen

Theorem (Umkehrung)

Zu jeder Ecke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{L}(P)$ gibt es ein zulässiges Dictionary, dessen Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) $\hat{x}$ ist.

- **Wahl der Basis:** $\hat{x}$ Ecke $\Rightarrow$ n l. u. aktive Zeilen; $\mathcal{N} :=$ ihre n Variablen, $\mathcal{B} :=$ die übrigen m.
  $\Rightarrow \hat{A}_{\mathcal{N}}$ invertierbar und $\hat{A}_{\mathcal{N}}\hat{x} = \hat{b}_{\mathcal{N}}$, also $\hat{x} = \hat{A}_{\mathcal{N}}^{-1}\hat{b}_{\mathcal{N}}$.
- **Variablen:** Ein *beliebiges* $x \in \mathbb{R}^n$ (nur die ursprünglichen Variablen) legt alle $n + m$ Variablen fest:
  $\hat{b} - \hat{A}x = (w, x)$, eine Variable pro Zeile von $\hat{A}$

Ecken sind Basislösungen

Theorem (Umkehrung)

Zu jeder Ecke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{L}(P)$ gibt es ein zulässiges Dictionary, dessen Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) $\hat{x}$ ist.

- **Wahl der Basis:** $\hat{x}$ Ecke $\Rightarrow$ n l. u. aktive Zeilen; $\mathcal{N} :=$ ihre n Variablen, $\mathcal{B} :=$ die übrigen m.
  $\Rightarrow \hat{A}_\mathcal{N}$ invertierbar und $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$, also $\hat{x} = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}\hat{b}_\mathcal{N}$.
- **Variablen:** Ein *beliebiges* $x \in \mathbb{R}^n$ (nur die ursprünglichen Variablen) legt alle $n+m$ Variablen fest:
  $\hat{b} - \hat{A}x = (w, x)$, eine Variable pro Zeile von $\hat{A}$
- **Aufteilen:** Zeilen nach $\mathcal{N}$ und $\mathcal{B}$ sortieren: $\begin{pmatrix} x_\mathcal{N} \\ x_\mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_\mathcal{N} \\ \hat{b}_\mathcal{B} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{A}_\mathcal{N} \\ \hat{A}_\mathcal{B} \end{pmatrix} x \quad \begin{matrix} (n \text{ Zeilen}) \\ (m \text{ Zeilen}) \end{matrix}$

Ecken sind Basislösungen

Theorem (Umkehrung)

Zu jeder Ecke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{L}(P)$ gibt es ein zulässiges Dictionary, dessen Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) $\hat{x}$ ist.

- **Wahl der Basis:** $\hat{x}$ Ecke $\Rightarrow$ n l. u. aktive Zeilen; $\mathcal{N} :=$ ihre n Variablen, $\mathcal{B} :=$ die übrigen m.
  $\Rightarrow \hat{A}_\mathcal{N}$ invertierbar und $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$, also $\hat{x} = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}\hat{b}_\mathcal{N}$.
- **Variablen:** Ein *beliebiges* $x \in \mathbb{R}^n$ (nur die ursprünglichen Variablen) legt alle $n+m$ Variablen fest:
  $\hat{b} - \hat{A}x = (w, x)$, eine Variable pro Zeile von $\hat{A}$
- **Aufteilen:** Zeilen nach $\mathcal{N}$ und $\mathcal{B}$ sortieren: $\begin{pmatrix} x_\mathcal{N} \\ x_\mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_\mathcal{N} \\ \hat{b}_\mathcal{B} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{A}_\mathcal{N} \\ \hat{A}_\mathcal{B} \end{pmatrix} x \quad \begin{matrix} (n \text{ Zeilen}) \\ (m \text{ Zeilen}) \end{matrix}$
- **Auflösen** (obere n Zeilen): $x = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}(\hat{b}_\mathcal{N} - x_\mathcal{N}) = \hat{x} - \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}$

Ecken sind Basislösungen

Theorem (Umkehrung)

Zu jeder Ecke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{L}(P)$ gibt es ein zulässiges Dictionary, dessen Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) $\hat{x}$ ist.

- **Wahl der Basis:** $\hat{x}$ Ecke $\Rightarrow$ n l. u. aktive Zeilen; $\mathcal{N} :=$ ihre n Variablen, $\mathcal{B} :=$ die übrigen m.
  $\Rightarrow \hat{A}_\mathcal{N}$ invertierbar und $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$, also $\hat{x} = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}\hat{b}_\mathcal{N}$.
- **Variablen:** Ein *beliebiges* $x \in \mathbb{R}^n$ (nur die ursprünglichen Variablen) legt alle $n+m$ Variablen fest:
  $\hat{b} - \hat{A}x = (w, x)$, eine Variable pro Zeile von $\hat{A}$
- **Aufteilen:** Zeilen nach $\mathcal{N}$ und $\mathcal{B}$ sortieren: $\begin{pmatrix} x_\mathcal{N} \\ x_\mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_\mathcal{N} \\ \hat{b}_\mathcal{B} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{A}_\mathcal{N} \\ \hat{A}_\mathcal{B} \end{pmatrix} x \quad \begin{matrix} (n \text{ Zeilen}) \\ (m \text{ Zeilen}) \end{matrix}$
- **Auflösen** (obere n Zeilen): $x = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}(\hat{b}_\mathcal{N} - x_\mathcal{N}) = \hat{x} - \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}$
- **Einsetzen** (untere m Zeilen und Zielfunktion):
  $x_\mathcal{B} = \hat{b}_\mathcal{B} - \hat{A}_\mathcal{B}x = (\hat{b}_\mathcal{B} - \hat{A}_\mathcal{B}\hat{x}) + \hat{A}_\mathcal{B}\hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}$,

Ecken sind Basislösungen

Theorem (Umkehrung)

Zu jeder Ecke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{L}(P)$ gibt es ein zulässiges Dictionary, dessen Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) $\hat{x}$ ist.

- **Wahl der Basis:** $\hat{x}$ Ecke $\Rightarrow$ n l. u. aktive Zeilen; $\mathcal{N} :=$ ihre n Variablen, $\mathcal{B} :=$ die übrigen m.
  $\Rightarrow \hat{A}_\mathcal{N}$ invertierbar und $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$, also $\hat{x} = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}\hat{b}_\mathcal{N}$.
- **Variablen:** Ein *beliebiges* $x \in \mathbb{R}^n$ (nur die ursprünglichen Variablen) legt alle $n+m$ Variablen fest:
  $\hat{b} - \hat{A}x = (w, x)$, eine Variable pro Zeile von $\hat{A}$
- **Aufteilen:** Zeilen nach $\mathcal{N}$ und $\mathcal{B}$ sortieren: $\begin{pmatrix} x_\mathcal{N} \\ x_\mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_\mathcal{N} \\ \hat{b}_\mathcal{B} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{A}_\mathcal{N} \\ \hat{A}_\mathcal{B} \end{pmatrix} x \quad \begin{matrix} (n \text{ Zeilen}) \\ (m \text{ Zeilen}) \end{matrix}$
- **Auflösen** (obere n Zeilen): $x = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}(\hat{b}_\mathcal{N} - x_\mathcal{N}) = \hat{x} - \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}$
- **Einsetzen** (untere m Zeilen und Zielfunktion):
  $x_\mathcal{B} = \hat{b}_\mathcal{B} - \hat{A}_\mathcal{B}x = (\hat{b}_\mathcal{B} - \hat{A}_\mathcal{B}\hat{x}) + \hat{A}_\mathcal{B}\hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}, \quad \zeta = c^T x = c^T\hat{x} - c^T\hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}$

Ecken sind Basislösungen

Theorem (Umkehrung)

Zu jeder Ecke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{L}(P)$ gibt es ein zulässiges Dictionary, dessen Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) $\hat{x}$ ist.

- **Wahl der Basis:** $\hat{x}$ Ecke $\Rightarrow$ n l. u. aktive Zeilen; $\mathcal{N} :=$ ihre n Variablen, $\mathcal{B} :=$ die übrigen m.
  $\Rightarrow \hat{A}_\mathcal{N}$ invertierbar und $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$, also $\hat{x} = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}\hat{b}_\mathcal{N}$.
- **Variablen:** Ein *beliebiges* $x \in \mathbb{R}^n$ (nur die ursprünglichen Variablen) legt alle $n+m$ Variablen fest:
  $\hat{b} - \hat{A}x = (w, x)$, eine Variable pro Zeile von $\hat{A}$
- **Aufteilen:** Zeilen nach $\mathcal{N}$ und $\mathcal{B}$ sortieren: $\begin{pmatrix} x_\mathcal{N} \\ x_\mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_\mathcal{N} \\ \hat{b}_\mathcal{B} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{A}_\mathcal{N} \\ \hat{A}_\mathcal{B} \end{pmatrix} x \quad \begin{matrix} (n \text{ Zeilen}) \\ (m \text{ Zeilen}) \end{matrix}$
- **Auflösen** (obere n Zeilen): $x = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}(\hat{b}_\mathcal{N} - x_\mathcal{N}) = \hat{x} - \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}$
- **Einsetzen** (untere m Zeilen und Zielfunktion):
  $x_\mathcal{B} = \hat{b}_\mathcal{B} - \hat{A}_\mathcal{B}x = (\hat{b}_\mathcal{B} - \hat{A}_\mathcal{B}\hat{x}) + \hat{A}_\mathcal{B}\hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}, \quad \zeta = c^T x = c^T\hat{x} - c^T\hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}$
- **Zulässig:** Konstanten $\bar{b}_\mathcal{B} = \hat{b}_\mathcal{B} - \hat{A}_\mathcal{B}\hat{x} \geq 0$, da $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$;

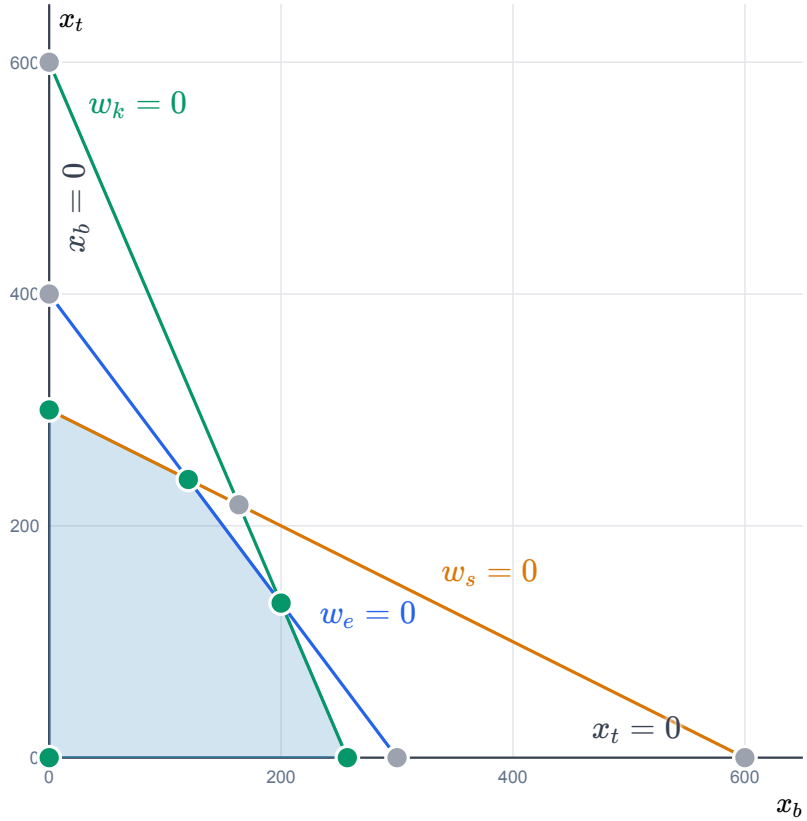
Ecken sind Basislösungen

Theorem (Umkehrung)

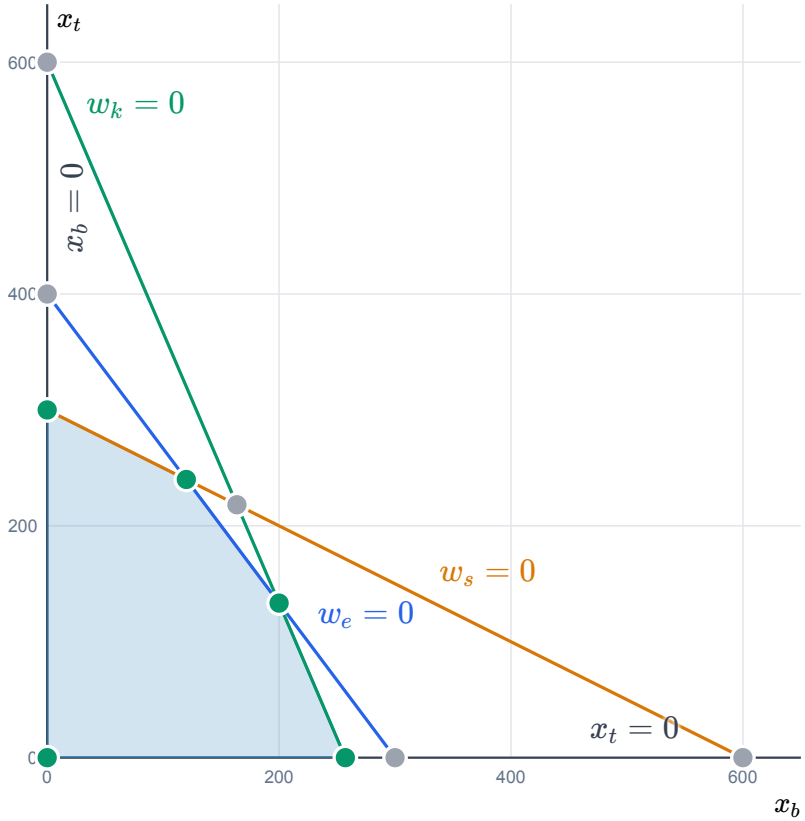
Zu jeder Ecke $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{L}(P)$ gibt es ein zulässiges Dictionary, dessen Basislösung (nach Weglassen der Schlupfvariablen) $\hat{x}$ ist.

- **Wahl der Basis:** $\hat{x}$ Ecke $\Rightarrow$ n l. u. aktive Zeilen; $\mathcal{N} :=$ ihre n Variablen, $\mathcal{B} :=$ die übrigen m.
  $\Rightarrow \hat{A}_\mathcal{N}$ invertierbar und $\hat{A}_\mathcal{N}\hat{x} = \hat{b}_\mathcal{N}$, also $\hat{x} = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}\hat{b}_\mathcal{N}$.
- **Variablen:** Ein *beliebiges* $x \in \mathbb{R}^n$ (nur die ursprünglichen Variablen) legt alle $n+m$ Variablen fest:
  $\hat{b} - \hat{A}x = (w, x)$, eine Variable pro Zeile von $\hat{A}$
- **Aufteilen:** Zeilen nach $\mathcal{N}$ und $\mathcal{B}$ sortieren: $\begin{pmatrix} x_\mathcal{N} \\ x_\mathcal{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_\mathcal{N} \\ \hat{b}_\mathcal{B} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{A}_\mathcal{N} \\ \hat{A}_\mathcal{B} \end{pmatrix} x \quad \begin{matrix} (n \text{ Zeilen}) \\ (m \text{ Zeilen}) \end{matrix}$
- **Auflösen** (obere n Zeilen): $x = \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}(\hat{b}_\mathcal{N} - x_\mathcal{N}) = \hat{x} - \hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}$
- **Einsetzen** (untere m Zeilen und Zielfunktion):
  $x_\mathcal{B} = \hat{b}_\mathcal{B} - \hat{A}_\mathcal{B}x = (\hat{b}_\mathcal{B} - \hat{A}_\mathcal{B}\hat{x}) + \hat{A}_\mathcal{B}\hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}, \quad \zeta = c^T x = c^T\hat{x} - c^T\hat{A}_\mathcal{N}^{-1}x_\mathcal{N}$
- **Zulässig:** Konstanten $\bar{b}_\mathcal{B} = \hat{b}_\mathcal{B} - \hat{A}_\mathcal{B}\hat{x} \geq 0$, da $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$; Basislösung $x_\mathcal{N} = 0 \Rightarrow x = \hat{x}$.

Basen im Stahlwerk-Beispiel

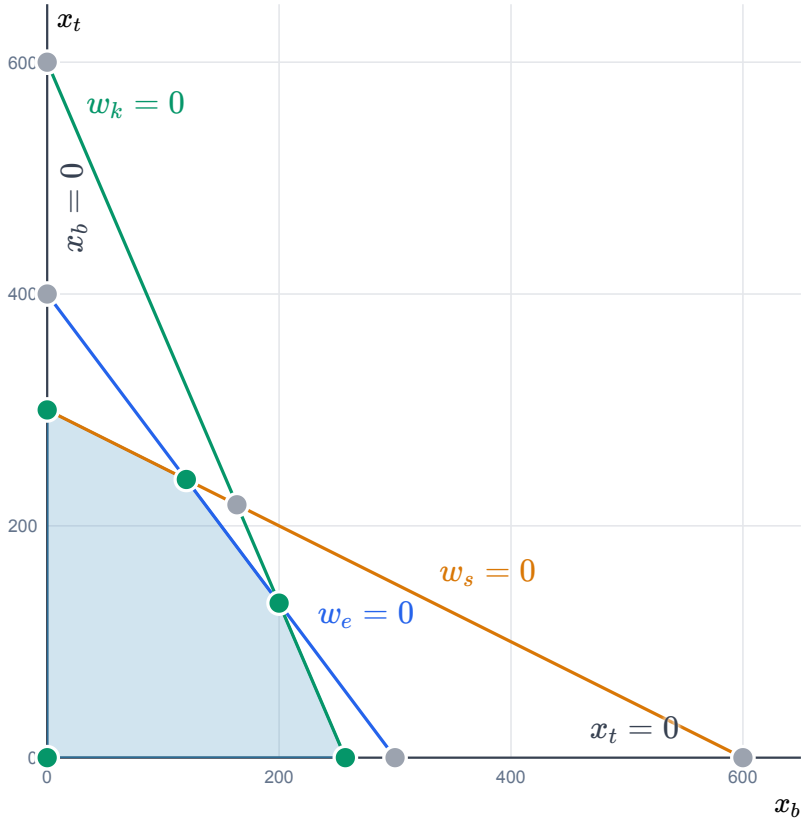


Basen im Stahlwerk-Beispiel



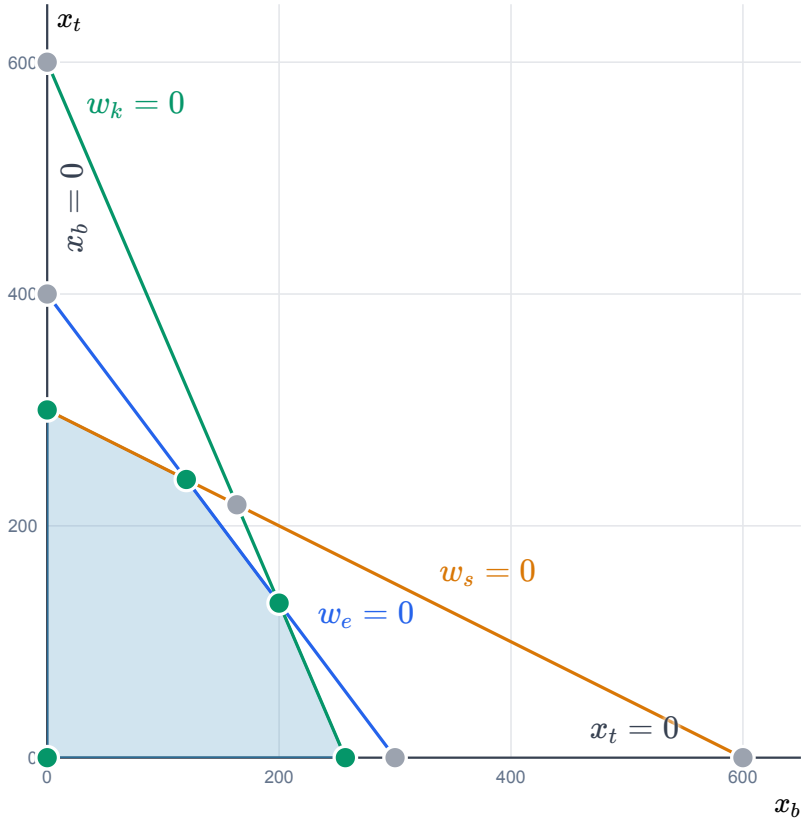
- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch

Basen im Stahlwerk-Beispiel



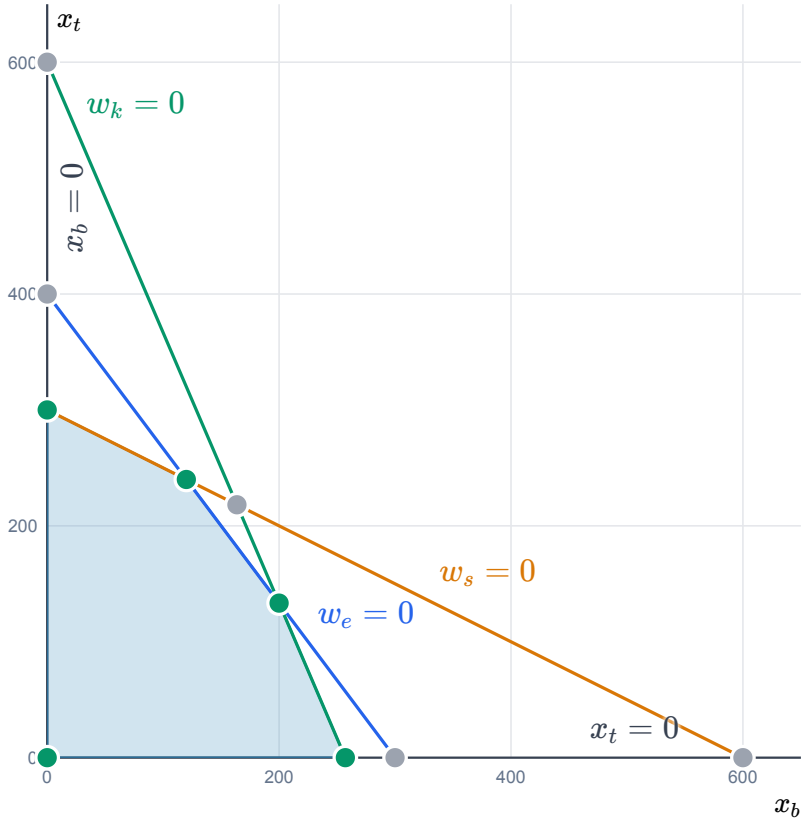
- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$

Basen im Stahlwerk-Beispiel



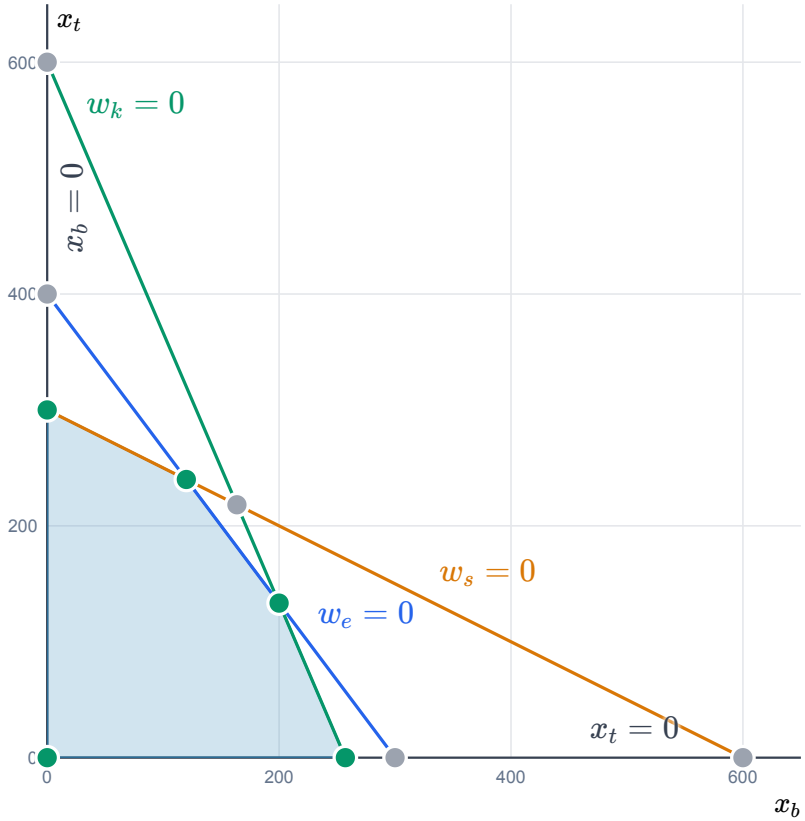
- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$
- Keine zwei Geraden parallel $\Rightarrow$ linear unabhängig

Basen im Stahlwerk-Beispiel



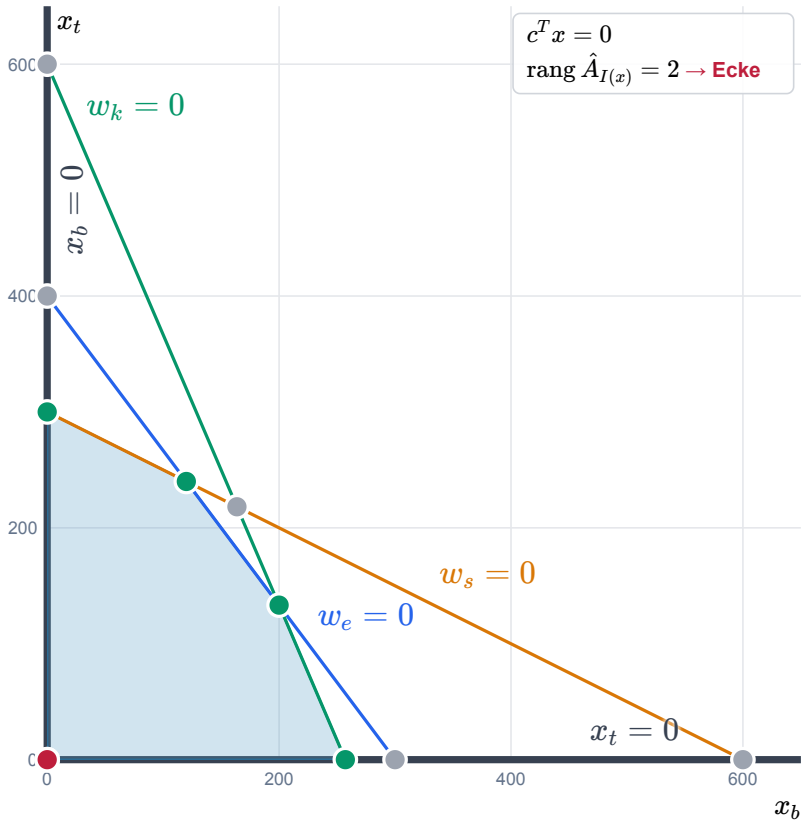
- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$
- Keine zwei Geraden parallel $\Rightarrow$ linear unabhängig
- Nur 5 davon zulässig (**grün**, grau: unzulässig)

Basen im Stahlwerk-Beispiel



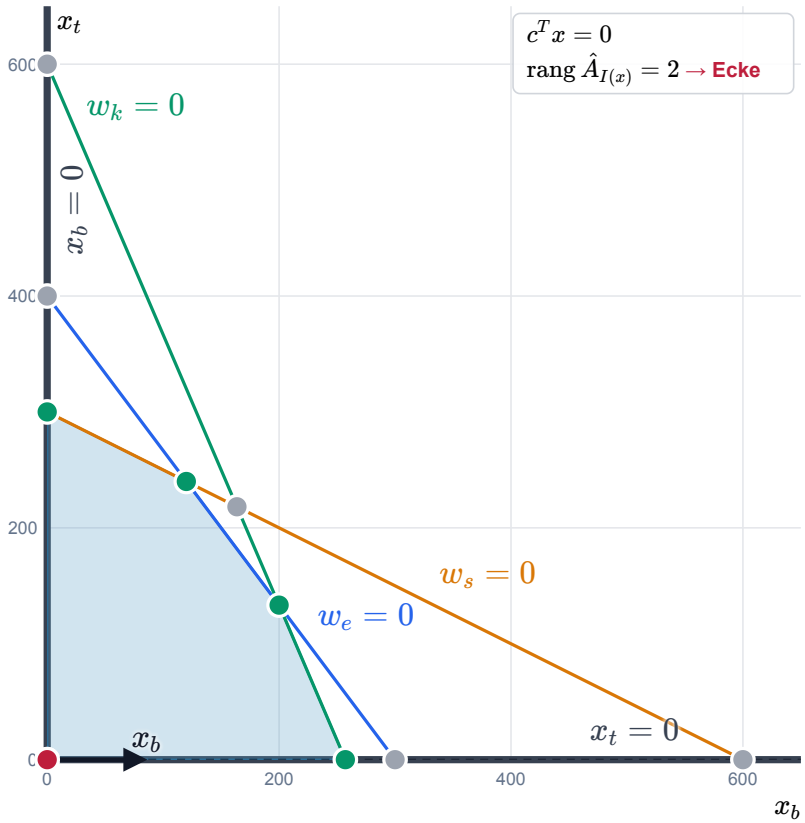
- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$
- Keine zwei Geraden parallel $\Rightarrow$ linear unabhängig
- Nur 5 davon zulässig (**grün**, grau: unzulässig)
- Simplex:
  - Besucht nur zulässige Basen und
  - Tauscht pro Pivotschritt *eine* Variable
  - Von Ecke zu *benachbarter* Ecke

Basen im Stahlwerk-Beispiel



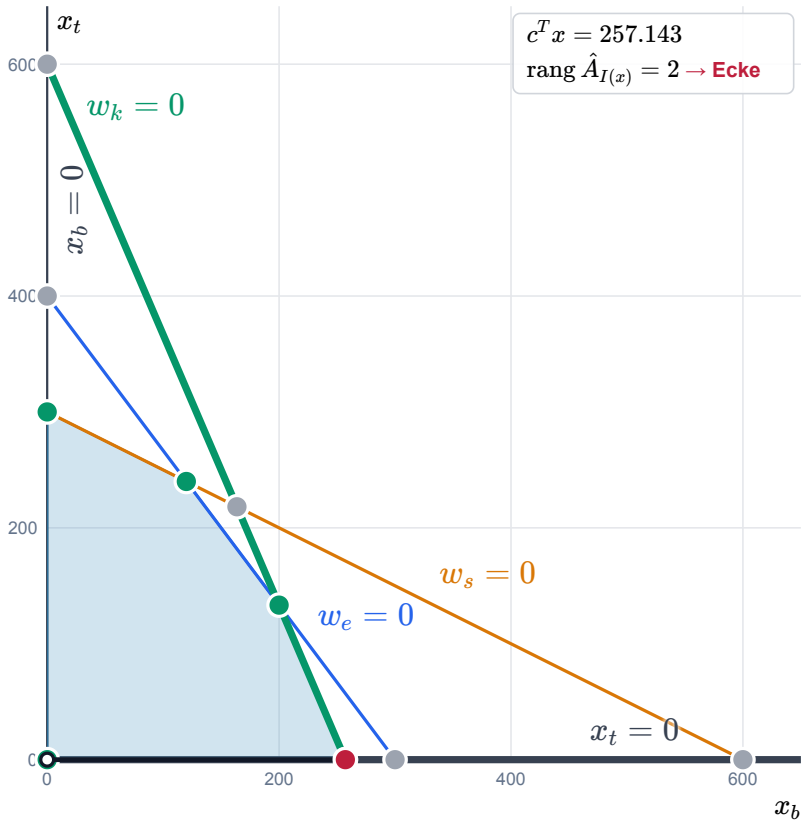
- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$
- Keine zwei Geraden parallel $\Rightarrow$ linear unabhängig
- Nur 5 davon zulässig (**grün**, grau: unzulässig)
- Simplex:
  - Besucht nur zulässige Basen und
  - Tauscht pro Pivotschritt *eine* Variable
  - Von Ecke zu *benachbarter* Ecke

Basen im Stahlwerk-Beispiel



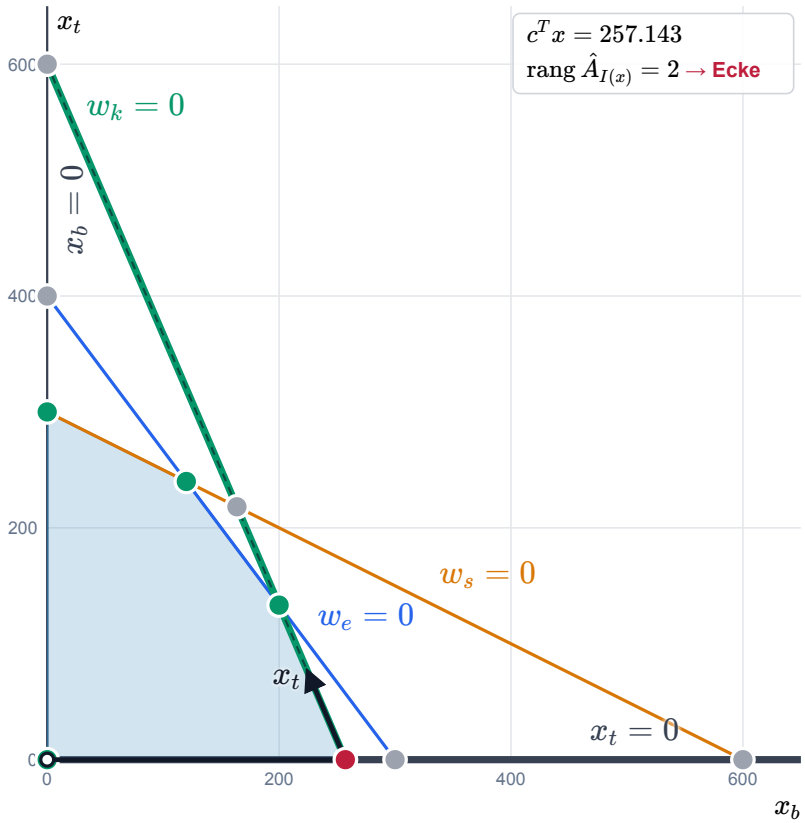
- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$
- Keine zwei Geraden parallel $\Rightarrow$ linear unabhängig
- Nur 5 davon zulässig (**grün**, **grau**: unzulässig)
- Simplex:
  - Besucht nur zulässige Basen und
  - Tauscht pro Pivotschritt *eine* Variable
  - Von Ecke zu *benachbarter* Ecke

Basen im Stahlwerk-Beispiel



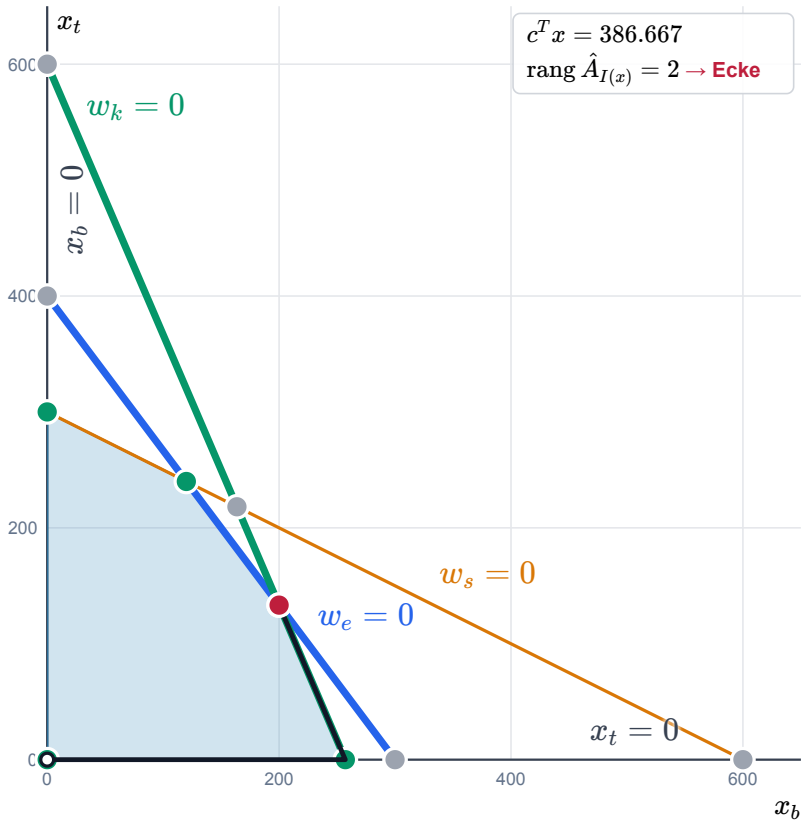
- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$
- Keine zwei Geraden parallel $\Rightarrow$ linear unabhängig
- Nur 5 davon zulässig (**grün**, **grau**: unzulässig)
- Simplex:
  - Besucht nur zulässige Basen und
  - Tauscht pro Pivotschritt *eine* Variable
  - Von Ecke zu *benachbarter* Ecke

Basen im Stahlwerk-Beispiel



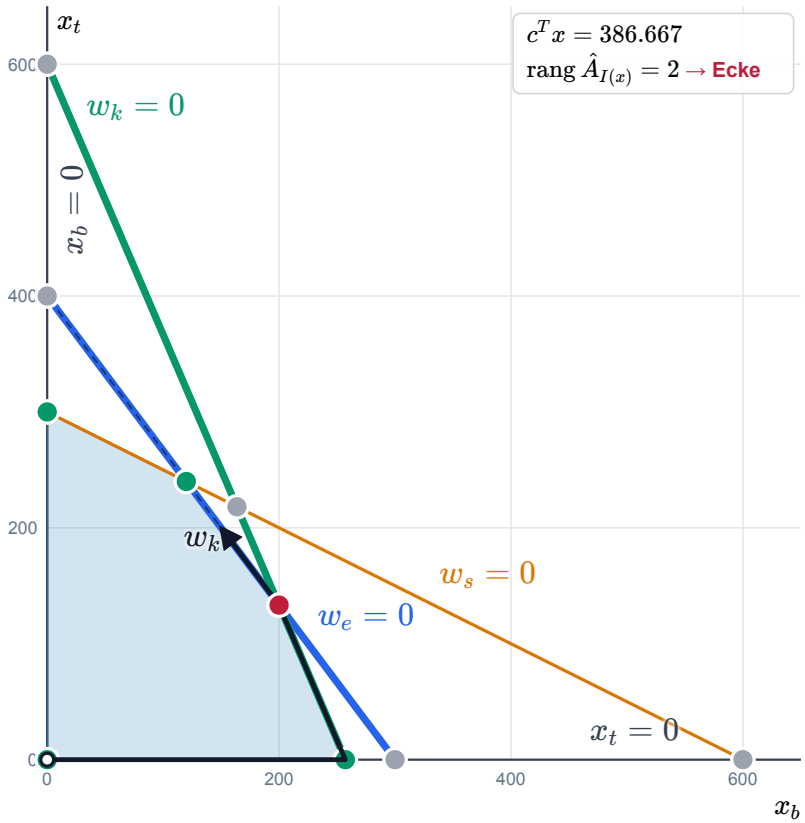
- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$
- Keine zwei Geraden parallel $\Rightarrow$ linear unabhängig
- Nur 5 davon zulässig (**grün**, **grau**: unzulässig)
- Simplex:
  - Besucht nur zulässige Basen und
  - Tauscht pro Pivotschritt *eine* Variable
  - Von Ecke zu *benachbarter* Ecke

Basen im Stahlwerk-Beispiel



- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$
- Keine zwei Geraden parallel $\Rightarrow$ linear unabhängig
- Nur 5 davon zulässig (**grün**, **grau**: unzulässig)
- Simplex:
  - Besucht nur zulässige Basen und
  - Tauscht pro Pivotschritt *eine* Variable
  - Von Ecke zu *benachbarter* Ecke

Basen im Stahlwerk-Beispiel



- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$
- Keine zwei Geraden parallel $\Rightarrow$ linear unabhängig
- Nur 5 davon zulässig (**grün**, **grau**: unzulässig)
- Simplex:
  - Besucht nur zulässige Basen und
  - Tauscht pro Pivotschritt *eine* Variable
  - Von Ecke zu *benachbarter* Ecke

Basen im Stahlwerk-Beispiel



- $n + m = 5$ Variablen x_b, x_t, w_e, w_k, w_s, davon $n = 2$ nichtbasisch
- $\binom{5}{2} = 10$ Kandidaten für $\mathcal{N}$
- Keine zwei Geraden parallel $\Rightarrow$ linear unabhängig
- Nur 5 davon zulässig (**grün**, **grau**: unzulässig)
- Simplex:
  - Besucht nur zulässige Basen und
  - Tauscht pro Pivotschritt *eine* Variable
  - Von Ecke zu *benachbarter* Ecke

Andere Fragen

Andere Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

Andere Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

Andere Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Andere Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Antwort: (a) Kann Einfluss auf die Laufzeit und Termination haben.

Andere Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Antwort: (a) Kann Einfluss auf die Laufzeit und Termination haben.

Antwort: (b) Kann Einfluss auf die Laufzeit und Termination haben (in Fällen, wo die Wahl nicht eindeutig ist).

Andere Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Antwort: (a) Kann Einfluss auf die Laufzeit und Termination haben.

Antwort: (b) Kann Einfluss auf die Laufzeit und Termination haben (in Fällen, wo die Wahl nicht eindeutig ist).

Antwort: (c) Es gibt haarige Sonderfälle, die zusätzliche Regeln brauchen!

Andere Fragen

(a) Wie wählen wir x_j (*entering variable*)?

(b) Wie wählen wir x_k (*leaving variable*), wenn es mehrere Wahlmöglichkeiten gibt?

(c) Können wir sicher sein, dass Simplex terminiert?

Antwort: (a) Kann Einfluss auf die Laufzeit und Termination haben.

Antwort: (b) Kann Einfluss auf die Laufzeit und Termination haben (in Fällen, wo die Wahl nicht eindeutig ist).

Antwort: (c) Es gibt haarige Sonderfälle, die zusätzliche Regeln brauchen!

Dazu nächstes Mal mehr!