Technische Universität Braunschweig

Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Algorithmik

Mathematische Methoden der Algorithmik
Organisation & Einführung

Wintersemester 2026/27

Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

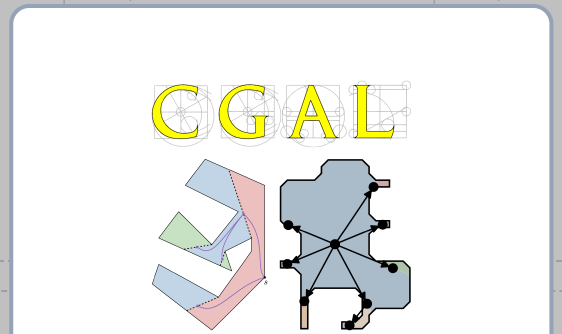
PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

Forschungsinteressen

Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

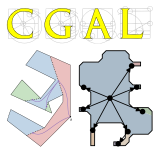
Forschungsinteressen



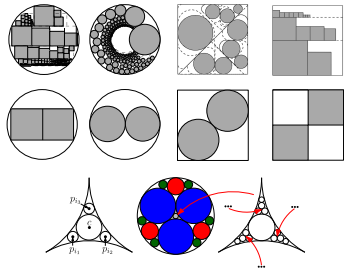
Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

Forschungsinteressen



Computational Geometry & Algorithm Engineering

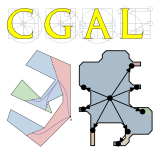


Überdecken und Packen

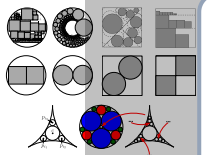
Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

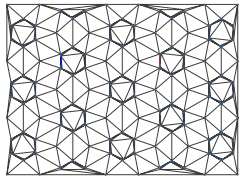
Forschungsinteressen



Computational Geometry & Algorithm Engineering



Überdecken und Packen

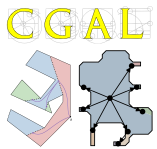


Minimum-Weight-Triangulierung

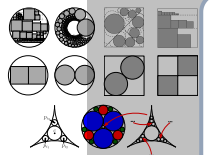
Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

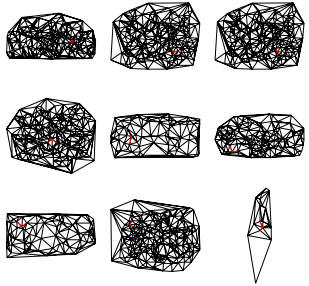
Forschungsinteressen



Computational Geometry & Algorithm Engineering



Überdecken und Packen

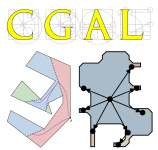


Minimum-Dilation-Triangulierung

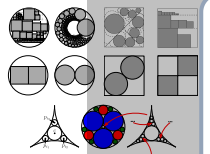
Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

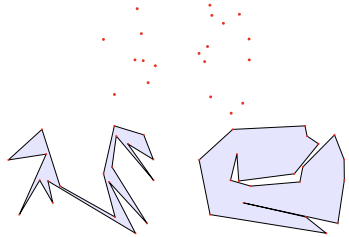
Forschungsinteressen



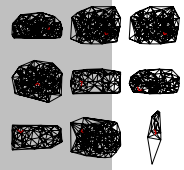
Computational Geometry & Algorithm Engineering



Überdecken und Packen



Polygonisierung

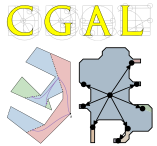


Minimum-Dilation-Triangulierung

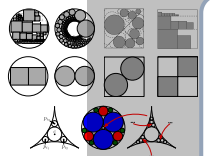
Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

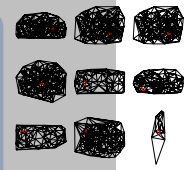
Forschungsinteressen



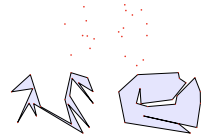
Computational Geometry & Algorithm Engineering



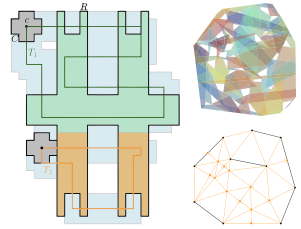
Überdecken und Pack



Minimum-Dilation-Triangulierung



Polygonisierung

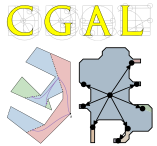


Computational Geometry Challenges

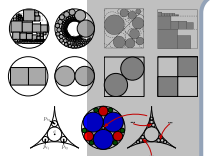
Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

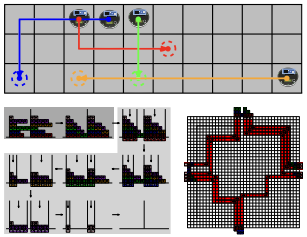
Forschungsinteressen



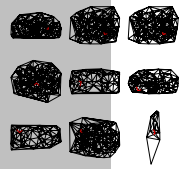
Computational Geometry & Algorithm Engineering



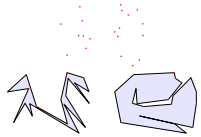
Überdecken und Pack



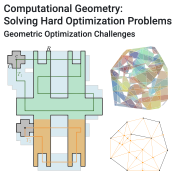
Multi-Agent Path Planning



Minimum-Dilation-Triangulierung



Polygonisierung

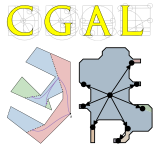


Computational Geometry Challenges

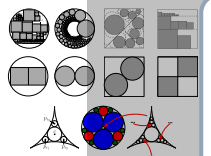
Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

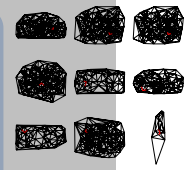
Forschungsinteressen



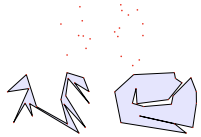
Computational Geometry & Algorithm Engineering



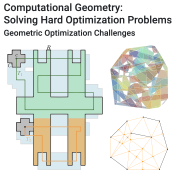
Überdecken und Pack



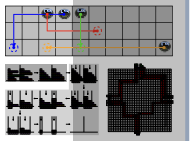
Minimum-Dilation-Triangulierung



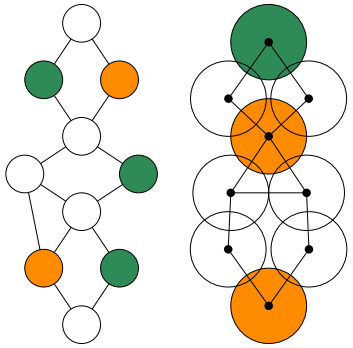
Polygonisierung



Computational Geometry Challenges



Multi-Agent Path Planning

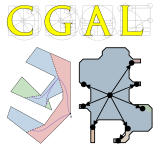


Graphentheorie

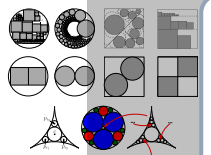
Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

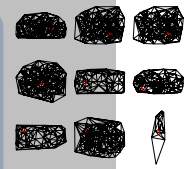
Forschungsinteressen



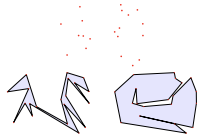
Computational Geometry & Algorithm Engineering



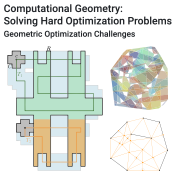
Überdecken und Pack



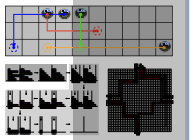
Minimum-Dilation-Triangulierung



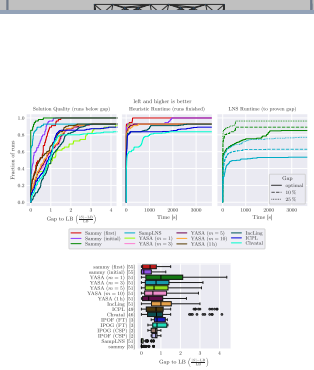
Polygonisierung



Computational Geometry Challenges



Multi-Agent Path Planning



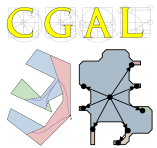
Logik & Software Engineering

Graphentheorie

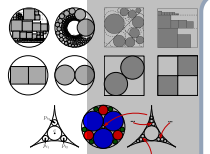
Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

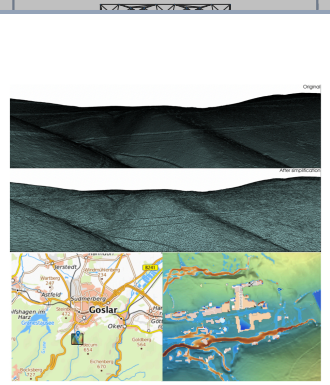
Forschungsinteressen



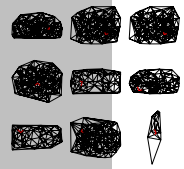
Computational Geometry & Algorithm Engineering



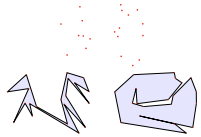
Überdecken und Pack



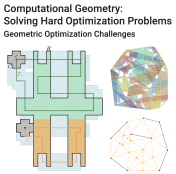
Simulation von Starkregen



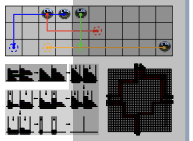
Minimum-Dilation-Triangulierung



Polygonisierung

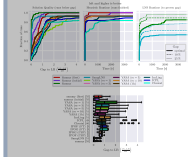


Computational Geometry Challenges



Multi-Agent Path Planning

Graphentheorie

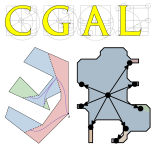


Logik & Software Engineering

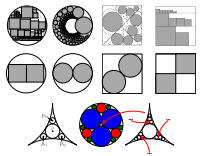
Vorstellung: Dr. Phillip Keldenich

PostDoc in der Algorithmik, schon etwas länger hier, #GernePerDu

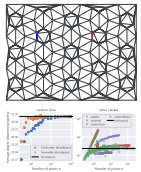
Forschungsinteressen



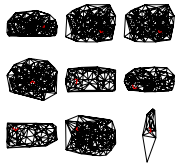
Computational Geometry & Algorithm Engineering



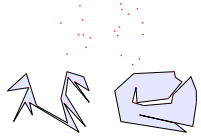
Überdecken und Packen



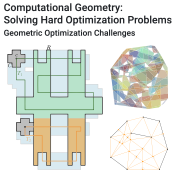
Minimum-Weight-Triangulierung



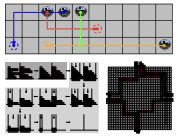
Minimum-Dilation-Triangulierung



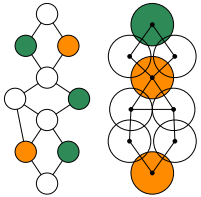
Polygonisierung



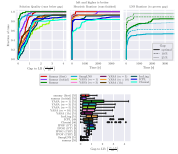
Computational Geometry Challenges



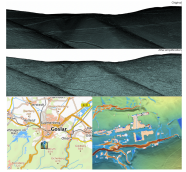
Multi-Agent Path Planning



Graphentheorie



Logik & Software Engineering



Simulation von Starkregen

Bastian Bosse-Graf

Jetzt Ihr

Jetzt Ihr

- Welcher Studiengang?

Jetzt Ihr

- Welcher Studiengang?
- Bachelor oder Master?

Jetzt Ihr

- Welcher Studiengang?
- Bachelor oder Master?
- Welches Semester?

Organisation

Organisation

Vorlesung

- Grundlagen
- Konzepte
- Beweise
- Details

Organisation

Vorlesung

- Grundlagen
- Konzepte
- Beweise
- Details

Große Übung

- Wiederholung
- Vertiefung
- Implementierung
- Exkurse
- (Mehr) Beispiele

Organisation

Vorlesung

- Grundlagen
- Konzepte
- Beweise
- Details

Große Übung

- Wiederholung
- Vertiefung
- Implementierung
- Exkurse
- (Mehr) Beispiele

Kleine Übung

- Besprechung Hausaufgaben
- Rückgabe korrigierter Hausaufgaben
- Kontrolle: Habe ich das verstanden?
- Rückfragen

Organisation

Vorlesung

- Grundlagen
- Konzepte
- Beweise
- Details

Große Übung

- Wiederholung
- Vertiefung
- Implementierung
- Exkurse
- (Mehr) Beispiele

Kleine Übung

- Besprechung Hausaufgaben
- Rückgabe korrigierter Hausaufgaben
- Kontrolle: Habe ich das verstanden?
- Rückfragen

Studienleistung: 50 % der Punkte aller Übungsblätter.

Organisation

Vorlesung

- Grundlagen
- Konzepte
- Beweise
- Details

Große Übung

- Wiederholung
- Vertiefung
- Implementierung
- Exkurse
- (Mehr) Beispiele

Kleine Übung

- Besprechung Hausaufgaben
- Rückgabe korrigierter Hausaufgaben
- Kontrolle: Habe ich das verstanden?
- Rückfragen

Studienleistung: 50 % der Punkte aller Übungsblätter.

Gruppenabgaben: je nach Teilnehmerzahl.

Organisation

Vorlesung

- Grundlagen
- Konzepte
- Beweise
- Details

Große Übung

- Wiederholung
- Vertiefung
- Implementierung
- Exkurse
- (Mehr) Beispiele

Kleine Übung

- Besprechung Hausaufgaben
- Rückgabe korrigierter Hausaufgaben
- Kontrolle: Habe ich das verstanden?
- Rückfragen

Studienleistung: 50 % der Punkte aller Übungsblätter.

Gruppenabgaben: je nach Teilnehmerzahl.

Das funktioniert nur, wenn man die Hausaufgaben selbst macht!

Wenn Ihr Fragen habt

Wenn Ihr Fragen habt

✓	Inhaltlich oder allgemeiner Ablauf	Vorlesung / große Übung

Wenn Ihr Fragen habt

Inhaltlich oder allgemeiner Ablauf	Vorlesung / große Übung
Zu Übungsblättern	Kleine Übungen

Wenn Ihr Fragen habt

Inhaltlich oder allgemeiner Ablauf	Vorlesung / große Übung
Zu Übungsblättern	Kleine Übungen
Individuelle Fragen	**Immer per Mail** an keldenich@ibr.cs.tu-bs.de

Wenn Ihr Fragen habt

Inhaltlich oder allgemeiner Ablauf	Vorlesung / große Übung
Zu Übungsblättern	Kleine Übungen
Individuelle Fragen	**Immer per Mail** an keldenich@ibr.cs.tu-bs.de
Sprechstunde	Nach Rücksprache (per E-Mail oder in Person)

Wenn Ihr Fragen habt

Inhaltlich oder allgemeiner Ablauf	Vorlesung / große Übung
Zu Übungsblättern	Kleine Übungen
Individuelle Fragen	**Immer per Mail** an keldenich@ibr.cs.tu-bs.de
Sprechstunde	Nach Rücksprache (per E-Mail oder in Person)



Semesterplan (vorläufig)

Datum (VL)	Vorlesung	Inhalte	Große/kleine Übung	Hausaufgabe (Di.)
22.10.	0	Einleitung, Fundamentalsatz	–	HA 1
29.10.	1	Simplex	–	
05.11.	2	Laufzeit Simplex	G **03.11.**	HA 1 / HA 2
12.11.	3	Dualität I	K **10.11.**	
19.11.	4	Dualität II	G **17.11.**	HA 2 / HA 3
26.11.	5	Matrixnotation	K **24.11.**	
03.12.	6	Implementierung	G **01.12.**	HA 3 / HA 4
10.12.	7	Allgemeine LPs	K **08.12.**	
17.12.	8	Barrier & PDLP	G **15.12.**	HA 4
			–	
24.12.	Traveling Santa Break			
31.12.	Firework Factory Break			
07.01.	9	Integer Programming I	–	HA 5 (07.01.)
14.01.	10	Integer Programming II	K **12.01.**	
21.01.	11	Graphprobleme	G **19.01.**	HA 5 / Fragen
28.01.	12	Geometrische Probleme	K **26.01.**	
04.02.	13	Zusammenfassung	G **02.02.**	Fragen

Material & Kommunikation

Materialseite

Materialseite

Folien, Hausaufgabenblätter: https://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws2627/mma/index.html

Materialseite

Folien, Hausaufgabenblätter: https://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws2627/mma/index.html

- Ich versuche es vor der Vorlesung zu schaffen
- Kann das nicht immer versprechen

Materialseite

Folien, Hausaufgabenblätter: https://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws2627/mma/index.html

- Ich versuche es vor der Vorlesung zu schaffen
- Kann das nicht immer versprechen

Mailingliste

Materialseite

Folien, Hausaufgabenblätter: https://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws2627/mma/index.html

- Ich versuche es vor der Vorlesung zu schaffen
- Kann das nicht immer versprechen

Mailingliste

Ankündigung (Raumänderungen, Ausfall, …): https://lists.ibr.cs.tu-bs.de/postorius/lists/mma.ibr.cs.tu-bs.de/

Materialseite

Folien, Hausaufgabenblätter: https://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws2627/mma/index.html

- Ich versuche es vor der Vorlesung zu schaffen
- Kann das nicht immer versprechen

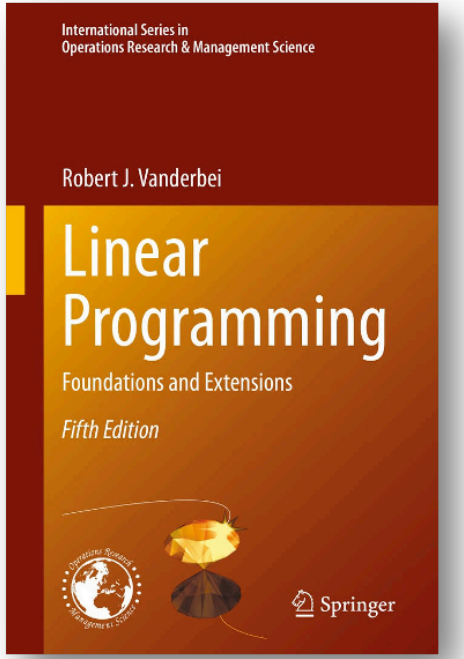
Mailingliste

Ankündigung (Raumänderungen, Ausfall, …): https://lists.ibr.cs.tu-bs.de/postorius/lists/mma.ibr.cs.tu-bs.de/

- Bitte meldet Euch an
- Idealerweise mit Eurer TU BS-Adresse
- Liste ist moderiert

Literatur

Der Kurs basiert lose auf diesem Buch:



Prüfungsform

Prüfungsform

Prüfungsform: Abhängig von Teilnehmerzahl.

Prüfungsform

Prüfungsform: Abhängig von Teilnehmerzahl.

Wird in den ersten paar Wochen der Veranstaltung geklärt.

Prüfungsform

Prüfungsform: Abhängig von Teilnehmerzahl.

Wird in den ersten paar Wochen der Veranstaltung geklärt.

Bei Klausur

Prüfungsdauer: 120 Minuten, Termin voraussichtlich 11.02.2027.

Prüfungsform

Prüfungsform: Abhängig von Teilnehmerzahl.

Wird in den ersten paar Wochen der Veranstaltung geklärt.

Bei Klausur

Prüfungsdauer: 120 Minuten, Termin voraussichtlich 11.02.2027.

Bei mündlicher Prüfung

Wesentlich flexibler; Prüfungsdauer 30 Minuten. In der Regel mehrere Terminblöcke nach Absprache.

Prüfungsform

Prüfungsform: Abhängig von Teilnehmerzahl.

Wird in den ersten paar Wochen der Veranstaltung geklärt.

Bei Klausur

Prüfungsdauer: 120 Minuten, Termin voraussichtlich 11.02.2027.

Bei mündlicher Prüfung

Wesentlich flexibler; Prüfungsdauer 30 Minuten. In der Regel mehrere Terminblöcke nach Absprache.

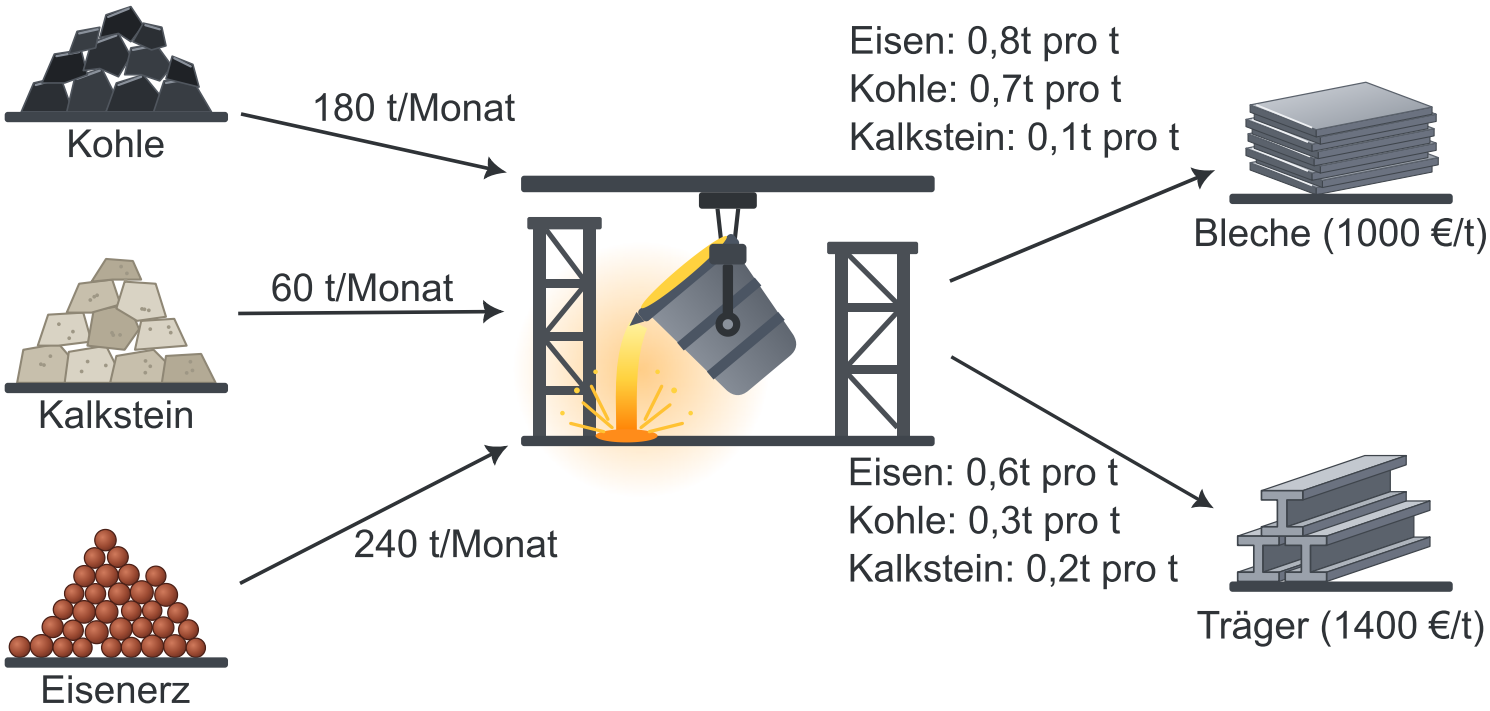
Wer hatte schon einmal eine mündliche Prüfung bei uns?

Fragen zur Organisation

Hat einer von Euch noch Fragen zur Organisation?

Kapitel 1: Lineare Programme

Motivation: Stahlwerk



Problem: Wie viele Einheiten Bleche und Träger sollten wir produzieren, um unseren Profit zu maximieren?

Mathematische Formulierung

Welche Größen sind relevant?

Mathematische Formulierung

Welche Größen sind relevant?

Entscheidungsvariablen:

Mathematische Formulierung

Welche Größen sind relevant?

Entscheidungsvariablen:

- x_b: monatliche Blechproduktion, x_t: monatliche Trägerproduktion

Mathematische Formulierung

Welche Größen sind relevant?

Entscheidungsvariablen:

- x_b: monatliche Blechproduktion, x_t: monatliche Trägerproduktion

Gewinn:

Mathematische Formulierung

Welche Größen sind relevant?

Entscheidungsvariablen:

- x_b: monatliche Blechproduktion, x_t: monatliche Trägerproduktion

Gewinn:

- **Pro Einheit:** c_b, c_t für Bleche/Träger, **gesamt:** $c_b x_b + c_t x_t$, zu maximierende **Zielfunktion**

Mathematische Formulierung

Welche Größen sind relevant?

Entscheidungsvariablen:

- x_b: monatliche Blechproduktion, x_t: monatliche Trägerproduktion

Gewinn:

- **Pro Einheit:** c_b, c_t für Bleche/Träger, **gesamt:** $c_b x_b + c_t x_t$, zu maximierende **Zielfunktion**

Verbrauch:

Mathematische Formulierung

Welche Größen sind relevant?

Entscheidungsvariablen:

- x_b: monatliche Blechproduktion, x_t: monatliche Trägerproduktion

Gewinn:

- **Pro Einheit:** c_b, c_t für Bleche/Träger, **gesamt:** $c_b x_b + c_t x_t$, zu maximierende **Zielfunktion**

Verbrauch:

- **Pro Einheit:** $a_{e,b}, a_{k,b}, a_{s,b}$: **E**isen-/**K**ohle-/Kalk**s**teinverbrauch je Einheit Bleche
- $a_{e,t}, a_{k,t}, a_{s,t}$: **E**isen-/**K**ohle-/Kalk**s**teinverbrauch je Einheit Träger
- b_e, b_k, b_s: Monatliches Budget an Eisen/Kohle/Kalkstein

Mathematische Formulierung

Welche Größen sind relevant?

Entscheidungsvariablen:

- x_b: monatliche Blechproduktion, x_t: monatliche Trägerproduktion

Gewinn:

- **Pro Einheit:** c_b, c_t für Bleche/Träger, **gesamt:** $c_b x_b + c_t x_t$, zu maximierende **Zielfunktion**

Verbrauch:

- **Pro Einheit:** $a_{e,b}, a_{k,b}, a_{s,b}$: **E**isen-/**K**ohle-/Kalk**s**teinverbrauch je Einheit Bleche
- $a_{e,t}, a_{k,t}, a_{s,t}$: **E**isen-/**K**ohle-/Kalk**s**teinverbrauch je Einheit Träger
- b_e, b_k, b_s: Monatliches Budget an Eisen/Kohle/Kalkstein

Haben: $a_{p,r}$, b_r, c_p; **suchen:** x_b, x_t

Formaler

Formaler

$$\max c_b x_b + c_t x_t \quad \text{s.t.}$$

Formaler

$\max c_b x_b + c_t x_t \quad \text{s.t.}$ (s.t. = subject to, such that, *unter den Nebenbedingungen*)

Formaler

$\max c_b x_b + c_t x_t \quad \text{s.t.}$ (s.t. = subject to, such that, *unter den Nebenbedingungen*)

$$a_{e,b} x_b + a_{e,t} x_t \leq b_e$$

Formaler

$\max c_b x_b + c_t x_t \quad \text{s.t.}$ (s.t. = subject to, such that, *unter den Nebenbedingungen*)

$$a_{e,b} x_b + a_{e,t} x_t \leq b_e$$

$$a_{k,b} x_b + a_{k,t} x_t \leq b_k$$

Formaler

$\max c_b x_b + c_t x_t \quad \text{s.t.}$ (s.t. = subject to, such that, *unter den Nebenbedingungen*)

$$a_{e,b} x_b + a_{e,t} x_t \leq b_e$$

$$a_{k,b} x_b + a_{k,t} x_t \leq b_k$$

$$a_{s,b} x_b + a_{s,t} x_t \leq b_s$$

Formaler

$\max c_b x_b + c_t x_t \quad \text{s.t.}$ (s.t. = subject to, such that, *unter den Nebenbedingungen*)

$$a_{e,b} x_b + a_{e,t} x_t \leq b_e$$

$$a_{k,b} x_b + a_{k,t} x_t \leq b_k$$

$$a_{s,b} x_b + a_{s,t} x_t \leq b_s$$ **Frage:** Reicht das schon?

Formaler

$\max c_b x_b + c_t x_t \quad \text{s.t.}$ (s.t. = subject to, such that, *unter den Nebenbedingungen*)

$$a_{e,b} x_b + a_{e,t} x_t \leq b_e$$

$$a_{k,b} x_b + a_{k,t} x_t \leq b_k$$

$$a_{s,b} x_b + a_{s,t} x_t \leq b_s$$

$$x_b \geq 0, x_t \geq 0$$

Formaler

$\max c_b x_b + c_t x_t \quad \text{s.t.}$ (s.t. = subject to, such that, *unter den Nebenbedingungen*)

$$a_{e,b} x_b + a_{e,t} x_t \leq b_e$$

$$a_{k,b} x_b + a_{k,t} x_t \leq b_k$$

$$a_{s,b} x_b + a_{s,t} x_t \leq b_s$$

$$x_b \geq 0, x_t \geq 0$$

Diese Problemstellung modelliert genau unser Maximierungsproblem.

Formaler

$\max c_b x_b + c_t x_t \quad \text{s.t.}$ (s.t. = subject to, such that, *unter den Nebenbedingungen*)

$$a_{e,b} x_b + a_{e,t} x_t \leq b_e$$

$$a_{k,b} x_b + a_{k,t} x_t \leq b_k$$

$$a_{s,b} x_b + a_{s,t} x_t \leq b_s$$

$$x_b \geq 0, x_t \geq 0$$

Diese Problemstellung modelliert genau unser Maximierungsproblem.

Frage: Wie lösen wir unser Beispiel?

Ein Schritt zurück

Ein Schritt zurück

Wir suchen zwei Werte x_b^*, x_t^* für unserer Entscheidungsvariablen x_b, x_t, die $c_b x_b + c_t x_t$ maximieren.

Ein Schritt zurück

Wir suchen zwei Werte x_b^*, x_t^* für unserer Entscheidungsvariablen x_b, x_t, die $c_b x_b + c_t x_t$ maximieren.

Also suchen wir einen Vektor $(x_b^*, x_t^*) \in \mathbb{R}^2$.

Ein Schritt zurück

Wir suchen zwei Werte x_b^*, x_t^* für unserer Entscheidungsvariablen x_b, x_t, die $c_b x_b + c_t x_t$ maximieren.

Also suchen wir einen Vektor $(x_b^*, x_t^*) \in \mathbb{R}^2$.

Der Vektor muss alle Nebenbedingungen erfüllen. Wie sieht die Menge dieser Vektoren aus?

Ein Schritt zurück

Wir suchen zwei Werte x_b^*, x_t^* für unserer Entscheidungsvariablen x_b, x_t, die $c_b x_b + c_t x_t$ maximieren.

Also suchen wir einen Vektor $(x_b^*, x_t^*) \in \mathbb{R}^2$.

Der Vektor muss alle Nebenbedingungen erfüllen. Wie sieht die Menge dieser Vektoren aus?

Nebenbedingungen haben die Form $x \geq 0$ oder $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$.

Ein Schritt zurück

Wir suchen zwei Werte x_b^*, x_t^* für unserer Entscheidungsvariablen x_b, x_t, die $c_b x_b + c_t x_t$ maximieren.

Also suchen wir einen Vektor $(x_b^*, x_t^*) \in \mathbb{R}^2$.

Der Vektor muss alle Nebenbedingungen erfüllen. Wie sieht die Menge dieser Vektoren aus?

Nebenbedingungen haben die Form $x \geq 0$ oder $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ kennen wir aus der Schule als Geradengleichung.

Ein Schritt zurück

Wir suchen zwei Werte x_b^*, x_t^* für unserer Entscheidungsvariablen x_b, x_t, die $c_b x_b + c_t x_t$ maximieren.

Also suchen wir einen Vektor $(x_b^*, x_t^*) \in \mathbb{R}^2$.

Der Vektor muss alle Nebenbedingungen erfüllen. Wie sieht die Menge dieser Vektoren aus?

Nebenbedingungen haben die Form $x \geq 0$ oder $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ kennen wir aus der Schule als Geradengleichung.

Statt den Punkten auf der Geraden (durch das $=$) lässt das $\leq$ alle Punkte auf einer Seite der Geraden zu.

Ein Schritt zurück

Wir suchen zwei Werte x_b^*, x_t^* für unserer Entscheidungsvariablen x_b, x_t, die $c_b x_b + c_t x_t$ maximieren.

Also suchen wir einen Vektor $(x_b^*, x_t^*) \in \mathbb{R}^2$.

Der Vektor muss alle Nebenbedingungen erfüllen. Wie sieht die Menge dieser Vektoren aus?

Nebenbedingungen haben die Form $x \geq 0$ oder $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ kennen wir aus der Schule als Geradengleichung.

Statt den Punkten auf der Geraden (durch das $=$) lässt das $\leq$ alle Punkte auf einer Seite der Geraden zu.

Eine solche Punktmenge nennt man im Allgemeinen *Halbebene*.

Ein Schritt zurück

Wir suchen zwei Werte x_b^*, x_t^* für unserer Entscheidungsvariablen x_b, x_t, die $c_b x_b + c_t x_t$ maximieren.

Also suchen wir einen Vektor $(x_b^*, x_t^*) \in \mathbb{R}^2$.

Der Vektor muss alle Nebenbedingungen erfüllen. Wie sieht die Menge dieser Vektoren aus?

Nebenbedingungen haben die Form $x \geq 0$ oder $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ kennen wir aus der Schule als Geradengleichung.

Statt den Punkten auf der Geraden (durch das $=$) lässt das $\leq$ alle Punkte auf einer Seite der Geraden zu.

Eine solche Punktmenge nennt man im Allgemeinen *Halbebene*.

Unser Raum zulässiger Lösungen ist also die *Schnittmenge* solcher Halbebenen.

Ein Schritt zurück

Wir suchen zwei Werte x_b^*, x_t^* für unserer Entscheidungsvariablen x_b, x_t, die $c_b x_b + c_t x_t$ maximieren.

Also suchen wir einen Vektor $(x_b^*, x_t^*) \in \mathbb{R}^2$.

Der Vektor muss alle Nebenbedingungen erfüllen. Wie sieht die Menge dieser Vektoren aus?

Nebenbedingungen haben die Form $x \geq 0$ oder $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$.

$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ kennen wir aus der Schule als Geradengleichung.

Statt den Punkten auf der Geraden (durch das $=$) lässt das $\leq$ alle Punkte auf einer Seite der Geraden zu.

Eine solche Punktmenge nennt man im Allgemeinen *Halbebene*.

Unser Raum zulässiger Lösungen ist also die *Schnittmenge* solcher Halbebenen.

Das können wir uns also zuerst einmal geometrisch anschauen!

Raum der zulässigen Lösungen

symbolisch | konkret | Pfeil | 3D

$$\max \; c_b x_b + c_t x_t$$

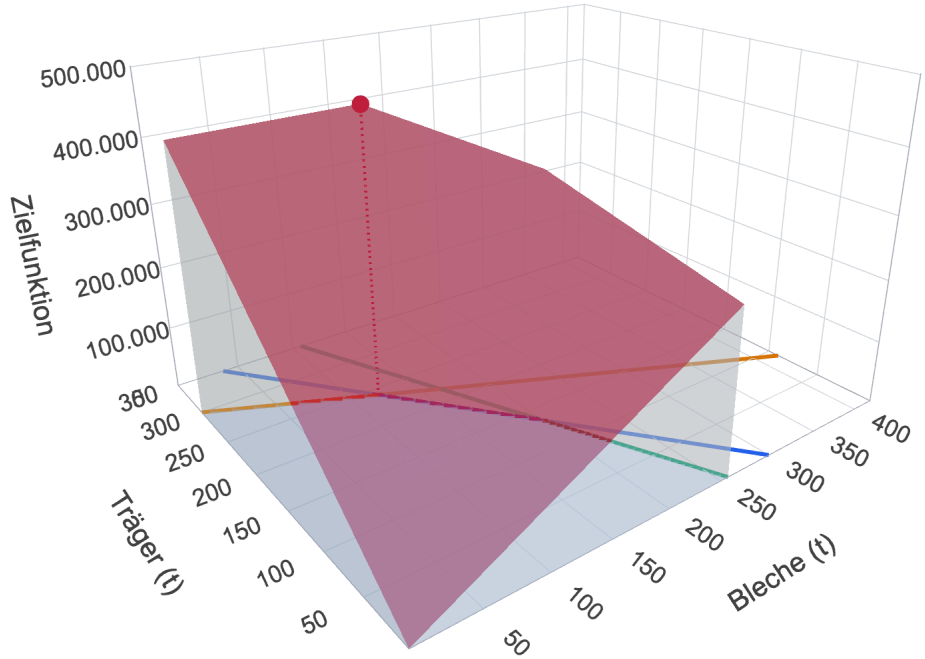
u.d.N.

$$a_{e,b} x_b + a_{e,t} x_t \leq b_e \qquad \text{Eisen}$$

$$a_{k,b} x_b + a_{k,t} x_t \leq b_k \qquad \text{Kohle}$$

$$a_{s,b} x_b + a_{s,t} x_t \leq b_s \qquad \text{Kalkstein}$$

$$x_b, \; x_t \geq 0$$



Was wir gerade in klein und konkret gesehen haben jetzt einmal allgemein:

Definition (LP in Standardform)

Ein *lineares Programm (LP) in Standardform* besteht aus $n \in \mathbb{N}$ *Entscheidungsvariablen*, $m \in \mathbb{N}$ *Nebenbedingungen (constraints)* und einer linearen Zielfunktion. Es hat die Form

$$\begin{aligned} \max \ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{s.t.} \ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ & x_j \geq 0 & \forall j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

für gegebene Gewichte $c_j, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

Was wir gerade in klein und konkret gesehen haben jetzt einmal allgemein:

Definition (LP in Standardform)

Ein *lineares Programm (LP) in Standardform* besteht aus $n \in \mathbb{N}$ *Entscheidungsvariablen*, $m \in \mathbb{N}$ *Nebenbedingungen (constraints)* und einer linearen Zielfunktion. Es hat die Form

$$\begin{aligned} \max \ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{s.t.} \ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ & x_j \geq 0 & \forall j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

für gegebene Gewichte $c_j, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

In Matrixschreibweise: für $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finde $\max \{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Lineare Programme

Was wir gerade in klein und konkret gesehen haben jetzt einmal allgemein:

Definition (LP in Standardform)

Ein *lineares Programm (LP) in Standardform* besteht aus $n \in \mathbb{N}$ *Entscheidungsvariablen*, $m \in \mathbb{N}$ *Nebenbedingungen (constraints)* und einer linearen Zielfunktion. Es hat die Form

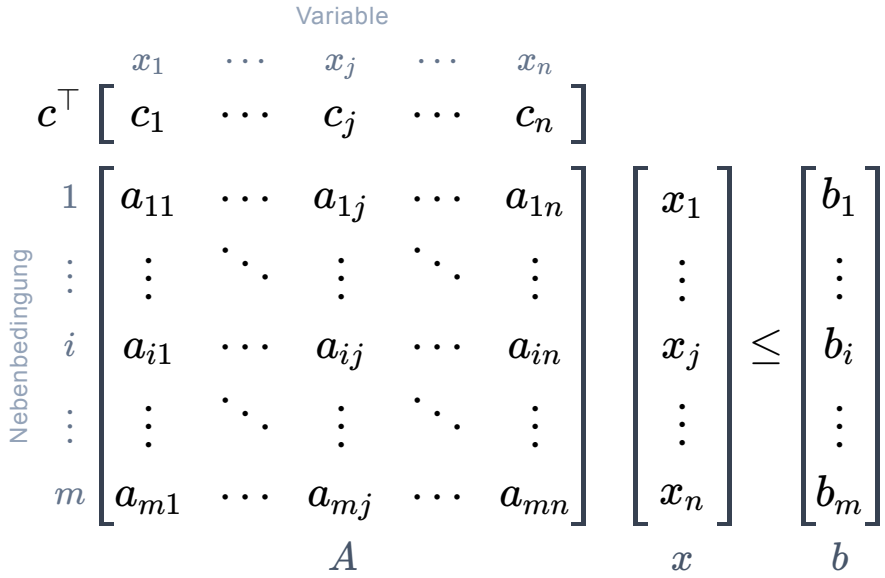
$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ & x_j \geq 0 & \forall j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

für gegebene Gewichte $c_j, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

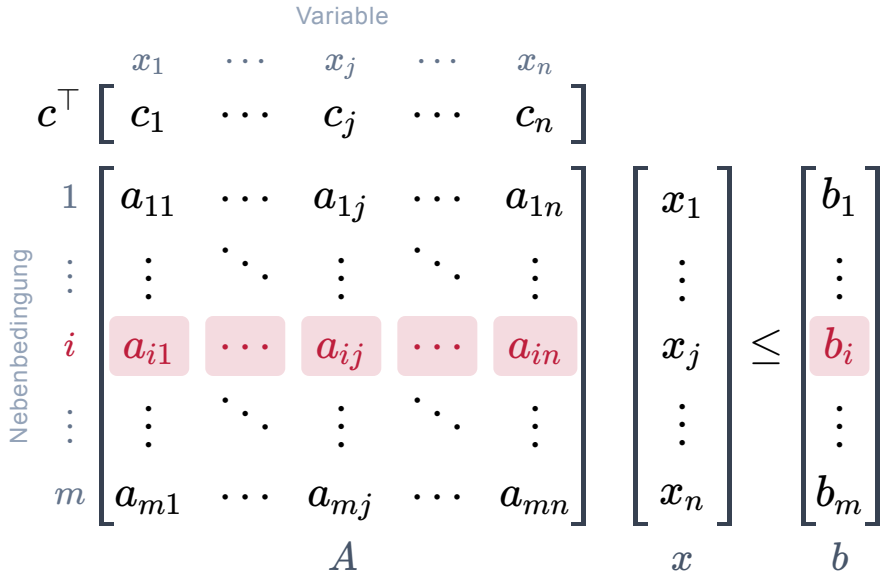
In Matrixschreibweise: für $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, finde $\max \{c^T x \mid x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Im Rest der Vorlesung sind $\leq$, $=$, $\geq$ zwischen Vektoren im $\mathbb{R}^n$ immer komponentenweise zu verstehen.

Zur Matrixschreibweise

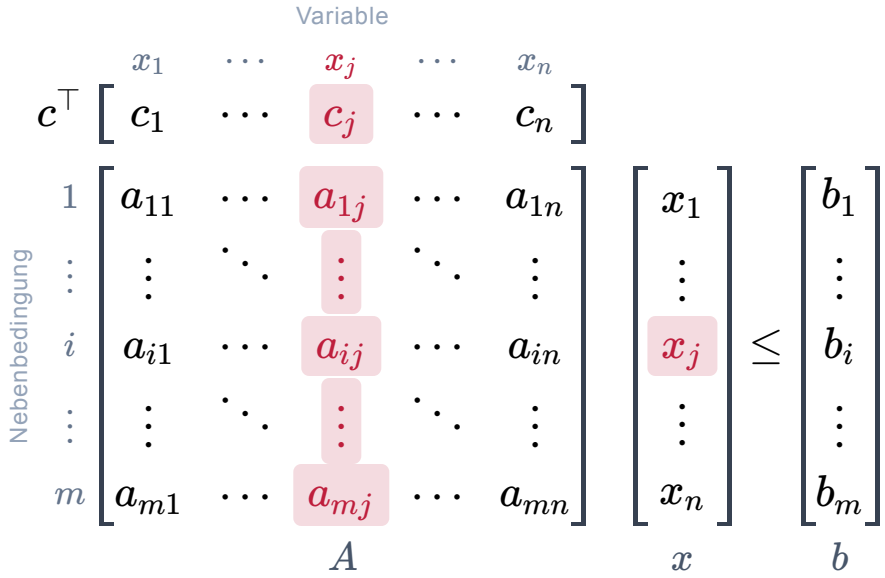


Zur Matrixschreibweise



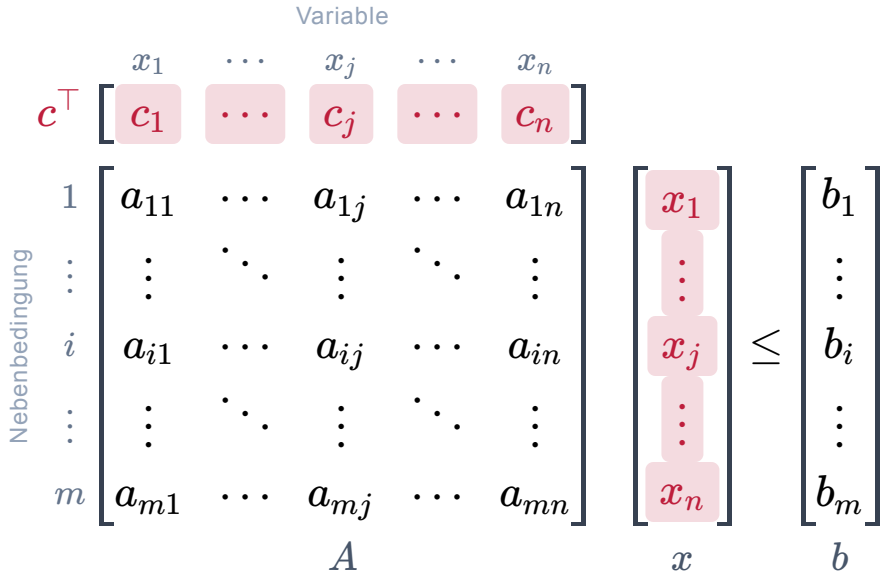
Zeile i von A zusammen mit b_i ist die i-te Nebenbedingung: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$

Zur Matrixschreibweise



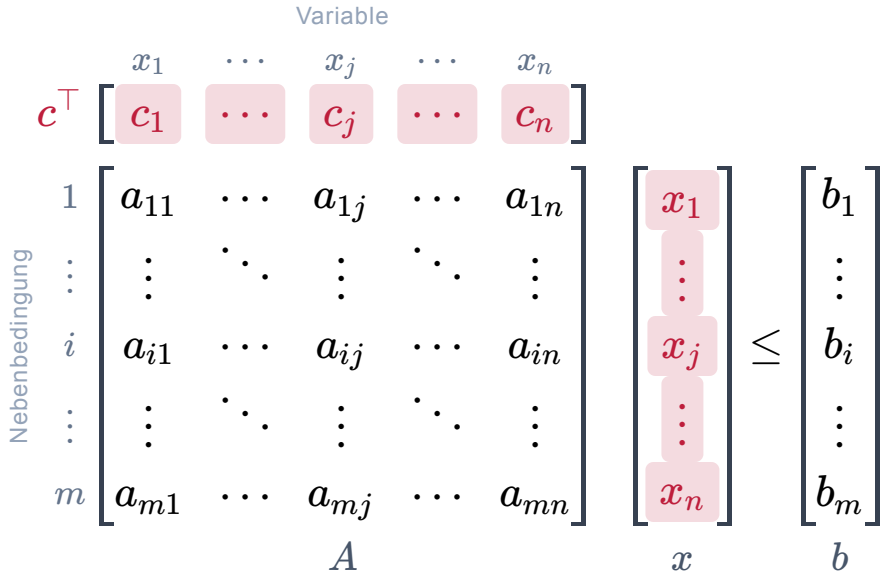
Spalte j von A gehört zu Variable x_j: ihre Einträge $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$ sind die Koeffizienten von x_j in allen Nebenbedingungen, dazu c_j in der Zielfunktion

Zur Matrixschreibweise



Zielfunktion: $c^\top x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Zur Matrixschreibweise



Zielfunktion: $c^\top x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Indizes: normalerweise $i \in \{1, \ldots, m\}$ für Nebenbedingungen und $j \in \{1, \ldots, n\}$ für Variablen.

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,
- $x \leq 0$ oder x frei (weder nicht-negative noch nicht-positive Variablen).

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,
- $x \leq 0$ oder x frei (weder nicht-negative noch nicht-positive Variablen).

Diese Verallgemeinerungen lassen sich immer in die Standardform zurücktransformieren.

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,
- $x \leq 0$ oder x frei (weder nicht-negative noch nicht-positive Variablen).

Diese Verallgemeinerungen lassen sich immer in die Standardform zurücktransformieren.

Minimierung statt Maximierung:

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,
- $x \leq 0$ oder x frei (weder nicht-negative noch nicht-positive Variablen).

Diese Verallgemeinerungen lassen sich immer in die Standardform zurücktransformieren.

Minimierung statt Maximierung: $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = -\max\{-c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,
- $x \leq 0$ oder x frei (weder nicht-negative noch nicht-positive Variablen).

Diese Verallgemeinerungen lassen sich immer in die Standardform zurücktransformieren.

Minimierung statt Maximierung: $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = -\max\{-c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$.

$\geq$ statt $\leq$:

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,
- $x \leq 0$ oder x frei (weder nicht-negative noch nicht-positive Variablen).

Diese Verallgemeinerungen lassen sich immer in die Standardform zurücktransformieren.

Minimierung statt Maximierung: $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = -\max\{-c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$.

$\geq$ **statt** $\leq$**:** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$ (beide Seiten negieren dreht das Zeichen)

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,
- $x \leq 0$ oder x frei (weder nicht-negative noch nicht-positive Variablen).

Diese Verallgemeinerungen lassen sich immer in die Standardform zurücktransformieren.

Minimierung statt Maximierung: $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = -\max\{-c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$.

$\geq$ **statt** $\leq$**:** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$ (beide Seiten negieren dreht das Zeichen)

$=$ **statt** $\leq$**:**

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,
- $x \leq 0$ oder x frei (weder nicht-negative noch nicht-positive Variablen).

Diese Verallgemeinerungen lassen sich immer in die Standardform zurücktransformieren.

Minimierung statt Maximierung: $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = -\max\{-c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$.

$\geq$ **statt** $\leq$**:** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$ (beide Seiten negieren dreht das Zeichen)

$=$ **statt** $\leq$**:** Selbe Ungleichung zwei Mal, einmal mit $\leq$ und einmal mit $\geq$.

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,
- $x \leq 0$ oder x frei (weder nicht-negative noch nicht-positive Variablen).

Diese Verallgemeinerungen lassen sich immer in die Standardform zurücktransformieren.

Minimierung statt Maximierung: $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = -\max\{-c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$.

$\geq$ **statt** $\leq$**:** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$ (beide Seiten negieren dreht das Zeichen)

$=$ **statt** $\leq$**:** Selbe Ungleichung zwei Mal, einmal mit $\leq$ und einmal mit $\geq$.

Negative Variablen:

Erweiterung der Standardform

Standardform maximiert, nutzt $\leq$ für alle Nebenbedingungen und $x_j \geq 0$ für alle Variablen.

Wir erlauben auch:

- $\geq$ und $=$ als Zeichen in Nebenbedingungen,
- minimieren statt maximieren,
- $x \leq 0$ oder x frei (weder nicht-negative noch nicht-positive Variablen).

Diese Verallgemeinerungen lassen sich immer in die Standardform zurücktransformieren.

Minimierung statt Maximierung: $\min\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = -\max\{-c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$.

$\geq$ **statt** $\leq$**:** $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} -a_{ij}x_j \leq -b_i$ (beide Seiten negieren dreht das Zeichen)

$=$ **statt** $\leq$**:** Selbe Ungleichung zwei Mal, einmal mit $\leq$ und einmal mit $\geq$.

Negative Variablen: Ersetze $x_i \leq 0$ durch $x_i \geq 0$ und alle Vorkommen von x_i durch $-x_i$.

Freie Variablen und andere Erweiterungen

Frage: Wie realisieren wir Variablen, die positiv und negativ sein können?

Freie Variablen und andere Erweiterungen

Frage: Wie realisieren wir Variablen, die positiv und negativ sein können?

Ersetze x frei durch $x^+ \geq 0, x^- \geq 0$ und ersetze alle Vorkommen von x durch $(x^+ - x^-)$.

Freie Variablen und andere Erweiterungen

Frage: Wie realisieren wir Variablen, die positiv und negativ sein können?

Ersetze x frei durch $x^+ \geq 0, x^- \geq 0$ und ersetze alle Vorkommen von x durch $(x^+ - x^-)$.

Korrektheit dieser Transformationen: Übung.

Freie Variablen und andere Erweiterungen

Frage: Wie realisieren wir Variablen, die positiv und negativ sein können?

Ersetze x frei durch $x^+ \geq 0, x^- \geq 0$ und ersetze alle Vorkommen von x durch $(x^+ - x^-)$.

Korrektheit dieser Transformationen: Übung.

Frage: Können wir auch Constraints der Form $\sum_j a_{ij} x_j < b_i$ umsetzen?

Freie Variablen und andere Erweiterungen

Frage: Wie realisieren wir Variablen, die positiv und negativ sein können?

Ersetze $x \text{ frei}$ durch $x^+ \geq 0, x^- \geq 0$ und ersetze alle Vorkommen von x durch $(x^+ - x^-)$.

Korrektheit dieser Transformationen: Übung.

Frage: Können wir auch Constraints der Form $\sum_j a_{ij} x_j < b_i$ umsetzen?

Antwort: Nein! Dann existiert ggf. das $\max$ oder $\min$ nicht mehr: z.B. bei $\max \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$!

Freie Variablen und andere Erweiterungen

Frage: Wie realisieren wir Variablen, die positiv und negativ sein können?

Ersetze $x \text{ frei}$ durch $x^+ \geq 0, x^- \geq 0$ und ersetze alle Vorkommen von x durch $(x^+ - x^-)$.

Korrektheit dieser Transformationen: Übung.

Frage: Können wir auch Constraints der Form $\sum_j a_{ij} x_j < b_i$ umsetzen?

Antwort: Nein! Dann existiert ggf. das $\max$ oder $\min$ nicht mehr: z.B. bei $\max \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$!

Frage: Ist das denn jetzt der Fall? Gibt es immer eine Lösung? Gibt es immer eine optimale Lösung?

Lösungen, Zulässigkeit und Optimalität

Definition (Lösung, Zulässigkeit, Optimalität)

Definition (Lösung, Zulässigkeit, Optimalität)

Für ein LP $P : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ heißt eine Belegung $x \in \mathbb{R}^n$ der n Variablen *Lösung*.

Definition (Lösung, Zulässigkeit, Optimalität)

Für ein LP $P : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ heißt eine Belegung $x \in \mathbb{R}^n$ der n Variablen *Lösung*. Die Menge $\mathbb{L}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ heißt *Zulässigkeitsbereich* des LP.

Definition (Lösung, Zulässigkeit, Optimalität)

Für ein LP $P : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ heißt eine Belegung $x \in \mathbb{R}^n$ der n Variablen *Lösung*. Die Menge $\mathbb{L}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ heißt *Zulässigkeitsbereich* des LP. Eine Lösung x ist *zulässig (feasible)* genau dann, wenn $x \in \mathbb{L}(P)$.

Definition (Lösung, Zulässigkeit, Optimalität)

Für ein LP $P : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ heißt eine Belegung $x \in \mathbb{R}^n$ der n Variablen *Lösung*. Die Menge $\mathbb{L}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ heißt *Zulässigkeitsbereich* des LP. Eine Lösung x ist *zulässig (feasible)* genau dann, wenn $x \in \mathbb{L}(P)$. Das LP selbst ist *zulässig* genau dann, wenn $\mathbb{L}(P) \neq \emptyset$.

Definition (Lösung, Zulässigkeit, Optimalität)

Für ein LP $P : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ heißt eine Belegung $x \in \mathbb{R}^n$ der n Variablen *Lösung*. Die Menge $\mathbb{L}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ heißt *Zulässigkeitsbereich* des LP. Eine Lösung x ist *zulässig (feasible)* genau dann, wenn $x \in \mathbb{L}(P)$. Das LP selbst ist *zulässig* genau dann, wenn $\mathbb{L}(P) \neq \emptyset$. Ein $x \in \mathbb{L}(P)$ heißt *optimal*, wenn für alle $y \in \mathbb{L}(P)$ gilt: $c^T x \geq c^T y$.

Lösungen, Zulässigkeit und Optimalität

Definition (Lösung, Zulässigkeit, Optimalität)

Für ein LP $P : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ heißt eine Belegung $x \in \mathbb{R}^n$ der n Variablen *Lösung*. Die Menge $\mathbb{L}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ heißt *Zulässigkeitsbereich* des LP. Eine Lösung x ist *zulässig (feasible)* genau dann, wenn $x \in \mathbb{L}(P)$. Das LP selbst ist *zulässig* genau dann, wenn $\mathbb{L}(P) \neq \emptyset$. Ein $x \in \mathbb{L}(P)$ heißt *optimal*, wenn für alle $y \in \mathbb{L}(P)$ gilt: $c^T x \geq c^T y$.

Definition (Unbeschränktheit)

Ein LP $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ heißt *unbeschränkt (unbounded)* genau dann, wenn für jedes $q \in \mathbb{N}$ eine zulässige Lösung x_q existiert mit $c^T x_q > q$.

Lösungen, Zulässigkeit und Optimalität

Definition (Lösung, Zulässigkeit, Optimalität)

Für ein LP $P : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ heißt eine Belegung $x \in \mathbb{R}^n$ der n Variablen *Lösung*. Die Menge $\mathbb{L}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ heißt *Zulässigkeitsbereich* des LP. Eine Lösung x ist *zulässig (feasible)* genau dann, wenn $x \in \mathbb{L}(P)$. Das LP selbst ist *zulässig* genau dann, wenn $\mathbb{L}(P) \neq \emptyset$. Ein $x \in \mathbb{L}(P)$ heißt *optimal*, wenn für alle $y \in \mathbb{L}(P)$ gilt: $c^T x \geq c^T y$.

Definition (Unbeschränktheit)

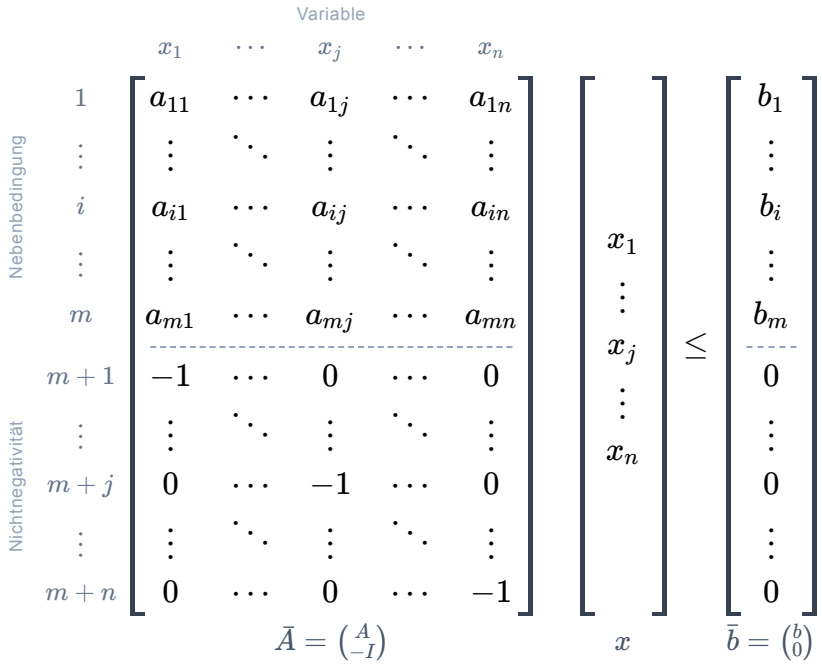
Ein LP $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ heißt *unbeschränkt (unbounded)* genau dann, wenn für jedes $q \in \mathbb{N}$ eine zulässige Lösung x_q existiert mit $c^T x_q > q$.

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

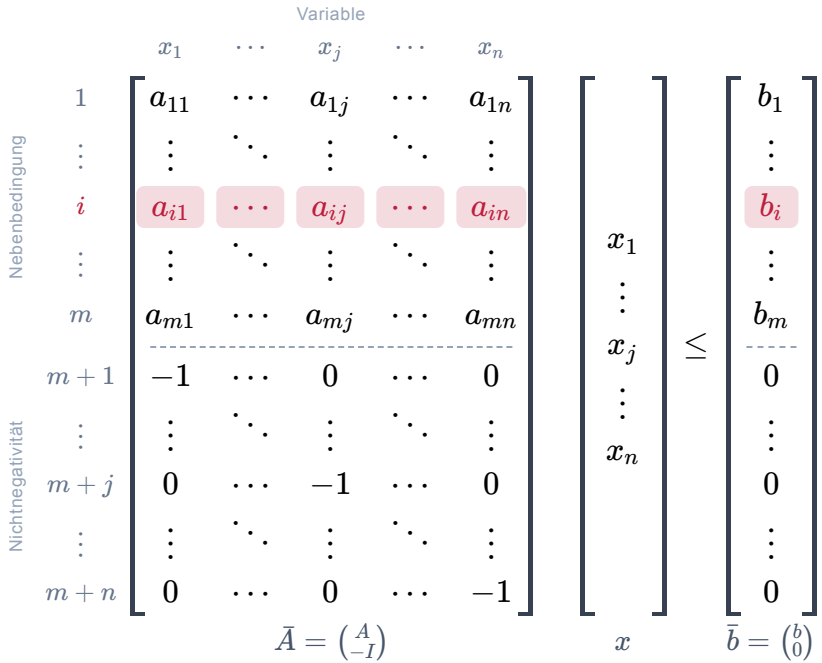
Beweis: Fundamentalsatz

Für den Beweis ist es nützlich, die $x \geq 0$ umzuschreiben, damit alles die Form $\bar{A}x \leq \bar{b}$ hat.



Beweis: Fundamentalsatz

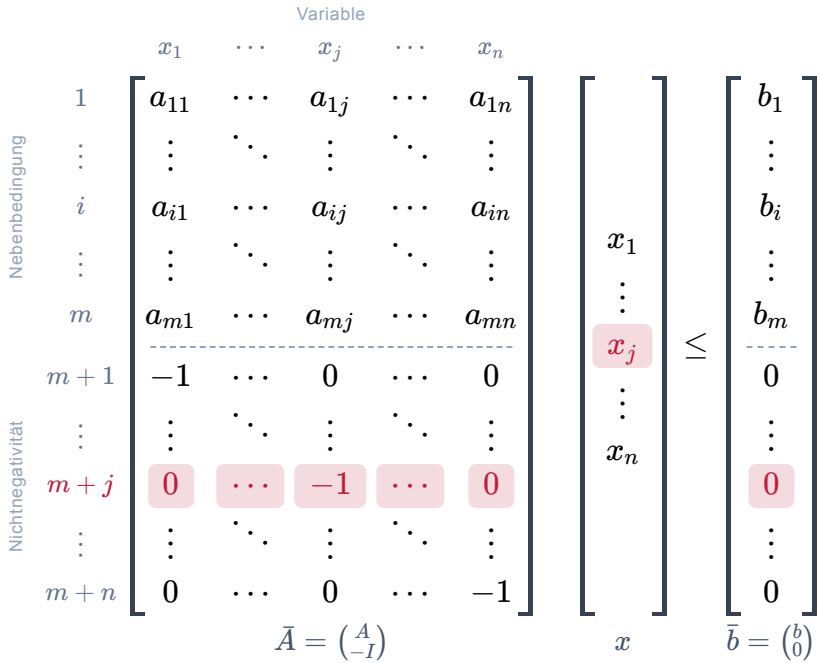
Für den Beweis ist es nützlich, die $x \geq 0$ umzuschreiben, damit alles die Form $\bar{A}x \leq \bar{b}$ hat.



Zeile $i \leq m$: wie bisher die Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$

Beweis: Fundamentalsatz

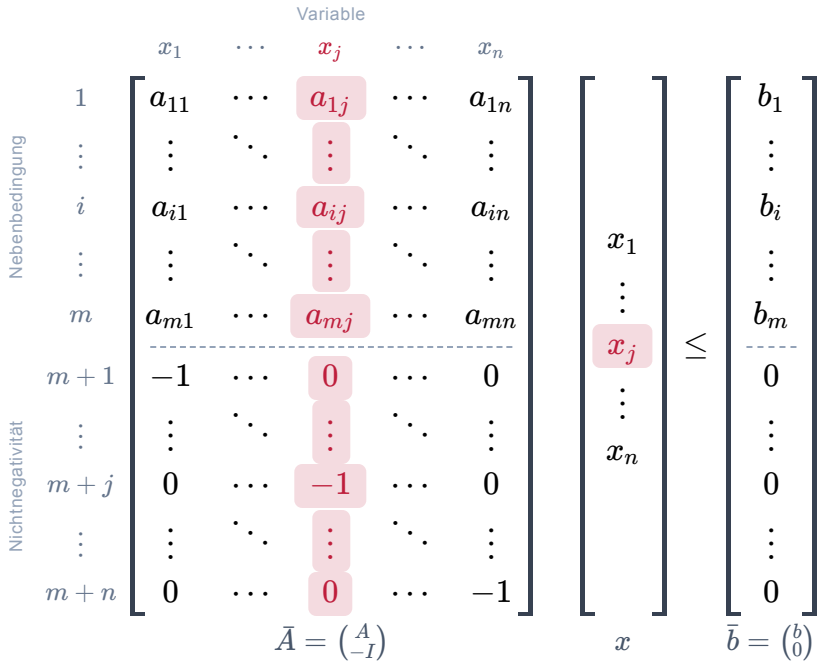
Für den Beweis ist es nützlich, die $x \geq 0$ umzuschreiben, damit alles die Form $\bar{A}x \leq \bar{b}$ hat.



Zeile $m + j$: $-x_j \leq 0$, also genau die Nichtnegativität $x_j \geq 0$

Beweis: Fundamentalsatz

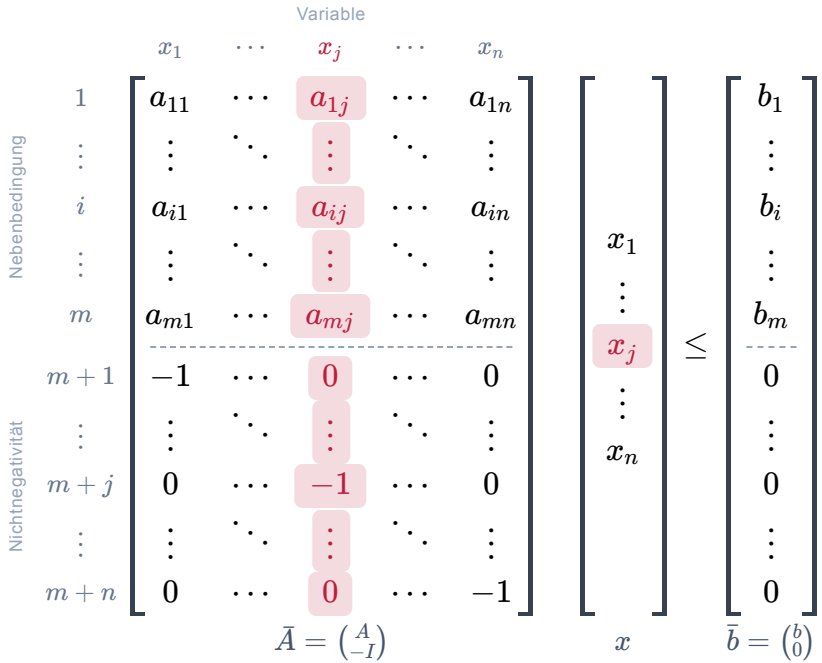
Für den Beweis ist es nützlich, die $x \geq 0$ umzuschreiben, damit alles die Form $\bar{A}x \leq \bar{b}$ hat.



Spalte j: die Koeffizienten von x_j in allen $m + n$ Nebenbedingungen von $\bar{A}x \leq \bar{b}$

Beweis: Fundamentalsatz

Für den Beweis ist es nützlich, die $x \geq 0$ umzuschreiben, damit alles die Form $\bar{A}x \leq \bar{b}$ hat.



Spalte j: die Koeffizienten von x_j in allen $m + n$ Nebenbedingungen von $\bar{A}x \leq \bar{b}$

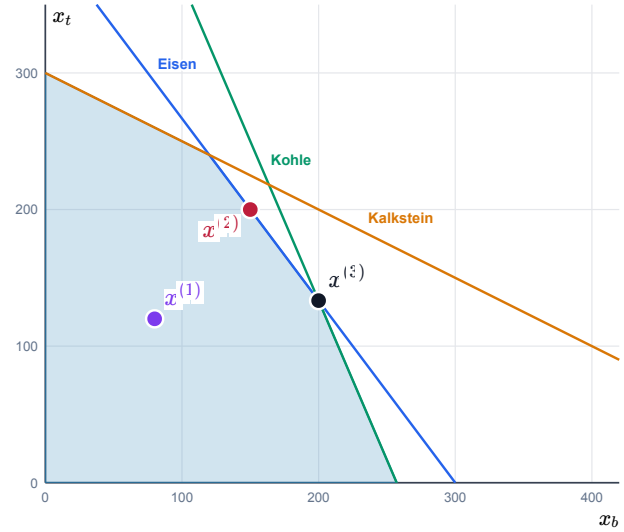
Frage: Welchen Rang hat diese Matrix?

Ecken des Zulässigkeitsbereichs

Ecken des Zulässigkeitsbereichs

Definition (Aktive Zeile)

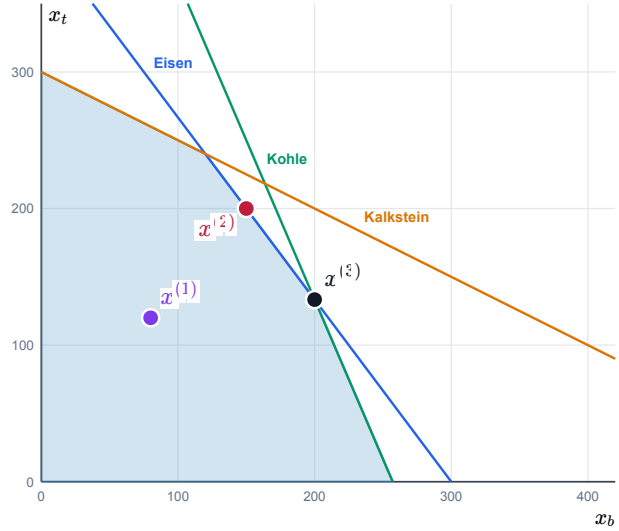
Wir schreiben $\bar{a}_k$ für die k-te Zeile von $\bar{A}$ und $\bar{b}_k$ für den k-ten Eintrag von $\bar{b}$, $1 \leq k \leq n + m$.



Ecken des Zulässigkeitsbereichs

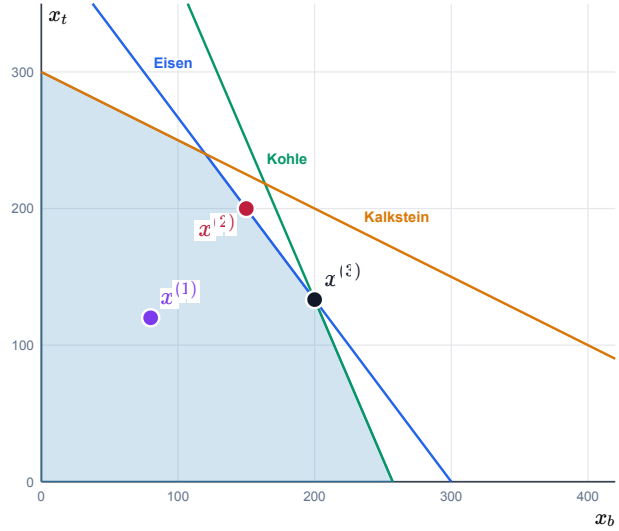
Definition (Aktive Zeile)

Wir schreiben $\bar{a}_k$ für die k-te Zeile von $\bar{A}$ und $\bar{b}_k$ für den k-ten Eintrag von $\bar{b}$, $1 \leq k \leq n+m$. Sei $x \in \mathbb{L}(P)$ eine zulässige Lösung, d.h. $\bar{A}x \leq \bar{b}$.



Definition (Aktive Zeile)

Wir schreiben $\bar{a}_k$ für die k-te Zeile von $\bar{A}$ und $\bar{b}_k$ für den k-ten Eintrag von $\bar{b}$, $1 \leq k \leq n+m$. Sei $x \in \mathbb{L}(P)$ eine zulässige Lösung, d.h. $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Eine Zeile (Nebenbedingung) $\bar{a}_k \in \mathbb{R}^{1\times n}$ heißt *aktiv* in Lösung x, wenn $\bar{a}_k \cdot x = \bar{b}_k$.



Ecken des Zulässigkeitsbereichs

Definition (Aktive Zeile)

Wir schreiben $\bar{a}_k$ für die k-te Zeile von $\bar{A}$ und $\bar{b}_k$ für den k-ten Eintrag von $\bar{b}$, $1 \leq k \leq n+m$. Sei $x \in \mathbb{L}(P)$ eine zulässige Lösung, d.h. $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Eine Zeile (Nebenbedingung) $\bar{a}_k \in \mathbb{R}^{1\times n}$ heißt *aktiv* in Lösung x, wenn $\bar{a}_k \cdot x = \bar{b}_k$.

Definition (Ecke)

Mit $I(x) = \{k \mid \bar{a}_k \text{ ist aktiv in } x\}$ bezeichnen wir die Menge der aktiven Zeilenindizes und mit $\bar{A}_{I(x)} \in \mathbb{R}^{|I(x)|\times n}$ bezeichnen wir die Submatrix von $\bar{A}$, die nur aus den aktiven Zeilen von x besteht.

Ecken des Zulässigkeitsbereichs

Definition (Aktive Zeile)

Wir schreiben $\bar{a}_k$ für die k-te Zeile von $\bar{A}$ und $\bar{b}_k$ für den k-ten Eintrag von $\bar{b}$, $1 \leq k \leq n+m$. Sei $x \in \mathbb{L}(P)$ eine zulässige Lösung, d.h. $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Eine Zeile (Nebenbedingung) $\bar{a}_k \in \mathbb{R}^{1\times n}$ heißt *aktiv* in Lösung x, wenn $\bar{a}_k \cdot x = \bar{b}_k$.

Definition (Ecke)

Mit $I(x) = \{k \mid \bar{a}_k \text{ ist aktiv in } x\}$ bezeichnen wir die Menge der aktiven Zeilenindizes und mit $\bar{A}_{I(x)} \in \mathbb{R}^{|I(x)|\times n}$ bezeichnen wir die Submatrix von $\bar{A}$, die nur aus den aktiven Zeilen von x besteht. Die Lösung x ist eine *Ecke* des Zulässigkeitsbereichs, wenn $\operatorname{rang} A_{I(x)} = n$, also wenn n linear unabhängige Zeilen in x aktiv sind.

Beweisidee des Fundamentalsatzes

Wir zeigen, dass wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ zu einer Ecke $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$ laufen können, die nicht schlechter ist als x, oder irgendwann beliebig weit laufen können und dabei immer besser werden (unbeschränkt).

$$\max\ 1000\,x_b + 1400\,x_t$$

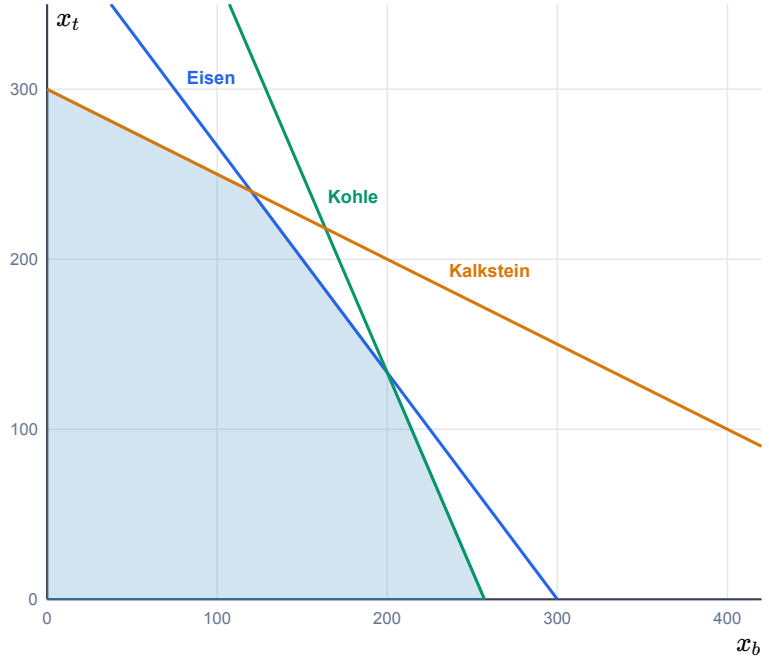
u.d.N.

$$0{,}8\,x_b + 0{,}6\,x_t \leq 240 \quad \text{Eisen}$$

$$0{,}7\,x_b + 0{,}3\,x_t \leq 180 \quad \text{Kohle}$$

$$0{,}1\,x_b + 0{,}2\,x_t \leq 60 \quad \text{Kalkstein}$$

$$x_b,\ x_t \geq 0$$



Beweisidee des Fundamentalsatzes

Wir zeigen, dass wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ zu einer Ecke $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$ laufen können, die nicht schlechter ist als x, oder irgendwann beliebig weit laufen können und dabei immer besser werden (unbeschränkt).

$$\max\ 1000\,x_b + 1400\,x_t$$

u.d.N.

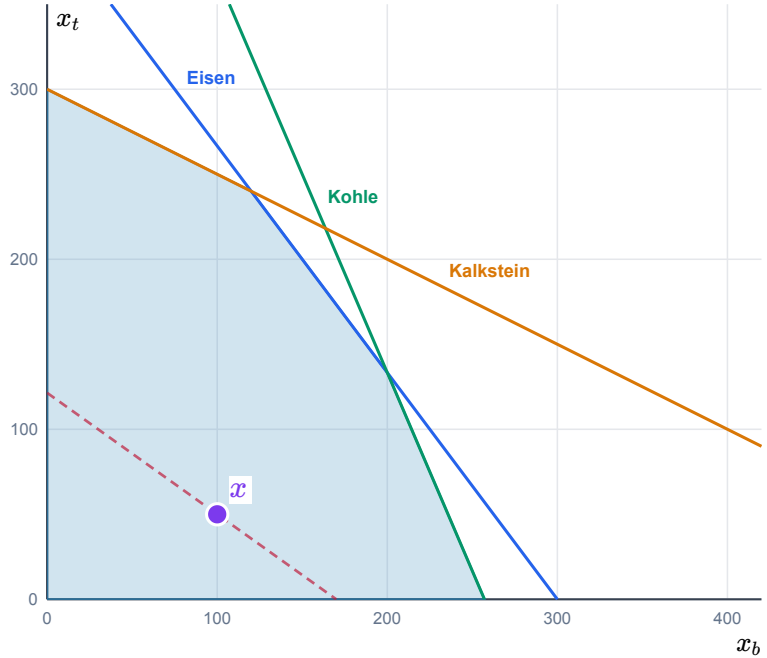
$$0{,}8\,x_b + 0{,}6\,x_t \leq 240 \quad \text{Eisen}$$

$$0{,}7\,x_b + 0{,}3\,x_t \leq 180 \quad \text{Kohle}$$

$$0{,}1\,x_b + 0{,}2\,x_t \leq 60 \quad \text{Kalkstein}$$

$$x_b,\ x_t \geq 0$$

$x = (100,\ 50)$
$c^T x = 170.000$
$\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} = 0$



Beweisidee des Fundamentalsatzes

Wir zeigen, dass wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ zu einer Ecke $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$ laufen können, die nicht schlechter ist als x, oder irgendwann beliebig weit laufen können und dabei immer besser werden (unbeschränkt).

$$\max\ 1000\,x_b + 1400\,x_t$$

u.d.N.

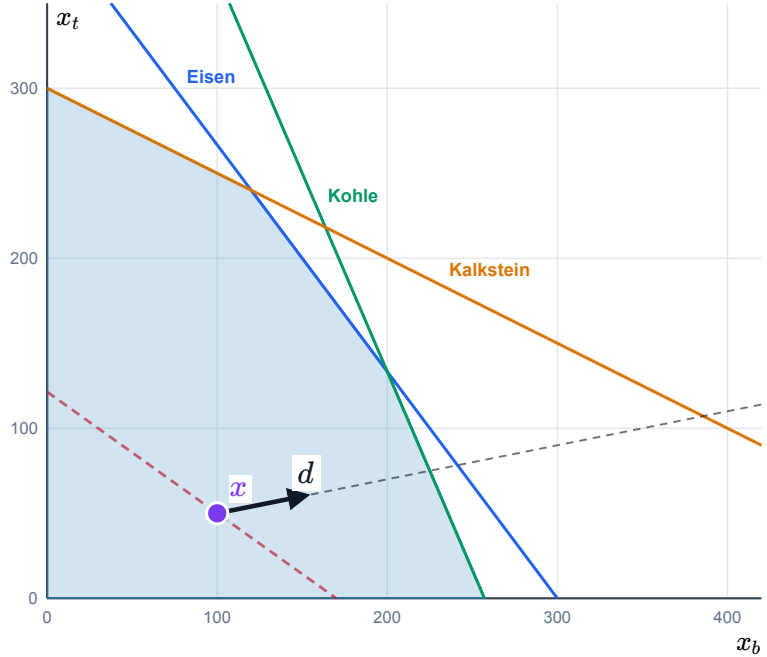
$$0{,}8\,x_b + 0{,}6\,x_t \leq 240 \quad \text{Eisen}$$

$$0{,}7\,x_b + 0{,}3\,x_t \leq 180 \quad \text{Kohle}$$

$$0{,}1\,x_b + 0{,}2\,x_t \leq 60 \quad \text{Kalkstein}$$

$$x_b,\ x_t \geq 0$$

$x = (100,\ 50)$
$c^T x = 170.000$
$\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} = 0$



Beweisidee des Fundamentalsatzes

Wir zeigen, dass wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ zu einer Ecke $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$ laufen können, die nicht schlechter ist als x, oder irgendwann beliebig weit laufen können und dabei immer besser werden (unbeschränkt).

$$\max\ 1000\,x_b + 1400\,x_t$$

u.d.N.

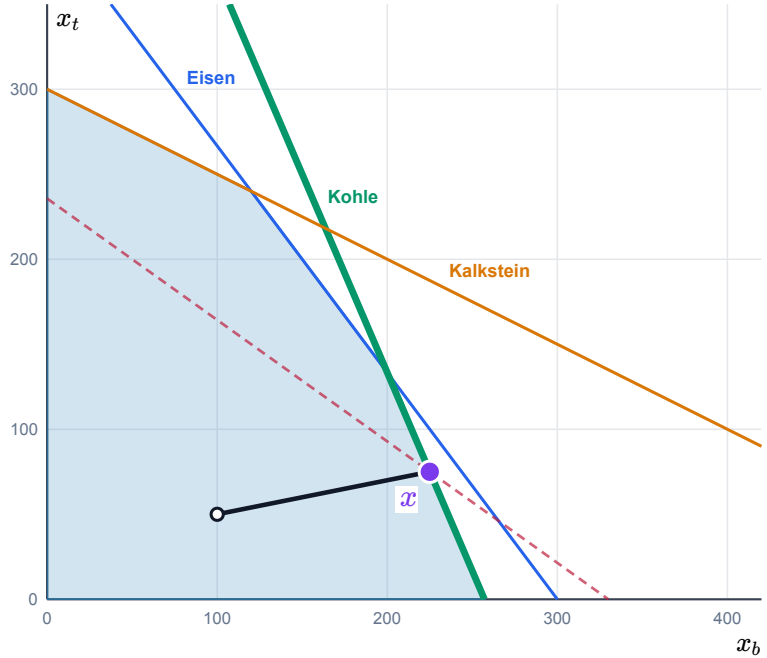
$$0{,}8\,x_b + 0{,}6\,x_t \leq 240 \quad \text{Eisen}$$

$$0{,}7\,x_b + 0{,}3\,x_t \leq 180 \quad \text{Kohle}$$

$$0{,}1\,x_b + 0{,}2\,x_t \leq 60 \quad \text{Kalkstein}$$

$$x_b,\ x_t \geq 0$$

$x = (225,\ 75)$
$c^T x = 330.000$
$\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} = 1$



Beweisidee des Fundamentalsatzes

Wir zeigen, dass wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ zu einer Ecke $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$ laufen können, die nicht schlechter ist als x, oder irgendwann beliebig weit laufen können und dabei immer besser werden (unbeschränkt).

$$\max\ 1000\,x_b + 1400\,x_t$$

u.d.N.

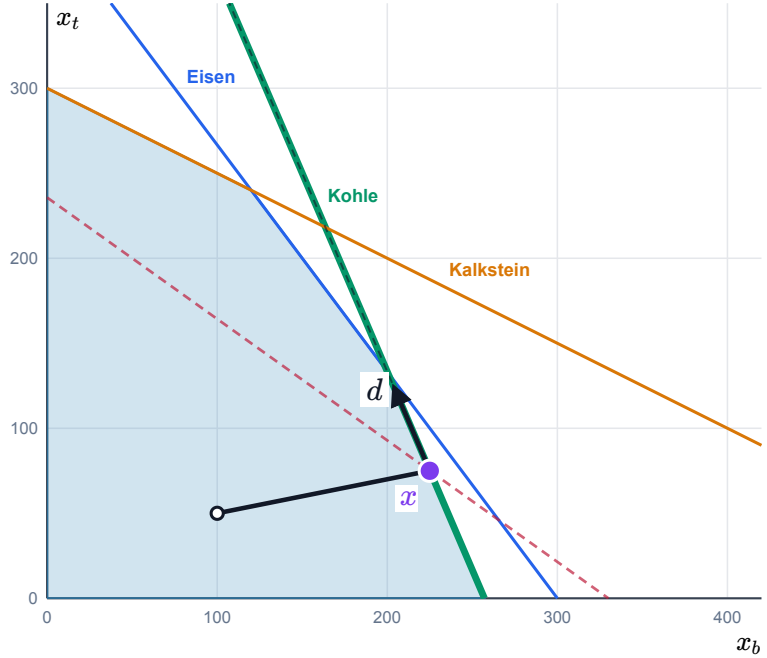
$$0{,}8\,x_b + 0{,}6\,x_t \leq 240 \quad \text{Eisen}$$

$$0{,}7\,x_b + 0{,}3\,x_t \leq 180 \quad \text{Kohle}$$

$$0{,}1\,x_b + 0{,}2\,x_t \leq 60 \quad \text{Kalkstein}$$

$$x_b,\ x_t \geq 0$$

$x = (225,\ 75)$
$c^T x = 330.000$
$\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} = 1$



Beweisidee des Fundamentalsatzes

Wir zeigen, dass wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ zu einer Ecke $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$ laufen können, die nicht schlechter ist als x, oder irgendwann beliebig weit laufen können und dabei immer besser werden (unbeschränkt).

$$\max\ 1000\,x_b + 1400\,x_t$$

u.d.N.

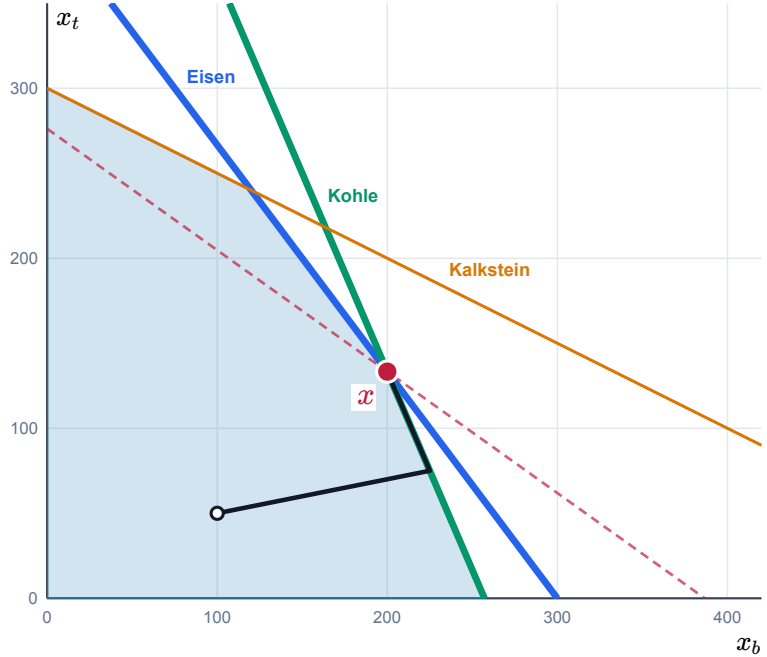
$$0{,}8\,x_b + 0{,}6\,x_t \leq 240 \quad \text{Eisen}$$

$$0{,}7\,x_b + 0{,}3\,x_t \leq 180 \quad \text{Kohle}$$

$$0{,}1\,x_b + 0{,}2\,x_t \leq 60 \quad \text{Kalkstein}$$

$$x_b,\ x_t \geq 0$$

$x = (200,\ 133{,}3)$
$c^T x = 386.667$
$\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} = 2 \rightarrow$ **Ecke**



Beweisidee des Fundamentalsatzes

Wir zeigen, dass wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ zu einer Ecke $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$ laufen können, die nicht schlechter ist als x, oder irgendwann beliebig weit laufen können und dabei immer besser werden (unbeschränkt).

$$\max\ 1000\,x_b + 1400\,x_t$$

u.d.N.

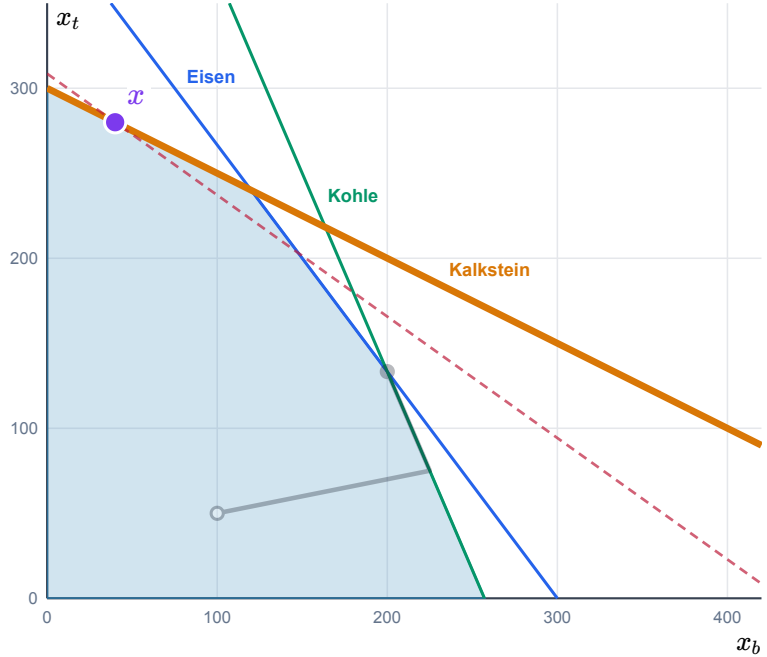
$$0{,}8\,x_b + 0{,}6\,x_t \leq 240 \quad \text{Eisen}$$

$$0{,}7\,x_b + 0{,}3\,x_t \leq 180 \quad \text{Kohle}$$

$$0{,}1\,x_b + 0{,}2\,x_t \leq 60 \quad \text{Kalkstein}$$

$$x_b,\ x_t \geq 0$$

$x = (40,\ 280)$
$c^T x = 432.000$
$\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} = 1$



Beweisidee des Fundamentalsatzes

Wir zeigen, dass wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ zu einer Ecke $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$ laufen können, die nicht schlechter ist als x, oder irgendwann beliebig weit laufen können und dabei immer besser werden (unbeschränkt).

$$\max\ 1000\,x_b + 1400\,x_t$$

u.d.N.

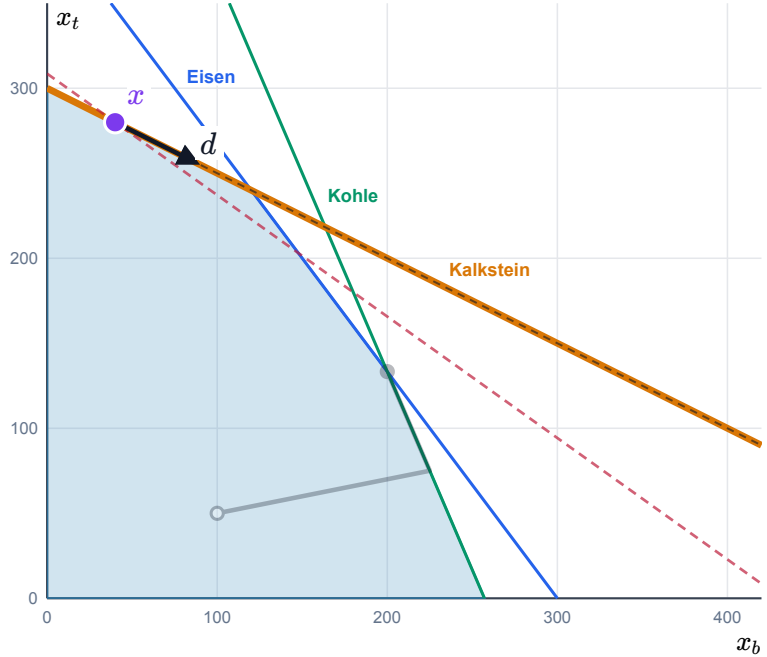
$$0{,}8\,x_b + 0{,}6\,x_t \leq 240 \quad \text{Eisen}$$

$$0{,}7\,x_b + 0{,}3\,x_t \leq 180 \quad \text{Kohle}$$

$$0{,}1\,x_b + 0{,}2\,x_t \leq 60 \quad \text{Kalkstein}$$

$$x_b,\ x_t \geq 0$$

$x = (40,\ 280)$
$c^T x = 432.000$
$\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} = 1$



Beweisidee des Fundamentalsatzes

Wir zeigen, dass wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ zu einer Ecke $\hat{x} \in \mathbb{L}(P)$ laufen können, die nicht schlechter ist als x, oder irgendwann beliebig weit laufen können und dabei immer besser werden (unbeschränkt).

$$\max\ 1000\,x_b + 1400\,x_t$$

u.d.N.

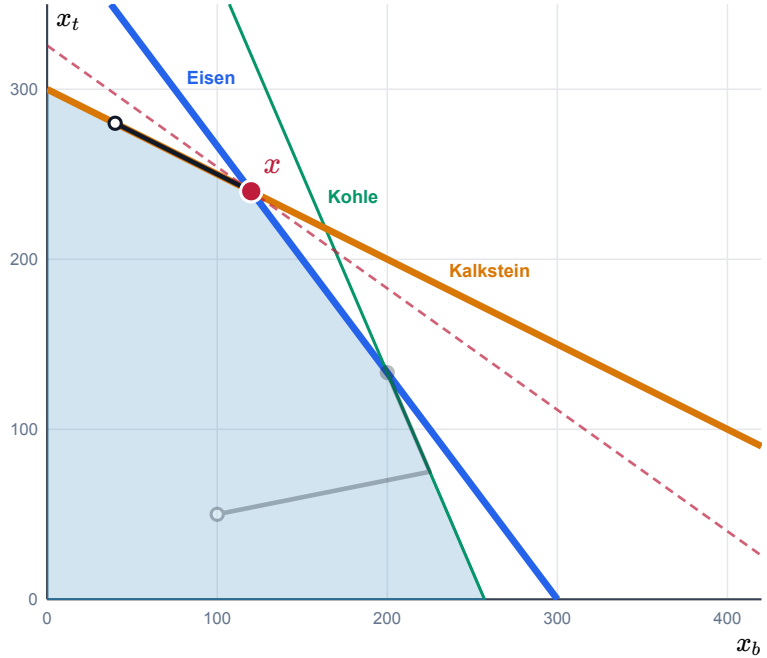
$0{,}8\,x_b + 0{,}6\,x_t \leq 240$ Eisen

$0{,}7\,x_b + 0{,}3\,x_t \leq 180$ Kohle

$0{,}1\,x_b + 0{,}2\,x_t \leq 60$ Kalkstein

$$x_b,\ x_t \geq 0$$

$x = (120,\ 240)$
$c^T x = 456.000$
$\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} = 2 \rightarrow$ **Ecke**



Ideen der Schritte

Ideen der Schritte

- Irgendein beliebiger Startpunkt $x \in \mathbb{L}(P)$

Ideen der Schritte

- Irgendein beliebiger Startpunkt $x \in \mathbb{L}(P)$
- Müssen immer eine Richtung d finden, in die wir laufen können

Ideen der Schritte

- Irgendein beliebiger Startpunkt $x \in \mathbb{L}(P)$
- Müssen immer eine Richtung d finden, in die wir laufen können
- In Richtung d bleiben die aktiven Zeilen aktiv

Ideen der Schritte

- Irgendein beliebiger Startpunkt $x \in \mathbb{L}(P)$
- Müssen immer eine Richtung d finden, in die wir laufen können
- In Richtung d bleiben die aktiven Zeilen aktiv
- Zielfunktion darf sich nicht verschlechtern

Ideen der Schritte

- Irgendein beliebiger Startpunkt $x \in \mathbb{L}(P)$
- Müssen immer eine Richtung d finden, in die wir laufen können
- In Richtung d bleiben die aktiven Zeilen aktiv
- Zielfunktion darf sich nicht verschlechtern
- Irgendwann müssen wir eine neue, nicht aktive Nebenbedingung treffen, *oder*

Ideen der Schritte

- Irgendein beliebiger Startpunkt $x \in \mathbb{L}(P)$
- Müssen immer eine Richtung d finden, in die wir laufen können
- In Richtung d bleiben die aktiven Zeilen aktiv
- Zielfunktion darf sich nicht verschlechtern
- Irgendwann müssen wir eine neue, nicht aktive Nebenbedingung treffen, *oder*
- Zielfunktion wird besser und wir können immer weiter laufen (unbeschränkt)

Ideen der Schritte

- Irgendein beliebiger Startpunkt $x \in \mathbb{L}(P)$
- Müssen immer eine Richtung d finden, in die wir laufen können
- In Richtung d bleiben die aktiven Zeilen aktiv
- Zielfunktion darf sich nicht verschlechtern
- Irgendwann müssen wir eine neue, nicht aktive Nebenbedingung treffen, *oder*
- Zielfunktion wird besser und wir können immer weiter laufen (unbeschränkt)
- Das Ganze muss an jedem Punkt funktionieren, der keine Ecke ist

Ideen der Schritte

- Irgendein beliebiger Startpunkt $x \in \mathbb{L}(P)$
- Müssen immer eine Richtung d finden, in die wir laufen können
- In Richtung d bleiben die aktiven Zeilen aktiv
- Zielfunktion darf sich nicht verschlechtern
- Irgendwann müssen wir eine neue, nicht aktive Nebenbedingung treffen, *oder*
- Zielfunktion wird besser und wir können immer weiter laufen (unbeschränkt)
- Das Ganze muss an jedem Punkt funktionieren, der keine Ecke ist
- Irgendwann kommen wir an einer Ecke an oder finden Unbeschränktheit

Sei $x \in \mathbb{L}(P)$ zulässig, $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$

$\exists d \neq 0, d \in \mathbb{R}^n, \bar{A}_{I(x)} d = 0;$

$$\bar{A}_{I(x)} \cdot (x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)} \cdot x + t \cdot \underbrace{\bar{A}_{I(x)} \cdot d}_{0} = \bar{b}_{I(x)}.$$

$$c^T(x + t \cdot d) = c^T x + t \cdot c^T d$$

Fall 1+2: d oder $-d$ als Richtung $\rightarrow$
entweder neue aktive NB oder unbeschränkt.

Fall 3: $c^T d = 0$: gucken in $d, -d$; eine Richtung führt zu neuer NB (wegen $x \geq 0$);
sonst müsste $d = 0$ sein.

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$:

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d)$

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d$

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.
- Diese Richtung erhält also alle aktiven Nebenbedingungen!

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.
- Diese Richtung erhält also alle aktiven Nebenbedingungen!
- Alle inaktiven Nebenbedingungen gelten strikt ($\bar{a}_k x < \bar{b}_k$)

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.
- Diese Richtung erhält also alle aktiven Nebenbedingungen!
- Alle inaktiven Nebenbedingungen gelten strikt ($\bar{a}_k x < \bar{b}_k$)
- $c^T(x + td) = c^T x + t \cdot c^T d \in \mathbb{R}$;

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.
- Diese Richtung erhält also alle aktiven Nebenbedingungen!
- Alle inaktiven Nebenbedingungen gelten strikt ($\bar{a}_k x < \bar{b}_k$)
- $c^T(x + td) = c^T x + t \cdot c^T d \in \mathbb{R}$; drei Fälle: (1) $c^T d > 0$, (2) $c^T d < 0$, (3) $c^T d = 0$

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.
- Diese Richtung erhält also alle aktiven Nebenbedingungen!
- Alle inaktiven Nebenbedingungen gelten strikt ($\bar{a}_k x < \bar{b}_k$)
- $c^T(x + td) = c^T x + t \cdot c^T d \in \mathbb{R}$; drei Fälle: (1) $c^T d > 0$, (2) $c^T d < 0$, (3) $c^T d = 0$
- Fall (1): behalte Richtung $d' = d$, (2): wechsle zu $d' = -d$, (3) betrachte $d' = d$ und $d' = -d$

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.
- Diese Richtung erhält also alle aktiven Nebenbedingungen!
- Alle inaktiven Nebenbedingungen gelten strikt ($\bar{a}_k x < \bar{b}_k$)
- $c^T(x + td) = c^T x + t \cdot c^T d \in \mathbb{R}$; drei Fälle: (1) $c^T d > 0$, (2) $c^T d < 0$, (3) $c^T d = 0$
- Fall (1): behalte Richtung $d' = d$, (2): wechsle zu $d' = -d$, (3) betrachte $d' = d$ und $d' = -d$
- Wie weit können wir in Richtung d' gehen?

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.
- Diese Richtung erhält also alle aktiven Nebenbedingungen!
- Alle inaktiven Nebenbedingungen gelten strikt ($\bar{a}_k x < \bar{b}_k$)
- $c^T(x + td) = c^T x + t \cdot c^T d \in \mathbb{R}$; drei Fälle: (1) $c^T d > 0$, (2) $c^T d < 0$, (3) $c^T d = 0$
- Fall (1): behalte Richtung $d' = d$, (2): wechsle zu $d' = -d$, (3) betrachte $d' = d$ und $d' = -d$
- Wie weit können wir in Richtung d' gehen? Bis die nächste inaktive Nebenbedingung aktiv wird!

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.
- Diese Richtung erhält also alle aktiven Nebenbedingungen!
- Alle inaktiven Nebenbedingungen gelten strikt ($\bar{a}_k x < \bar{b}_k$)
- $c^T(x + td) = c^T x + t \cdot c^T d \in \mathbb{R}$; drei Fälle: (1) $c^T d > 0$, (2) $c^T d < 0$, (3) $c^T d = 0$
- Fall (1): behalte Richtung $d' = d$, (2): wechsle zu $d' = -d$, (3) betrachte $d' = d$ und $d' = -d$
- Wie weit können wir in Richtung d' gehen? Bis die nächste inaktive Nebenbedingung aktiv wird!
- Wenn das für ein endliches $t \geq 0$ passiert: $x \to x + td'$; zusätzliche Nebenbedingungen werden aktiv!

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.
- Diese Richtung erhält also alle aktiven Nebenbedingungen!
- Alle inaktiven Nebenbedingungen gelten strikt ($\bar{a}_k x < \bar{b}_k$)
- $c^T(x + td) = c^T x + t \cdot c^T d \in \mathbb{R}$; drei Fälle: (1) $c^T d > 0$, (2) $c^T d < 0$, (3) $c^T d = 0$
- Fall (1): behalte Richtung $d' = d$, (2): wechsle zu $d' = -d$, (3) betrachte $d' = d$ und $d' = -d$
- Wie weit können wir in Richtung d' gehen? Bis die nächste inaktive Nebenbedingung aktiv wird!
- Wenn das für ein endliches $t \geq 0$ passiert: $x \to x + td'$; zusätzliche Nebenbedingungen werden aktiv!
- Sonst: entweder wir sind unbeschränkt (Fall 1 oder 2), denn in Richtung d' werden wir immer besser

Beweis: Solche Schritte sind immer möglich

Sei x zulässig, d.h., $\bar{A}x \leq \bar{b}$. Wenn x eine Ecke ist, sind wir fertig. Sonst:

- $\operatorname{rang} \bar{A}_{I(x)} < n \Rightarrow \operatorname{rang} \ker \bar{A}_{I(x)} \geq 1$
- Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $\bar{A}_{I(x)} \cdot d = 0$
- Das schöne daran: $\forall t \in \mathbb{R}$: $\bar{A}_{I(x)}(x + t \cdot d) = \bar{A}_{I(x)}x + t\bar{A}_{I(x)}d = \bar{A}_{I(x)}x = \bar{b}_{I(x)}$.
- Diese Richtung erhält also alle aktiven Nebenbedingungen!
- Alle inaktiven Nebenbedingungen gelten strikt ($\bar{a}_k x < \bar{b}_k$)
- $c^T(x + td) = c^T x + t \cdot c^T d \in \mathbb{R}$; drei Fälle: (1) $c^T d > 0$, (2) $c^T d < 0$, (3) $c^T d = 0$
- Fall (1): behalte Richtung $d' = d$, (2): wechsle zu $d' = -d$, (3) betrachte $d' = d$ und $d' = -d$
- Wie weit können wir in Richtung d' gehen? Bis die nächste inaktive Nebenbedingung aktiv wird!
- Wenn das für ein endliches $t \geq 0$ passiert: $x \to x + td'$; zusätzliche Nebenbedingungen werden aktiv!
- Sonst: entweder wir sind unbeschränkt (Fall 1 oder 2), denn in Richtung d' werden wir immer besser
- Oder (Fall 3): die ganze Gerade $\{x + td \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist in $\mathbb{L}(P)$; das geht nicht (≥ 0-Bedingungen)!

Zusammenfassung des Beweises

Zusammenfassung des Beweises

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

Zusammenfassung des Beweises

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

- Unzulässig genau dann, wenn $\mathbb{L}(P) = \emptyset$

Zusammenfassung des Beweises

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

- Unzulässig genau dann, wenn $\mathbb{L}(P) = \emptyset$
- Sonst können wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ starten und zu einer Ecke laufen

Zusammenfassung des Beweises

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

- Unzulässig genau dann, wenn $\mathbb{L}(P) = \emptyset$
- Sonst können wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ starten und zu einer Ecke laufen
- Dabei finden wir *entweder* Unbeschränktheit, *oder*

Zusammenfassung des Beweises

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

- Unzulässig genau dann, wenn $\mathbb{L}(P) = \emptyset$
- Sonst können wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ starten und zu einer Ecke laufen
- Dabei finden wir *entweder* Unbeschränktheit, *oder*
- wir kommen zu einer Ecke, die nicht schlechter ist als x

Zusammenfassung des Beweises

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

- Unzulässig genau dann, wenn $\mathbb{L}(P) = \emptyset$
- Sonst können wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ starten und zu einer Ecke laufen
- Dabei finden wir *entweder* Unbeschränktheit, *oder*
- wir kommen zu einer Ecke, die nicht schlechter ist als x
- Wenn $\mathbb{L}(P)$ beschränkt ist, existiert zu jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ eine Ecke $\hat{x}$ mit $c^T x \leq c^T \hat{x}$

Zusammenfassung des Beweises

Fundamentalsatz der linearen Optimierung

Jedes LP in Standardform ist entweder unzulässig, unbeschränkt oder eine der Ecken des Zulässigkeitsraums ist eine optimale Lösung.

- Unzulässig genau dann, wenn $\mathbb{L}(P) = \emptyset$
- Sonst können wir von jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ starten und zu einer Ecke laufen
- Dabei finden wir *entweder* Unbeschränktheit, *oder*
- wir kommen zu einer Ecke, die nicht schlechter ist als x
- Wenn $\mathbb{L}(P)$ beschränkt ist, existiert zu jedem $x \in \mathbb{L}(P)$ eine Ecke $\hat{x}$ mit $c^T x \leq c^T \hat{x}$
- Die beste dieser endlich vielen Ecken ist optimal

Trivialer Algorithmus für LP

Idee: Probiere alle Ecken aus (nehmen Beschränktheit an)

Trivialer Algorithmus für LP

Idee: Probiere alle Ecken aus (nehmen Beschränktheit an)

- Jede Ecke wird definiert durch n der $m + n$ Zeilen von $\bar{A}$

Trivialer Algorithmus für LP

Idee: Probiere alle Ecken aus (nehmen Beschränktheit an)

- Jede Ecke wird definiert durch n der $m + n$ Zeilen von $\bar{A}$
- Jede n-Teilmenge J der Zeilen von $\bar{A}$ definiert eine Teilmatrix $\bar{A}_J$ von $\bar{A}$

Trivialer Algorithmus für LP

Idee: Probiere alle Ecken aus (nehmen Beschränktheit an)

- Jede Ecke wird definiert durch n der $m + n$ Zeilen von $\bar{A}$
- Jede n-Teilmenge J der Zeilen von $\bar{A}$ definiert eine Teilmatrix $\bar{A}_J$ von $\bar{A}$
- Falls $\bar{A}_J$ nicht vollen Rang n hat, ignorieren

Trivialer Algorithmus für LP

Idee: Probiere alle Ecken aus (nehmen Beschränktheit an)

- Jede Ecke wird definiert durch n der $m + n$ Zeilen von $\bar{A}$
- Jede n-Teilmenge J der Zeilen von $\bar{A}$ definiert eine Teilmatrix $\bar{A}_J$ von $\bar{A}$
- Falls $\bar{A}_J$ nicht vollen Rang n hat, ignorieren
- Sonst hat $\bar{A}_J x = \bar{b}_J$ eine eindeutige Lösung

Trivialer Algorithmus für LP

Idee: Probiere alle Ecken aus (nehmen Beschränktheit an)

- Jede Ecke wird definiert durch n der $m + n$ Zeilen von $\bar{A}$
- Jede n-Teilmenge J der Zeilen von $\bar{A}$ definiert eine Teilmatrix $\bar{A}_J$ von $\bar{A}$
- Falls $\bar{A}_J$ nicht vollen Rang n hat, ignorieren
- Sonst hat $\bar{A}_J x = \bar{b}_J$ eine eindeutige Lösung
- Löse z.B. mit Gaussscher Elimination

Trivialer Algorithmus für LP

Idee: Probiere alle Ecken aus (nehmen Beschränktheit an)

- Jede Ecke wird definiert durch n der $m + n$ Zeilen von $\bar{A}$
- Jede n-Teilmenge J der Zeilen von $\bar{A}$ definiert eine Teilmatrix $\bar{A}_J$ von $\bar{A}$
- Falls $\bar{A}_J$ nicht vollen Rang n hat, ignorieren
- Sonst hat $\bar{A}_J x = \bar{b}_J$ eine eindeutige Lösung
- Löse z.B. mit Gaussscher Elimination
- Prüfe, ob diese Lösung x zulässig ist

Trivialer Algorithmus für LP

Idee: Probiere alle Ecken aus (nehmen Beschränktheit an)

- Jede Ecke wird definiert durch n der $m + n$ Zeilen von $\bar{A}$
- Jede n-Teilmenge J der Zeilen von $\bar{A}$ definiert eine Teilmatrix $\bar{A}_J$ von $\bar{A}$
- Falls $\bar{A}_J$ nicht vollen Rang n hat, ignorieren
- Sonst hat $\bar{A}_J x = \bar{b}_J$ eine eindeutige Lösung
- Löse z.B. mit Gaussscher Elimination
- Prüfe, ob diese Lösung x zulässig ist
- Die beste zulässige Lösung ist optimal

Trivialer Algorithmus für LP

Idee: Probiere alle Ecken aus (nehmen Beschränktheit an)

- Jede Ecke wird definiert durch n der $m+n$ Zeilen von $\bar{A}$
- Jede n-Teilmenge J der Zeilen von $\bar{A}$ definiert eine Teilmatrix $\bar{A}_J$ von $\bar{A}$
- Falls $\bar{A}_J$ nicht vollen Rang n hat, ignorieren
- Sonst hat $\bar{A}_J x = \bar{b}_J$ eine eindeutige Lösung
- Löse z.B. mit Gaussscher Elimination
- Prüfe, ob diese Lösung x zulässig ist
- Die beste zulässige Lösung ist optimal
- Lösen $O\left(\binom{m+n}{n}\right)$ lineare Gleichungssysteme/prüfen Zulässigkeit

Trivialer Algorithmus für LP

Idee: Probiere alle Ecken aus (nehmen Beschränktheit an)

- Jede Ecke wird definiert durch n der $m+n$ Zeilen von $\bar{A}$
- Jede n-Teilmenge J der Zeilen von $\bar{A}$ definiert eine Teilmatrix $\bar{A}_J$ von $\bar{A}$
- Falls $\bar{A}_J$ nicht vollen Rang n hat, ignorieren
- Sonst hat $\bar{A}_J x = \bar{b}_J$ eine eindeutige Lösung
- Löse z.B. mit Gaussscher Elimination
- Prüfe, ob diese Lösung x zulässig ist
- Die beste zulässige Lösung ist optimal
- Lösen $O\left(\binom{m+n}{n}\right)$ lineare Gleichungssysteme/prüfen Zulässigkeit
- Sehr langsam, aber endlich!

Fragen für den weiteren Verlauf der Vorlesung

Fragen für den weiteren Verlauf der Vorlesung

- Wie lösen wir das schneller? Geht das effizient?

Fragen für den weiteren Verlauf der Vorlesung

- Wie lösen wir das schneller? Geht das effizient?
- Wie finden wir Unbeschränktheit?

Fragen für den weiteren Verlauf der Vorlesung

- Wie lösen wir das schneller? Geht das effizient?
- Wie finden wir Unbeschränktheit?
- Was, wenn uns nur ganzzahlige Lösungen interessieren?

Fragen für den weiteren Verlauf der Vorlesung

- Wie lösen wir das schneller? Geht das effizient?
- Wie finden wir Unbeschränktheit?
- Was, wenn uns nur ganzzahlige Lösungen interessieren?
- Wie beweist man Optimalität oder Schranken?

Fragen für den weiteren Verlauf der Vorlesung

- Wie lösen wir das schneller? Geht das effizient?
- Wie finden wir Unbeschränktheit?
- Was, wenn uns nur ganzzahlige Lösungen interessieren?
- Wie beweist man Optimalität oder Schranken?
- Welche theoretischen Resultate sind noch wichtig?

Fragen für den weiteren Verlauf der Vorlesung

- Wie lösen wir das schneller? Geht das effizient?
- Wie finden wir Unbeschränktheit?
- Was, wenn uns nur ganzzahlige Lösungen interessieren?
- Wie beweist man Optimalität oder Schranken?
- Welche theoretischen Resultate sind noch wichtig?
- Wo kann man das noch einsetzen?