Mathematische Methoden der Algorithmik

Dr. Phillip Keldenich

Winter 2025/2026
Abgabe: 01.12.2026
Besprechung: 08.12.2026

Übungsblatt 3

Abgabe der Lösungen bis zum 01.12.2026 um 13:15 Uhr in der großen Übung oder in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik.

Gebt Eure Lösungen in Papierform über den Hausaufgabenabgabekasten ab (vor dem IZ 337). Denkt daran, Eure Zettel mit Namen und Matrikelnummer zu versehen. Elektronische Abgaben sendet Ihr bitte als *einzelnes* PDF-Dokument an `bossegra@ibr.cs.tu-bs.de`. Sollte die Abgabe mehrerer Dateien (z.B. Code) notwendig sein, versendet bitte ein einzelnes ZIP-Archiv. Bitte betrachtet die elektronische Abgabe als *Ausnahme*, z.B. im Krankheitsfall.

Aufgabe 1 (Modellieren, Dualisieren, Analysieren): (5+10+10 Punkte)
Wir betrachten eine Aufteilung von n Personen auf k Jobs, welche mit möglichst wenig Gesamtarbeitszeit fertiggestellt werden sollen. Dabei kann jede Person einen Anteil an einem Job übernehmen. Zusätzlich gelten folgende Punkte:

I) Die Summe aller Anteile einer Person über alle Jobs darf maximal den Wert 1 annehmen (Auslastung der Person).

II) Die Anteile an einem Job über alle Personen muss mindestens den Wert 1 annehmen (Job wird fertiggestellt).

III) Person i benötigt für Job j insgesamt c_{ij} Minuten pro Anteil.

a) Modelliere das Szenario als LP in Standardform.

b) Dualisiere Dein LP.

c) Zeige: In jeder optimalen Lösung des primalen LPs ist die Nebenbedingung bzgl. II) mit Gleichheit erfüllt.

Aufgabe 2 (Komplementärer Schlupf): (5+10 Punkte)
Betrachte folgendes LP.

$$\begin{array}{rrrl} \max & +2x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.t.} & +2x_1 & +3x_2 & \leq 30 \\ & -x_1 & -2x_2 & \leq -10 \\ & +x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & & \geq 0 \end{array}$$

a) Dualisiere das LP.

b) Das primale LP hat die optimale Basislösung $x_1 = \frac{27}{5}, x_2 = \frac{32}{5}$. Leite mit Hilfe des komplementären Schlupfs eine optimale Lösung des dualen LPs her.

Aufgabe 3 (Zirkulation): **(20 Punkte)**

Betrachte folgendes LP.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq 0, \quad & \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ & x_j & \geq 0, \quad & \forall j \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Zeige: Entweder ist $x_j = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ eine optimale Lösung, oder das LP ist unbeschränkt.