Mathematische Methoden der Algorithmik
Dr. Phillip Keldenich

Wintersemester 2026/2027
Abgabe: 03.11.2026
Besprechung: 10.11.2026

Übungsblatt 1

Abgabe der Lösungen bis zum 03.11.2026 um 13:15 Uhr in der großen Übung oder in den Hausaufgabenkasten der Algorithmik.

Gebt Eure Lösungen in Papierform über den Hausaufgabenabgabekasten ab (vor dem IZ 337). Denkt daran, Eure Zettel mit Namen und Matrikelnummer zu versehen. Elektronische Abgaben sendet Ihr bitte als *einzelnes* PDF-Dokument an `bossegra@ibr.cs.tu-bs.de`. Sollte die Abgabe mehrerer Dateien (z.B. Code) notwendig sein, versendet bitte ein einzelnes ZIP-Archiv. Bitte betrachtet die elektronische Abgabe als *Ausnahme*, z.B. im Krankheitsfall.

Aufgabe 1 (Fabrik): **(10+5+15 Punkte)**
Eine Fabrik kann folgende Produkte herstellen und verkaufen.

Produkt	1 Einheit wird produziert aus	Profit pro Einheit
Rohre	0.5 t Eisen, 0.6 t Kohle	1000 Euro
Träger	0.6 t Eisen, 0.6 t Kohle	1200 Euro

Die Fabrik erhält pro Monat 36 t Eisen und 30 t Kohle.

a) Stelle ein LP auf, mit dessen Hilfe Du den monatlichen Profit der Fabrik maximieren kannst.

b) Argumentiere, warum das LP nicht unbeschränkt oder unzulässig sein kann.

c) Verwende den trivialen Algorithmus auf Basis des Fundamentalsatzes, um eine optimale Lösung zu finden. Falls irgendwelche Ecken aus offensichtlichen Gründen unzulässig oder suboptimal sind, darfst Du sie mit einer entsprechenden Begründung ignorieren.

Aufgabe 2 (Freie Variablen): **(15 Punkte)**
Sei $P : \max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$ für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ ein LP, in dem alle Variablen frei sind, d.h., keinen zusätzlichen Einschränkungen der Form $x \geq 0$ unterliegen. Zeige, dass das LP $P' = \max\{c^T x^+ - c^T x^- \mid (A \ \ -A)(x^+ \ \ x^-)^T = Ax^+ - Ax^- \leq b, x^+ \geq 0, x^- \geq 0\}$, welches wir erhalten wenn wir P mithilfe der in der Vorlesung vorgestellten Technik in Standardform überführen, im folgenden Sinne zu P äquivalent ist:

(i) Zu jeder zulässige Lösung $x \in \mathbb{L}(P)$ gibt es eine zulässige Lösung $x' \in \mathbb{L}(P')$ mit $c^T x = c^T x^+ - c^T x^-$.

(ii) Zu jeder zulässigen Lösung $x' \in \mathbb{L}(P')$ gibt es eine zulässige Lösung $x \in \mathbb{L}(P)$ mit $c^T x = c^T x^+ - c^T x^-$.

Aufgabe 3 (Fundamentalsatz und Standardform): **(8 + 7 Punkte)**

a) Gib ein Beispiel für ein LP (nicht in Standardform) an, welches eine (nicht notwendigerweise eindeutige) optimale Lösung besitzt, dessen Zulässigkeitsbereich aber keine optimale Ecke hat; in einem solchen LP mit n Variablen ist eine Ecke, analog zur Definition für die Standardform, definiert als Punkt $x \in \mathbb{L}(P)$, an dem n linear unabhängige Nebenbedingungen mit Gleichheit gelten (inklusive Bedingungen der Form $x \geq 0$ oder $x \leq 0$).

Hinweis: Schaue Dir den Beweis des Fundamentalsatzes an; wo brauchen wir die Standardform?

b) Zeige: der Zulässigkeitsbereich jedes LPs ist konvex. Mit anderen Worten: für alle Paare $x, y \in \mathbb{L}(P) \subseteq \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt: $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbb{L}(P)$. Ihr könnt der Einfachheit halber annehmen, dass P in Standardform ist.