Technische Universität Braunschweig

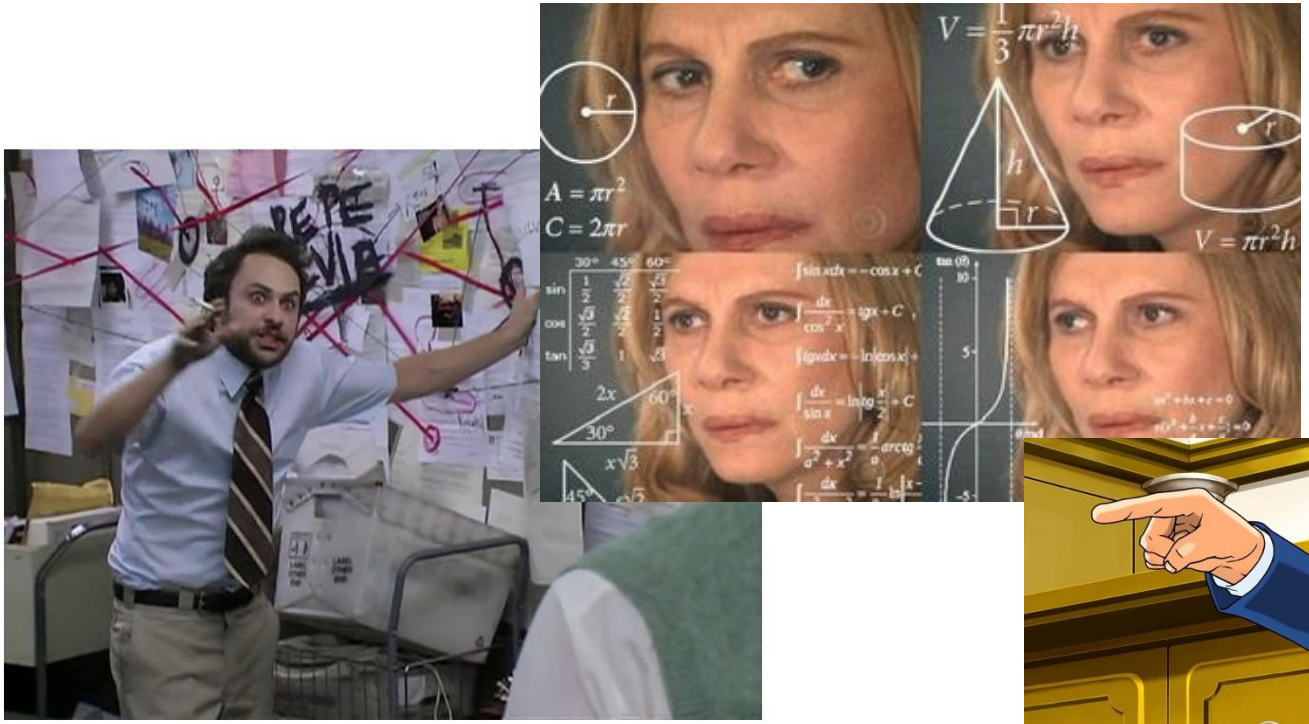


Algorithmen und Datenstrukturen
Übung 1

Ramin Kosfeld und Chek-Manh Loi

05.11.2026

Heute: Beweisführung





Die schlechte Nachricht zuerst…

Wie findet man Beweise?





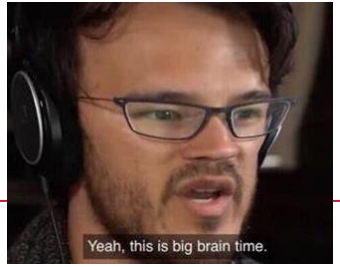
Ey, wenn *wir* euch das sagen könnten …

Auf die *genauen Argumente* müsst ihr selber kommen, da gibt es kein einheitliches Rezept.



Aber: Es gibt klare Techniken, wie man richtig Beweise führt. Und die zeigen wir euch jetzt :)





Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- 13 ist eine gerade Zahl.
- Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $n(n+1)/2$.
- Die größte Primzahl ist $2^{82\,589\,933} - 1$
- Besitzt ein zusammenhängender Graph nur Knoten geraden Grades, besitzt er eine Eulertour.

Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- 13 ist eine gerade Zahl.
- Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$, sodass $2k = 13$

- Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $n(n+1)/2$.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

- Die größte Primzahl ist $2^{82\,589\,933} - 1$
- Für jede Primzahl p gilt: $p \leq 2^{82\,589\,933} - 1$

- Besitzt ein zusammenhängender Graph nur Knoten geraden Grades, besitzt er eine Eulertour.
- Für jeden zusammenhängenden Graphen G, deren Knotengrade alle gerade sind, gilt: G besitzt eine Eulertour

Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

- Es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$, sodass $2k = 13$
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Für jede Primzahl p gilt: $p \leq 2^{82\,589\,933} - 1$
- Für jeden zusammenhängenden Graphen G, deren Knotengrade alle gerade sind, gilt: G besitzt eine Eulertour

Welche Aussagen sind wahr?

Logische Verknüpfungen

Negation („Nicht“,¬)

Konjunktion („Und“,∧)

Disjunktion („Oder“,∨)

Implikation („wenn…dann“, ⇒)

Äquivalenz („genau dann wenn“, ⇔)

Mathematische Aussagen →

1: Aussage ist *wahr*
0: Aussage ist *falsch*

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Implikation & Äquivalenz I

In Beweisen (an der Tafel etc.) werden oft Implikations- und Äquivalenzpfeile einfach in den Fließtext eingebaut.

Implikation
(„wenn…dann“, ⇒)

Äquivalenz
(„genau dann wenn“, ⇔)

Implikation & Äquivalenz I

In Beweisen (an der Tafel etc.) werden oft Implikations- und Äquivalenzpfeile einfach in den Fließtext eingebaut. Außerdem gibt es Formulierungen im Fließtext, die genau der Bedeutung der Implikation und Äquivalenz entsprechen:

Implikation
(„wenn…dann“, ⇒)

$A \Rightarrow B$

„wenn A gilt, dann gilt auch B“

„aus A folgt B“

„A impliziert B“

…

Äquivalenz
(„genau dann wenn“, ⇔)

$A \Leftrightarrow B$

„A gilt genau dann, wenn B gilt“

„A und B sind äquivalent“

Auf Englisch:

„if and only if“ / „iif“ / „exactly if“

…

Implikation & Äquivalenz II

Implikation und Äquivalenzen sind *transitiv*:

$$\underbrace{A \Rightarrow B,\ \ B \Rightarrow C}_{A \Rightarrow C}$$

$$\underbrace{A \Leftrightarrow B,\ B \Leftrightarrow C}_{A \Leftrightarrow C}$$

Eine solche Verkettung von Aussagen ist oft die wesentliche Struktur eines Beweises.

Existenz- vs. Allaussagen



Wie beweise ich die folgende Aussage?

„Es existiert ein blaues Auto.“



Hier reicht ein Beispiel
als Beweis aus!

Existenz- vs. Allaussagen

Wie beweise ich die folgende Aussage?

„Alle Autos sind blau.“



Existenz- vs. Allaussagen

Wie beweise ich die folgende Aussage?

„Alle Autos sind blau.“



Hier reicht ein Beispiel als Beweis *nicht* aus!

Dafür reicht hier ein Beispiel aus, um die Aussage zu *widerlegen*

Existenz- vs. Allaussagen

Es existiert **KEIN** blaues Auto.

→ Alle Autos sind **nicht** blau.

Verneinte Existenzaussagen werden zu Allaussagen

NICHT alle Autos sind blau.

→ Es existiert ein Auto, das **nicht** blau ist

Verneinte Allaussagen werden zu Existenzaussagen

Existenz- vs. Allaussagen

	Existenzaussage	Allaussage
Zeigen	*Beispiel* reicht als Beweis	Beweis
Widerlegen	Beweis	*Beispiel* reicht als Beweis

Negation einer Existenzaussage wird zu einer Allaussage.
Negation einer Allaussage wird zu einer Existenzaussage.

Existenz- vs. Allaussagen

2021 International Conference on Networking and Network Applications (NaNA)

The Nearest Neighbor Algorithm for Balanced and Connected k-Center Problem under Modular Distance

Rui Li
School of information
Lijiang Cultural and Tourism College
Lijiang China
47640481@qq.com

Zilan Yang†
School of information
Lijiang Cultural and Tourism College
Lijiang China
†Corresponding author, 398348486@qq.com

978-1-6654-4158-2/21/$31.00 ©2021 IEEE | DOI: 10.1109/NaNA53684.2021.00073

***Abstract*—The k-center problem is a famous NP complete problem in combinatorial optimization. Under the traditional distance, there is a 2-approximation algorithm for the center problem, and the partition from the center satisfies the internal connectivity. However, under the modular distance, the partition obtained by the traditional center algorithm may not satisfy the internal connectivity. Therefore, this paper proposes the problem of balanced and connected center under modular distance, and designs a nearest neighbor algorithm. Finally, an example is given to prove the correctness of the algorithm.**

Keywords-component; The center; nearest neighborhood; divide; modular distance; heuristic algorithm

I. INTRODUCTION

In real life we often encounter problem like this: We are choosing k vertices as service stations in a network, making any demand node belongs to only one service station, the distance considered does not satisfied these properties, especially symmetry. For example, "mode distance" considered by Liang et al. [2]:

$$d(s,t) = \min_{P} d_P(s,t) = \min_{P} \max_{v_i \in P} \|v_s - v_i\|$$

where P is a simple path from s to t. Obviously, under the definition of this distance, $d(s,t) \neq d(t,s)$, but some traditional algorithms are still valid. Liang et al. [2] showed that a shortest path from s to t can be obtained by using the modified Dijkstra algorithm. Similarly, the modified Greedy algorithm of traditional k-center is also applicable to the k-center problem under this distance. However, the partition obtained from this k-center has different properties, that is, the corresponding partition obtained by the traditional k-center Greedy algorithm must meet the internal connectivity, and the partitions do not intersect each other, that is, $V_i \bigcap V_j = \varnothing$, and the partition of the k-center problem under

Existenz- vs. Allaussagen

Beliebtester Fehler beim Beweisen:
„Proof by example“ – Allaussage mit Beispiel „bewiesen“



partition obtained by the traditional center
satisfy the internal connectivity. Therefore, this paper proposes the problem of balanced and connected center under modular distance, and designs a nearest neighbor algorithm. Finally, an example is given to prove the correctness of the algorithm.

Keywords-component; The center; nearest neighborhood; divide; modular distance; heuristic algorithm

Fragepause

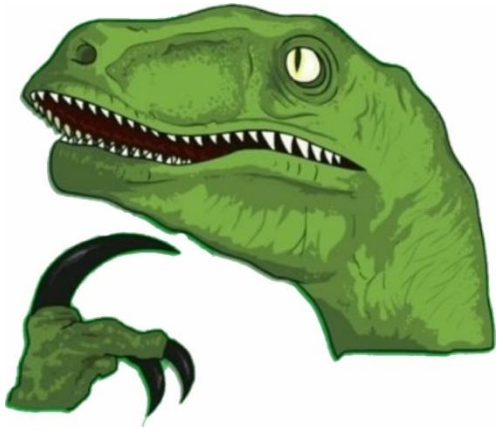
Beweistechniken – Teil 1

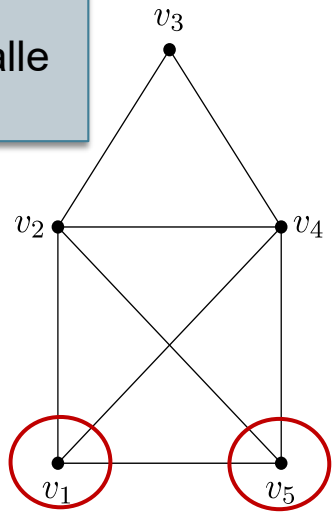
Aus der Vorlesung

Satz 2.4:
(1) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann einen Eulerweg besitzen, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.
(2) Ein Graph $G = (V, E)$ kann nur dann eine Eulertour besitzen, wenn alle Knoten geraden Grad besitzen.

Beweis: Gibt es in der Vorlesung.

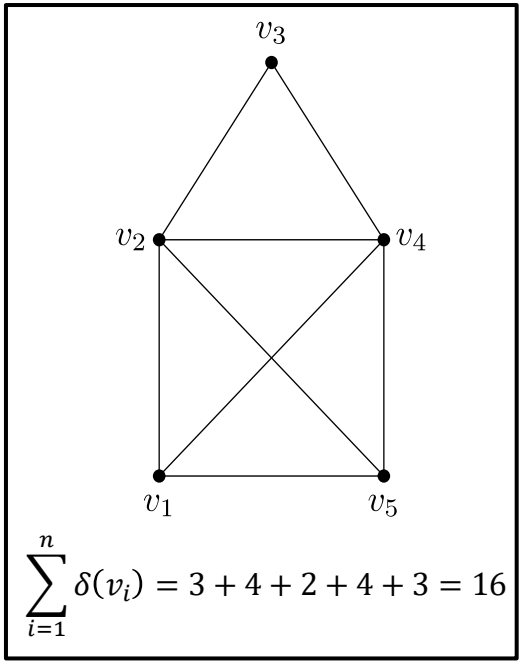
Gibt es Graphen mit genau einem ungeraden Knoten?





„Handshake-Lemma“

Satz 2.5: Für jeden beliebigen einfachen Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.



Beweis:

Betrachte Summe der Knotengrade

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i)$$

Jede Kante wird doppelt betrachtet, also

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m$$

Das ist eine gerade Zahl!

Es kann also nur gerade viele Knoten ungeraden Grades geben.

(Gäbe es ungerade viele ungerade Grade, wäre auch die Gradsumme ungerade)

Arten von Beweisen

- Direkter Beweis
- Kontraposition
- Widerspruchsbeweis

Direkter Beweis

Beweise – Direkter Beweis

Satz des Pyth[illegible]s: $a^2 + b^2 = c^2$

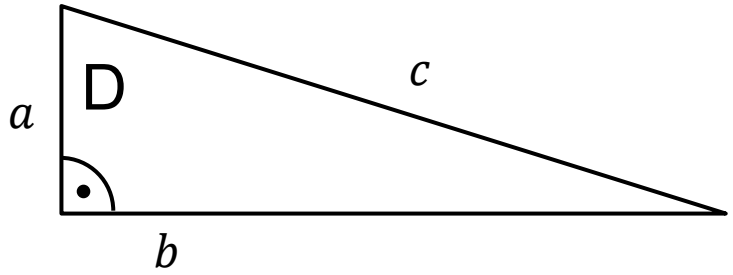
Beweis: … … …

Wo fange ich an?

Geht es hier überhaupt um Dreiecke?

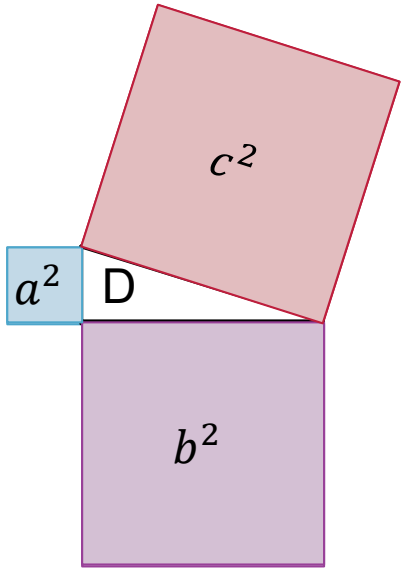
Beweise – Direkter Beweis

Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypothenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.



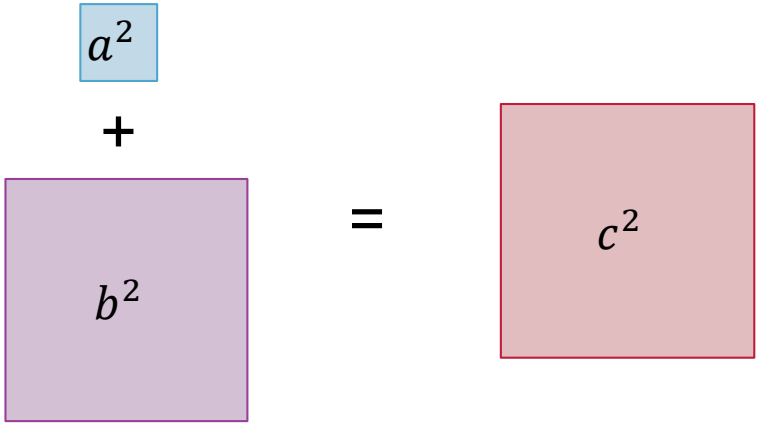
Beweise – Direkter Beweis

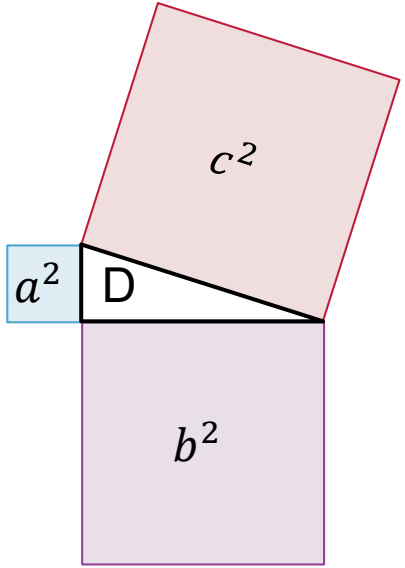
Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypothenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.



Beweise – Direkter Beweis

Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypothenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

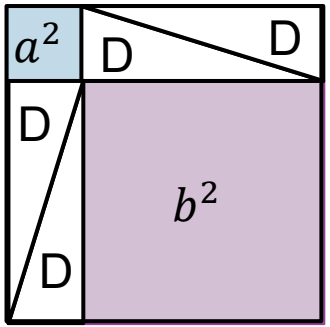


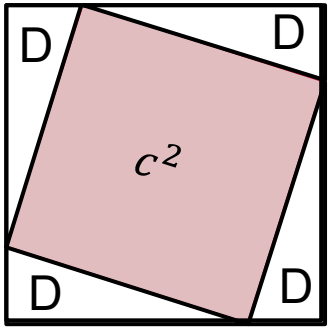


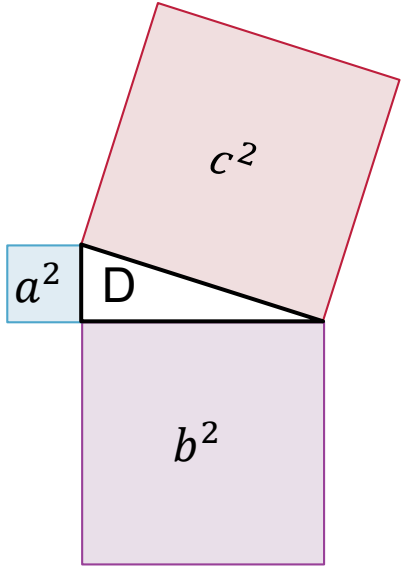
Beweise – Direkter Beweis

Satz des Pythagoras: Für ein rechtwinkliges Dreieck D mit Kathetenlängen a und b und Hypothenusenlänge c gilt $a^2 + b^2 = c^2$.

Beweis: Betrachte folgende Konstrukte:







Beides sind Quadrate mit Seitenlänge $a + b$

Also gilt $a^2 + b^2 + 4 \cdot Area(D) = c^2 + 4 \cdot Area(D)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Kontrapostition

Beweise – Kontraposition

Ein direkter Beweis kann schwierig sein, sodass sich die **Kontraposition** anbietet.

Es gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Wir können also annehmen, dass B nicht gilt und folgern daraus, dass auch A nicht gelten kann.

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{Z}$. „Wenn n^2 ungerade ist, ist n ungerade“ wird zu „Wenn n gerade ist, ist n^2 gerade.“

Beweis: n gerade $\Rightarrow$ es ex. $k \in \mathbb{Z}$ mit $2k = n$

$\Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$, also eine gerade Zahl.

Widerspruchsbeweis

Beweise – Widerspruch

Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch. Um eine wahre Aussage zu beweisen, können wir zeigen, dass die Negation nicht gilt.
Diese Beweistechnik nennt man **Widerspruchsbeweis**.



Widerspruchsbeweis für Aussage A:

- Wir nehmen an: $\neg A$ gilt.
- Führe $\neg A$ zu einem *Widerspruch*
- Die Annahme $\neg A$ muss falsch sein, denn sie ist widersprüchlich
- $\Rightarrow A$ muss wahr sein.

- Haben kein ganz genaues Ziel
- Nur: Wir wollen irgendwie zeigen, dass unter dieser Annahme etwas richtig böse kaputt ist

Widerspruchsbeweis – Der Klassiker

Aussage: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Beweis: *Wir nehmen an, diese Aussage gilt nicht.*

Also: Es gibt nur *endlich* viele Primzahlen $p_1, p_2, \dots p_n$.

Wir betrachten das Produkt aller endlichen Primzahlen +1:

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

Die Zahl q ist größer als alle Primzahlen
$\Rightarrow q$ ist keine Primzahl.

Keine Primzahl teilt q (alle haben den Rest 1).

$\Rightarrow q$ ist eine Primzahl.

Widerspruch: Es gibt also unendlich viele Primzahlen.



Widerspruchsbeweis – Beispiel II

Brücke e: Wird diese Kante entfernt, zerfällt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten

Beispiel: Besitzt ein zusammenhängender Graph G eine ***Brücke*** e, so besitzt G Knoten mit ungeradem Grad.

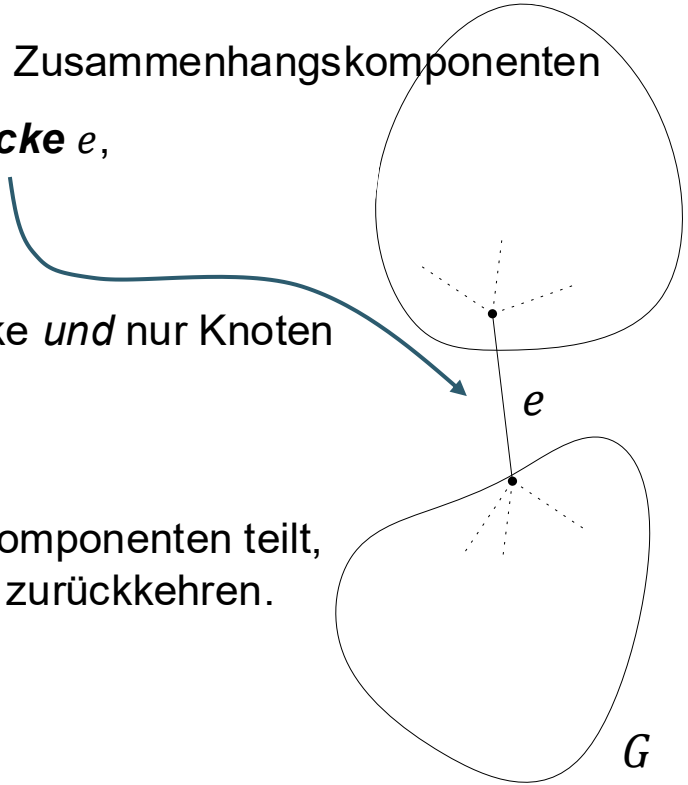
Beweis: *Wir nehmen an, diese Aussage gilt nicht.*

Also: Ein zusammenhängender Graph G besitzt eine Brücke *und* nur Knoten mit geradem Grad.

Dann existiert in G eine Eulertour.

Da e auf der Eulertour liegt und sein Entfernen G in zwei Komponenten teilt, können wir eine Komponente verlassen, aber nicht dorthin zurückkehren.

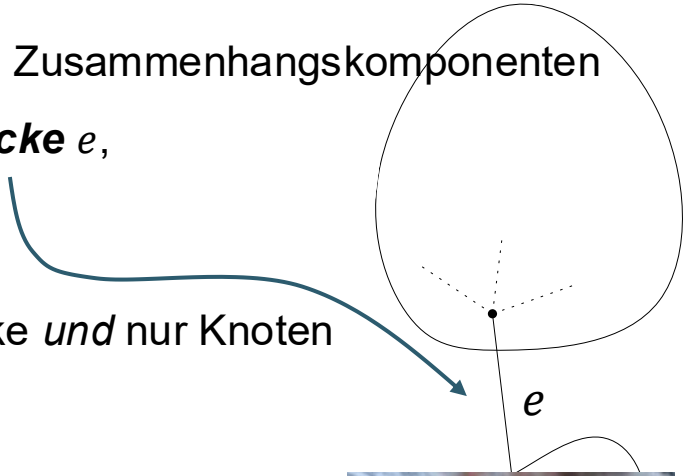
Wir können also keine Eulertour in G konstruieren.



Widerspruchsbeweis – Beispiel II

Brücke e: Wird diese Kante entfernt, zerfällt Graph in zwei Zusammenhangskomponenten

Beispiel: Besitzt ein zusammenhängender Graph G eine ***Brücke*** e,
so besitzt G Knoten mit ungeradem Grad.



Beweis: *Wir nehmen an, diese Aussage gilt nicht.*

Also: Ein zusammenhängender Graph G besitzt eine Brücke *und* nur Knoten mit geradem Grad.

Dann existiert in G eine Eulertour.

Da e auf der Eulertour liegt und sein Entfernen G in zwei Komponenten teilt, können wir eine Komponente verlassen, aber nicht dorthin zurückkehren.



Wir können also keine Eulertour in G konstruieren.

Die Annahme ist widersprüchlich, also muss die ursprüngliche Aussage gelten.

Äquivalenzen

Beweise – Äquivalenzen

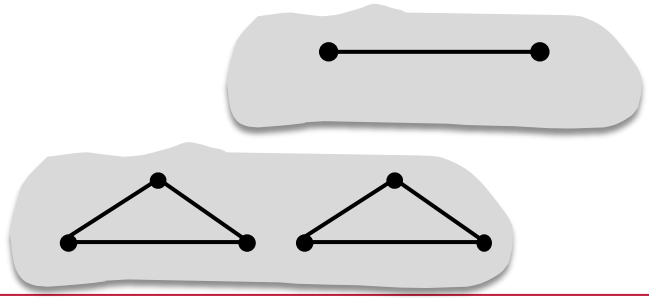
Aussagen der Form $A \Leftrightarrow B$ können bewiesen werden, indem sowohl $A \Rightarrow B$ **und** $B \Rightarrow A$ gezeigt werden.

Bsp: Ein zusammenhängender Graph besitzt genau dann eine Eulertour, wenn jeder Knotengrad gerade ist.

Beweis $A \Leftrightarrow B$:
Beweis $A \Rightarrow B$
…
Beweis $B \Rightarrow A$
…
Aus beiden vorangegangenen Beweisen folgt $A \Leftrightarrow B$.

Um eine solche Aussage zu *widerlegen*, reicht es $A \Rightarrow B$ **oder** $B \Rightarrow A$ zu widerlegen.

Bsp: Ein Graph ist genau dann zusammenhängend, wenn jeder Knotengrad mindestens zwei ist.

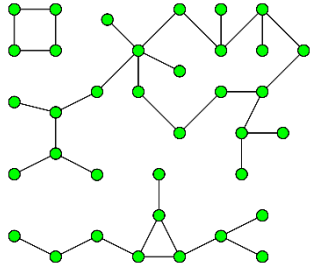


Fragen?

Mehr Beispiele

Zusammenhang von Graphen

Satz: Wenn ein Graph G zusammenhängend ist, enthält er mindestens $n - 1$ Kanten.



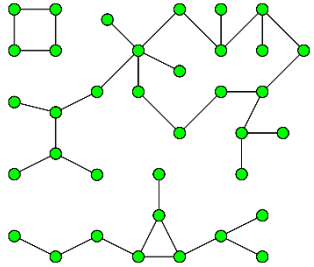
Beweis:
Fügt man eine Kante in einen Graphen ein, so kann sich die Anzahl an Komponenten nur um eins verringern.

Ein Graph ohne Kanten besitzt n Komponenten, ein zusammenhängender Graph nur eine Komponente.

Also müssen mindestens $n - 1$ Kanten eingefügt werden, um Zusammenhang zu gewährleisten.

Kreise in Graphen

Satz: Wenn jeder Knoten eines Graphen G einen Grad von mindestens zwei besitzt, enthält G mindestens einen Kreis.



Beweis:
Betrachte einen längsten Pfad $P \coloneqq v_1, v_2, \dots, v_i$ in G und einen Knoten v_j, der adjazent zu v_1 ist.

v_j muss auf P liegen, anderfalls könnte P erweitert werden.
Dann ist $K \coloneqq v_1, v_2, \dots, v_j, v_1$ ein Kreis in G.

Kreisfreie Graphen

Satz: Ist ein Graph G kreisfrei und zusammenhängend, dann enthält er exakt $n-1$ Kanten.

Graph zshgd $\Rightarrow \geq n-1$ *Kanten*

Jeder Knotengrad $\geq 2 \Rightarrow$ *Gibt Kreis*

Beweis:
Um zusammenhängend zu sein, brauchen wir mind. $n-1$ Kanten.

Bleibt zu zeigen: Um kreisfrei zu sein, dürfen wir maximal $n-1$ Kanten besitzen.
Kontraposition: Wir besitzen mindestens n Kanten. Wir folgern, dass G dann auch einen Kreis besitzt.

Entferne zunächst nach und nach alle Knoten mit Grad 1 samt Kante. Da wir das höchstens $n-k$ mal machen können (mit $0 < k$), bleiben k Knoten und $\geq k$ Kanten übrig.

Weiter bleibt ein Graph übrig, in dem jeder Knoten einen Grad von mindestens zwei besitzt. Er kann also nicht kreisfrei sein. Daraus folgt, dass auch G nie kreisfrei war.

Merkzettel:

https://www.ibr.cs.tu-bs.de/alg/Merkzettel/proof-booklet.pdf

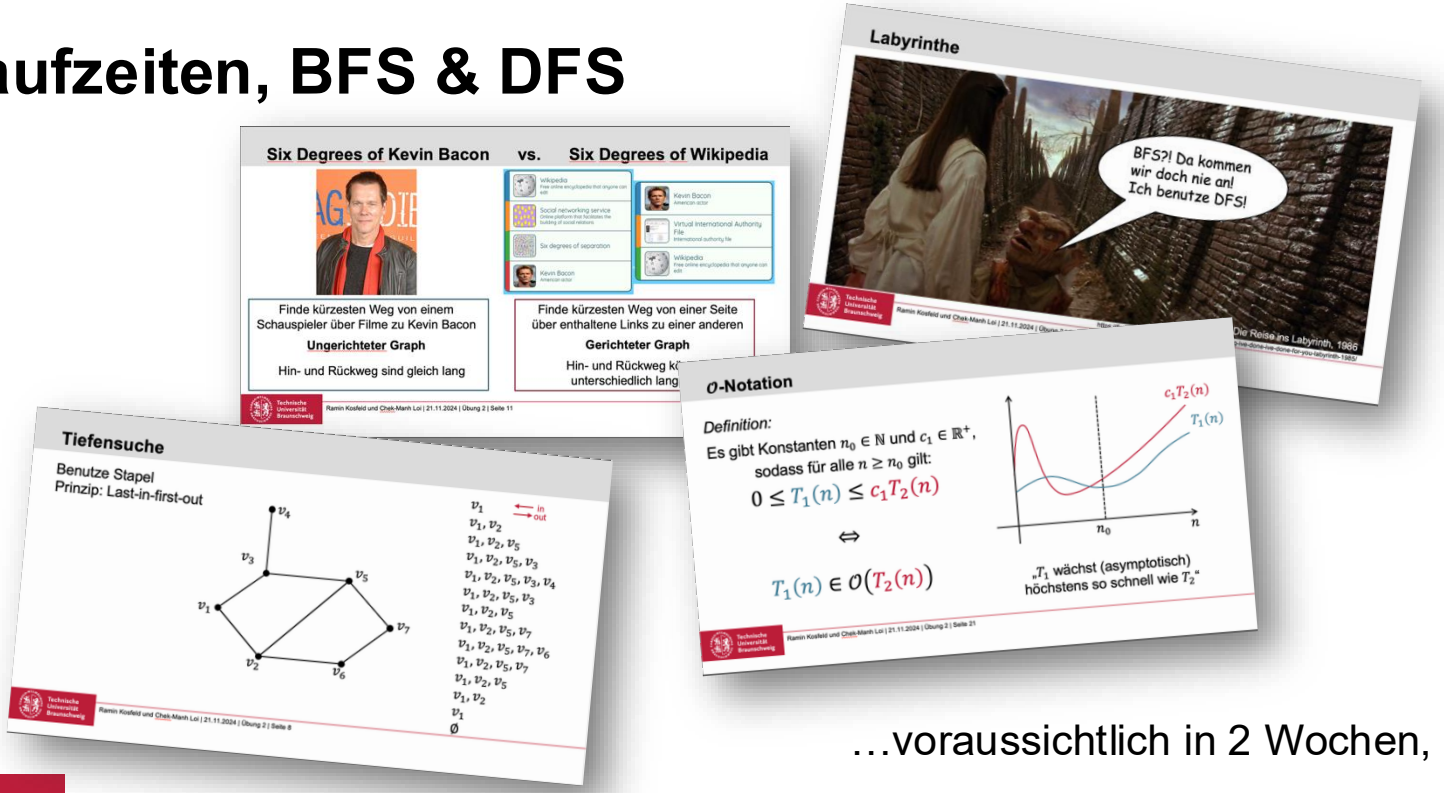
(auch auf der Website verlinkt)

Beweise – Teil 2 (Teaser)



… nächstes Mal

Laufzeiten, BFS & DFS



…voraussichtlich in 2 Wochen, am 19.11.!