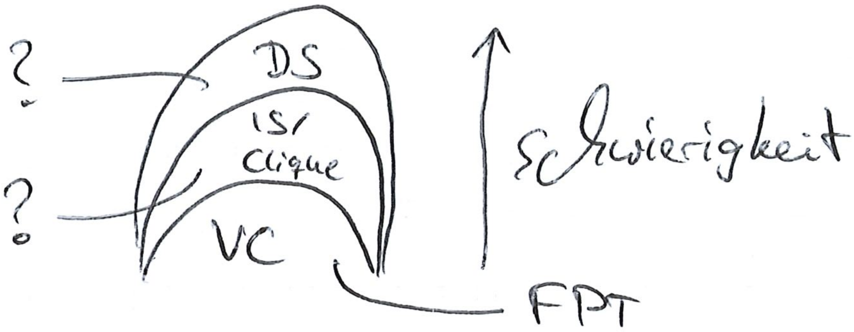
ParA - VL 11

Kapitel 6.2 – W-Hierarchie

$$DS \overset{?}{\leq}_{FPT} IS/Clique \overset{?}{\leq}_{FPT} VC$$



Wie lassen sich Klassen für DS oder Clique definieren?

Gibt es kanonische Probleme für diese Klassen?

"Repräsentant der Klasse"

Für NP: Boolean Circuit

Definition ~~Problem~~ 6.3

Ein boolescher Schaltkreis (boolean Circuit) ist ein gerichteter, azyklischer Graph mit Knotenlabeln:

- In-Grad 0 ist ein Input-Knoten.
- In-Grad ~~0~~ 1 ist ein Negations-Knoten.
- In-Grad ≥2 ist entweder ein Und-Knoten oder ein Oder-Knoten.

Zusätzlich ist ein Knoten mit Ausgangsgrad 0 der Output-Knoten.

Die Tiefe des Schaltkreises ist die maximale ~~Ka~~ Länge eines Pfades von einem Input-Knoten zu ~~dem~~ Output-Knoten

Problem 6.4 (Circuit Satisfiability, CS)

Gegeben: Boolescher Schaltkreis C

Frage: Können Werte 0 oder 1 zu den Input-Knoten gegeben werden, sodass am Output-Knoten der Wert 1 herauskommt?

"Schaltkreis erfüllbar?!"

Theorem 6.5

CS ist NP-vollständig

Betrachte eine (parametrisierte) Variante davon:

Problem 6.5 (Weighted Circuit Satisfiability, WCS)

Gegeben: Boolescher Schaltkreis, Zahl k

Frage: Existiert eine erfüllende Belegung, sodass genau k Input-Knoten auf 1 gesetzt sind?

Theorem 6.6

WCS $\in$ XP (param. nach k)

Beweis: selbst.

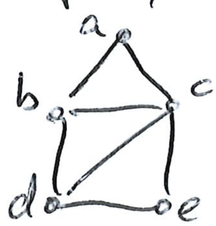
Offene Frage: WCS $\notin$ FPT ?

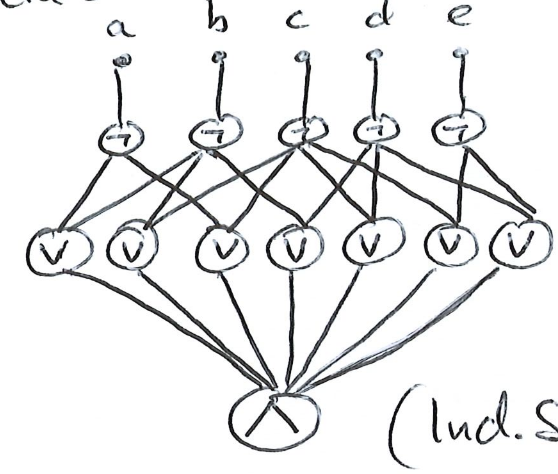
Theorem 6.7

Clique $\leq_{FPT}$ WCS

Independent Set $\leq_{FPT}$ WCS

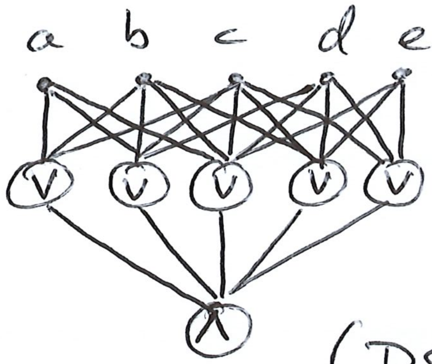
"Proof by Picture"





Nicht beide Endknoten im IS erlaubt

(Ind. Set)



Einer in jeder geschl. Nachbarschaft

(DS)

Woher kommt die Schwierigkeit von DS gegenüber Ind. Set? Betrachte die Knoten:

	IS	DS
oder-Knoten	In-deg: 2	In-deg: unbeschränkt (Grad abhängig in G)
und-Knoten	In-deg: m	In-deg: n
# Nicht-konstante In deg. Knoten auf einem Pfad	1	2

"Weft"

Definition 6.8 (weft)

Sei C ein boolescher Schaltkreis.
Die "weft" von C ist die maximale Anzahl an großen Knoten (in-Grad > 2 *) auf jedem Pfad von Input-Knoten zum Output-Knoten.
Schaltkreise mit weft $\leq t$ und Tiefe $\leq d$ bezeichnen wir mit $C_{t,d}$.

* NB: Die Konstante ist willkürlich! Man kann hier eine bel. Konstante ≥ 2 nutzen.

Definition 6.9 (W-Hierarchie)

Für ein $t \geq 1$ gehört ein param. Problem P zur Klasse $W[t]$, falls eine param. Reduktion von P zu $WCS[C_{t,d}]$ für eine Konstante $d \geq 1$ existiert.

Damit ist Ind. Set (und Clique) in $W[1]$, und DS in $W[2]$.
Gelegentlich wird FPT auch als $W[0]$ bezeichnet.

Man kann folgendes zeigen:

Theorem 6.10

Ind. Set und Clique sind $W[1]$-vollständig.
Dominating Set ist $W[2]$-vollständig

Wie ist das für $t > 2$? Wie sehen Probleme in $W[t]$ aus?

Wir konstruieren eine boolsche Formel wie folgt:

Sei Δ_0 bzw Γ_0 ein einzelnes Literal.

Für $t \geq 1$ sei:

- Δ_t die Disjunktion ($\vee$) von bel. vielen Γ_{t-1} Formeln.
- Γ_t die Konjunktion ($\wedge$) von bel. vielen Δ_{t-1} Formeln.

Wir sagen Γ_t ist t-normalized:
Es ist die Konjunktion von Disjunktionen von Konjunktionen von ... für t Level.

Eine t-normalized Formel heißt monotone, wenn jedes Literal positiv ist. Analog antimonoton, wenn jedes Literal negativ ist.

Theorem 6.11

Folgende Probleme sind $W[t]$-vollständig für $t \geq 2$

- t gerade:
  - Weighted t-normalized Satisfiability
  - Weighted monotone t-norm. Satisf.
  - Weighted monotone $(t+1)$-norm. Satisf.
- t ungerade:
  - Weighted t-norm. Satisf.
  - Weighted Antimonotone t-norm. Satisf.
  - Weighted Antimonotone $(t+1)$-norm. Satif.

Damit:

Für jedes $t \geq 1$ existiert mind. 1 Problem in der Klasse $W[t]$.

Vermutung: $W[t] \neq W[t+1] \quad \forall t \geq 1$.

Allerdings sind die Probleme mit sehr hoher W'keit in FPT, $W[1]$, oder $W[2]$