ParA-VL 10

Kapitel 6 – Intractability

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Membership} \arrow[dr] & \\
\text{Komplexitätsklassen} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Vollständigkeit} \\
 & \text{Hardness} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Für NP:

Ein Problem ist in NP, wenn es einen nicht-determ. Algorithmus mit polynomieller Laufzeit gibt, der das Problem entscheidet.

NP-schwer

Es existiert eine (logspace-/polyzeit)-Reduktion von jedem Problem aus NP auf unser Problem

Reduktion

Ein Problem A kann auf Problem B reduziert werden, falls eine polyzeit berechenbare Fkt $f: A \to B$ existiert, sodass für alle Instanzen I von A gilt:

$$I \text{ ist ja-Instanz für } A \iff f(I) \text{ ist ja-Instanz für } B$$

Man schreibt auch $A \leq B$

Gäbe es einen Algorithmus, der B löst, hätte man über die Reduktion auch einen Algorithmus ~~fü~~ für A!

Andersherum:
Wenn man weiß, dass für A (potentiell) kein det. polyzeit Algorithmus existiert, kann durch die Reduktion auch kein det polyzeit Alg. für B existieren.

Vorteil:

Reduktionen sind transitiv:

$$A \leq B \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq C$$

Ziel: Finde ein Problem auf das sich alle aus NP reduzieren lassen: 3SAT ist NP-schwer.
$\Rightarrow$ Reduziere 3SAT auf andere Probleme, um dessen Schwere zu zeigen.

Sowas wollen wir auch für parametr. Probleme definieren.

Kapitel 6.1 – FPT-Reduktionen

Def. 6.1
Seien $A, B \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ param. Probleme. Eine param. Reduktion von A auf B ($A \leq_{FPT} B$) ist ein Algorithmus der jede Instanz $(x, k) \in A$ auf eine Instanz (x', k') abbildet, sodass

1. $(x,k) \in A$ ist ja-Instanz gdw. (x',k') ist ja-Instanz
2. $k' \leq g(k)$ für eine berechb. Fkt g
3. Laufzeit ist in $f(k) \cdot n^{O(1)}$ für eine berechenbare Fkt. f.

Theorem 6.2

Ist $A \leq_{FPT} B$ und $B \in FPT$, dann ist auch $A \in FPT$

Beweis: selbst.

Bsp:

Clique $\leq_{FPT}$ Independent Set (je parametrisiert nach deren Größe)

Für einen Graphen G, konstruiere Komplementgraphen $\overline{G}$, d.h. $\{u,v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{u,v\} \notin E(\overline{G})$, $V(G) = V(\overline{G})$

G $\qquad$ $\overline{G}$

Recht schnell zu sehen: G hat Clique mit $\geq k$ Knoten, gdw. $\overline{G}$ Ind. Set mit $\geq k$ Knoten besitzt.

Aus (G,k) wird also $(\overline{G},k)$ in Laufzeit $O(n^2)$

Da $\overline{\overline{G}} = G$, gilt auch Ind. Set $\leq_{FPT}$ Clique.

Recht üblich für NP-schwere:

Ind. Set $\leq$ Vertex Cover (normale Reduktion!)

Zu zeigen: G hat Ind. Set Größe k gdw.
G hat Vertex Cover Größe $n-k$

Also: $(G,k) \to (G, n-k)$ in Zeit $O(1)$

Gilt damit Ind. Set $\leq_{FPT}$ Vertex Cover?

Nein! $n-k$ ist keine nur von k abhäng. Fkt!

Die üblichen Reduktionen für NP-schwere funktionieren also nicht mehr unbedingt für par. Probleme.

$\Rightarrow$ Intuitiv könnte Ind. Set bzw Clique also schwerer sein als Vertex Cover!

Tatsächlich offen: Ist Ind. Set oder Clique in FPT?

Auch offen: Dom. Set $\leq_{FPT}$ Clique

Also Dom Set noch schwerer?

<u>Beispiel</u>

Betrachte Connected Dominating Set:

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, $k \in \mathbb{N}$

Param: k

Frage: Ex. Dominating Set DS der Größe k, sodass $G[DS]$ zusammenhängend ist?

Zeige:

Dom Set $\leq_{FPT}$ Conn. Dom Set

Beweis

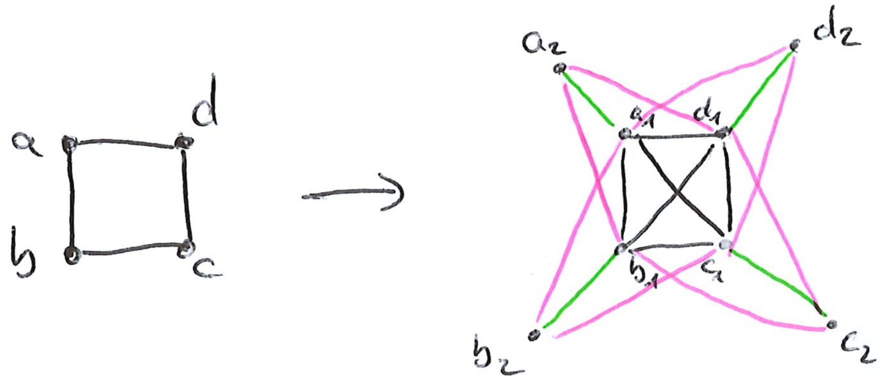
Sei (G, k) die Instanz für Dom. Set.

Konstruiere folgenden Graphen G':

(i) Für jeden Knoten $v \in V(G)$, erstelle zwei benachbarte Knoten v_1, v_2.

(ii) Die Menge $\{v_1 : v \in V(G)\}$ wird eine Clique K der Größe $|V(G)|$

(iii) Verbinde v_1 und u_2, wenn $\{v_1, u_2\} \in E(G)$.



Claim: (G, k) ist ja-Instanz gdw. (G', k) Ja-Instanz

"$\Rightarrow$" Sei $S = \{v^1, \dots, v^k\}$ ein Dom Set in G. Dann ist $S' = \{v_1^1, \dots, v_1^k\}$ ein Dom Set in G': v_1^i dominiert K; wenn in G u von v^i dominiert wird, dann wird u_2 von v_1^i dominiert (Eigenschaft (iii)).

Da $G'[S']$ eine Clique ist, ist S' verbunden.

"$\Leftarrow$" Sei S' ein con-Dom Set in G' mit $|S'| \leq k$.

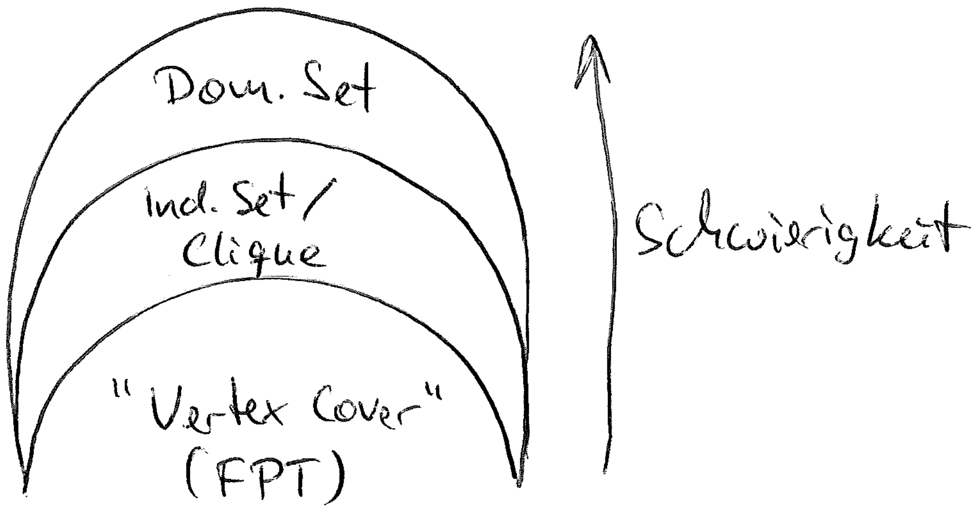
Konstruiere Dom Set S in G:

$$v \in S \Leftrightarrow v_1 \in S' \text{ oder } v_2 \in S'$$

$$\Rightarrow |S| \leq |S'| \leq k$$

Betrachte bel. Knoten u in G. u_2 in G' wird von einem Knoten v_1 oder v_2 dominiert. Nach Konstruktion muss dann v den Knoten u in G dominieren. Da $v \in S$ folgt, dass S ein Dom Set ist. $\square$

Wir haben drei Problemklassen:



Gibt es weitere Problemklassen? Wie lassen diese sich klassifizieren, welches "kanonische" Problem gibt es jeweils?