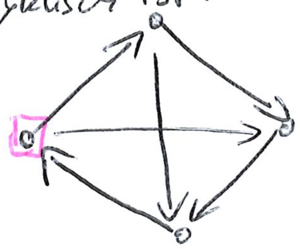
VL 08

Können k Knoten entfernt werden, sodass der übrige Graph azyklisch ist?



$k = 1$?

ja!

Formal: FVSTP (Feedback Vertex Set in Tournament Graphen Problem)

Gegeben: ~~Gra~~ Tournament Graph $T = (V, A)$, $k \in \mathbb{N}$

Frage: $\exists X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$, sodass $T \setminus V$ azyklisch?

Wie lösen wir das mit Iterative Compression?

Zunächst:

- Sei $T_i = (V_i, A_i) = T[V_i]$ der Tournament Graph auf den ersten i Knoten.
- T_k besitzt ein FVS der Größe k
- Angenommen T_i besitzt ~~eines~~. FVS X_i der Größe $\leq k$.
  Dann ist $X_i \cup \{v_{i+1}\}$ ein FVS in T_{i+1}.
- Gibt es in T_{i+1} ein FVS mit max k Knoten?
  ↳ Compressionproblem.

Können wir das Problem in Zeit $f(k) \cdot n^c$, können wir FVSP in Zeit $f(k)\, n^{c+1}$ lösen.

Für Compression:

Wir brauchen die Disjoint Variante von ~~FVSP~~ FVSTP, dann können wir ~~das~~ Compression in Zeit $\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} g(k)\, n^{O(1)}$ lösen, und

~~können wir~~ FVSP in Zeit $(1+\alpha)^k n^{O(1)}$ lösen, wenn $g(k) = \alpha^k$ für eine Konstante α.

↑ Laufzeit um disjoint Variante zu lösen.

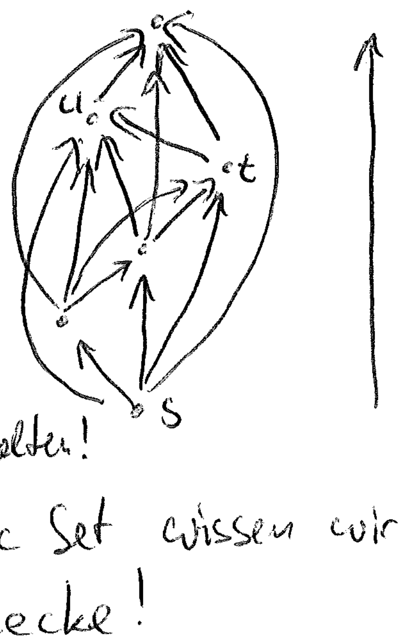
Was ist DFVSP:

Gegeben: Tournament Graph $T = (V, E)$, Lösung W mit $|W| = k+1$, Zahl $k \in \mathbb{N}$

Frage: Existiert FVS X in T mit $|X| \leq k$, $X \cap W = \emptyset$?

Zunächst: Wie sieht $T[V \setminus W]$ aus?

Wir können Knoten aus $V \setminus W$ so anordnen, dass gerichtete Kanten nur nach oben verlaufen.
↳ Ordnungsrelation $<$ auf Knoten



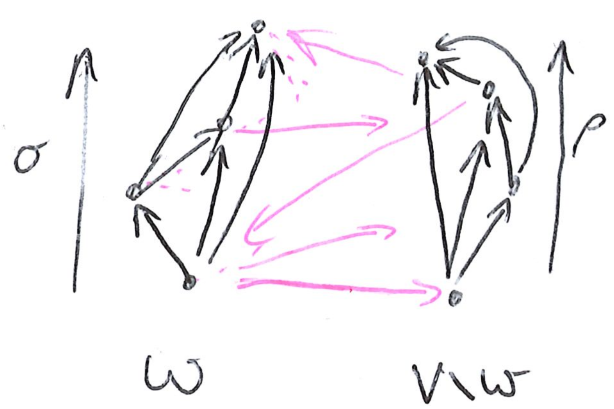
Ordnung der Knoten hier $s < t$, $t < u$, $s < u$

Gleiches muss auch für $T[W]$ gelten!

Außerdem: Von Feedback Arc Set wissen wir: konzentriere dich auf Dreiecke!

Das liefert direkt eine Reduktionsregel FVST1:
Sei $v \in V \setminus W$. Existieren $u, w \in W$, sodass (v, u, w) ein Dreieck bildet, lösche v und reduziere k um 1.

$\Rightarrow$ Jeder Kreis benutzt mind. zwei Knoten aus $V \setminus W$



Ordnung auf W:

$\sigma = (w_1, \dots, w_q)$

Ordnung auf $V \setminus W$:

$\rho = (v_1, \dots, v_r)$

$\rightarrow$ Füge soviele Knoten aus $V \setminus W$ in σ ein!

Wegen FVS 1 ist $T[W \cup \{v_i\}]$ für $1 \le i \le r$ azyklisch.

$\Rightarrow$ Jedes v_i hat einen Platz $p[v]$ in σ, ~~n~~ nämlich die Position der Ordnung von $W \cup \{v_i\}$.

$\Rightarrow$ $\cancel{\exists v_j}$: $\forall j < p[v_i]$ $\quad (w_j, v_i) \in A$ und

$\forall j \geq p[v_i]$ $\quad (v_i, w_j) \in A$

Also:

$$(v_i, w_j) \in A \Longleftrightarrow j \geq p[v]$$

Betrachte nun eine weiter Ordnung π

$$\Pi = (\underbrace{v_{\pi(1)}, v_{\pi(2)}}_{p[v]=1}, \underbrace{\dots}_{=2} \cdots, \underbrace{v_{\pi(r)}}_{=q+1})$$

innerhalb eines $p[v]=i$ Blocks sind Knoten wie in ρ geordnet.

Wir dürfen nun Knoten $B \subseteq V \setminus W$ zu W hinzufügen,

wenn: $\forall i,j \in B: \; i <_p j \Leftrightarrow i <_\pi j$

Um größtes B zu finden, muss das Longest Common Subsequence Problem gelöst werden!

↳ AuD 2

Das geht in Zeit $|V \setminus W|^2 \in O(n^2)$

$\Rightarrow$ FVSTP lässt sich in Zeit $O(2^k \cdot n^{O(1)})$ lösen.