VL 07 - ParA
Feedback Vertex Sets

Letztes Mal:

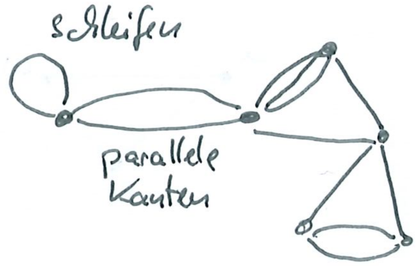
- Branche über ℓ Möglichkeiten, sodass jede Möglichkeit den Parameter verkleinert
- Laufzeit ist dann $\mathcal{O}(r(k) \cdot poly(n,k))$, wobei r die Anzahl an Knoten in dem Entscheidungs-/Möglichkeiten-Baum ist.
- $r(k) = r(k-d_1) + \ldots + r(k-d_\ell)$ mit $d_i \in \mathbb{N}_{>0}$
- Sonderfälle lassen sich gut bestimmen, ansonsten numerische Ansätze für $r(k)$ nutzen.

Heute 1-2 Beispielprobleme:

- Feedback Vertex Set

Gegeben: • ein Multigraph $G = (V, E)$
• $k \in \mathbb{N}$

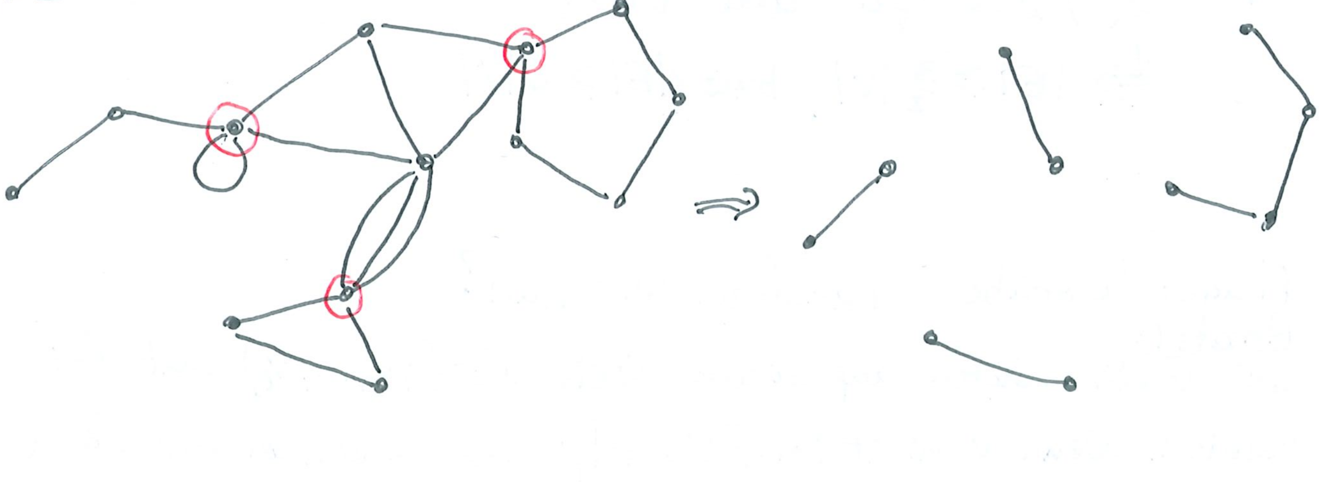
Frage: Ex. $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$, sodass $G \setminus V$ ein Wald ist (also kreisfrei)?



Schleifen oder 2 parallele Kanten sind ein Kreis!

Beispielgraph:

$k = 3$



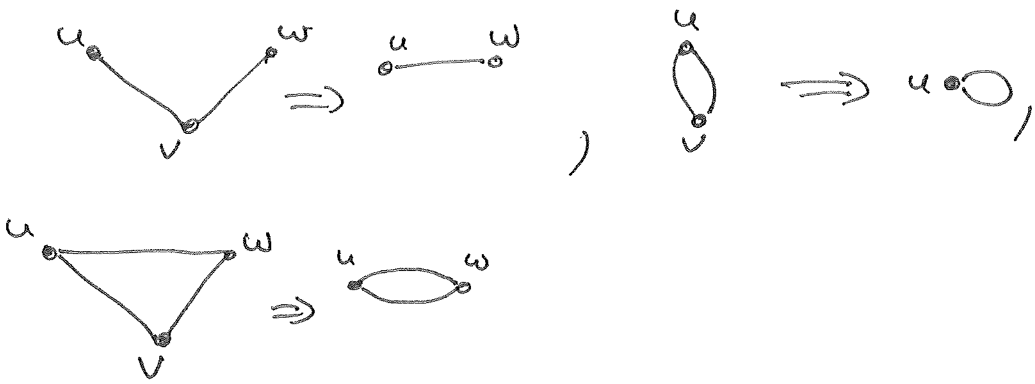
Können wir einfache Reduktionsregeln festhalten?

1. Ex Knoten v mit einem Loop: neue Instanz $(G \setminus \{v\}, k-1)$ (v muss im FVS sein!)

2. Ex. Knoten u, v mit mind 3 Kanten zw. u und v, lösche alle bis auf zwei Kanten.

3. Ex Knoten v mit $\delta(v) = 1$: neue Instanz $(G \setminus \{v\}, k)$ (v liegt auf keinem Kreis)

4. Ex. Knoten v mit $\delta(v) = 2$: lösche v von G und verbinde Nachbarn von v.



$\Longrightarrow$ Resultierender Graph hat 3 Eigenschaften:

(P1) Loop-frei

(P2) Besitzt nur einfache oder doppel-Kanten.

(P3) $\delta(v) \geq 3$ für alle $v \in V$.

$\quad \hookrightarrow |E| \geq \frac{3}{2}|V|$ bzw $2|E| \geq 3|V|$

Frage: Worüber branchen wir nun?

<u>Ansatz 1:</u>

Sei v ein Knoten auf einem Kreis $C = (v, v_1, \dots, v_\ell)$ mit $\ell+1$ Knoten. Wenn v nicht im FVS ist, muss es ein anderer der ℓ Knoten auf C sein. Problem: $\ell \in \Omega(n)$ möglich!

Ansatz 2:

Für ein FVS X muss $G \setminus X$ ein Wald sein. Besitzt also $\leq |V| - |X| - 1$ Kanten.

Um diesen Wert zu erhalten, müssen eher Knoten mit hohem Grad im FVS sein.

Sei $(v_1, \dots, v_n)$ die Ordnung der Knoten nach deren Grade.

Frage: Gibt es ein $K \in O(k)$, sodass mind. 1 Knoten aus $V_K = \{v_1, \dots, v_K)$ im FVS ist?

Zunächst:

Claim 3.7: Für jedes FVS X in G gilt

$$\sum_{v \in X} \delta_G(v) - 1 \geq |E_G| - |V_G| + 1$$

Da $F = G \setminus X$ ein Wald ist, besitzt er $\leq |V_G| - |X| - 1$ Kanten.

Jede Kante aus $E_G \setminus E_F$ ist zu Knoten aus X adjazent

$$\Rightarrow \sum_{v \in X} \delta(v) + |V_G| - |X| + 1 \geq |E_G| \qquad \square$$

Lemma 3.8:

Sei $V_{3k} = (v_1, \dots, v_{3k})$ wie oben beschrieben. Mind. ein Knoten aus V_{3k} ist im FVS.

Beweis

Angenommen, kein Knoten aus V_{3k} ist im FVS.

Dann muss für ein bel. FVS $X \subseteq V$ gelten:

$$\sum_{i=1}^{3k} \delta(v_i) \geq 3 \cdot \left(\sum_{v \in X} \delta(v) - 1 \right) \geq 3 \cdot (|E| - |V| + 1)$$

Für alle übrigen Knoten ($i > 3k$) gilt dann analog

$$\sum_{i>3k} \delta(v_i) - 1 \geq \sum_{v \in X} \delta(v) - 1 \geq |E| - |V| + 1$$

Zusammen ist

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(v) - 1 \geq \sum_{i=1}^{3k} \delta(v_i) - 1 + \sum_{i=3k+1}^{n} \delta(v_i) \geq 4\,(|E| - |V| + 1) > 4(|E| - |V|)$$

Da außerdem $\sum_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2|E|$ gilt

$$2|E| - |V| = \sum_{i=1}^{n} \delta(v) - 1 > 4\,(|E| - |V|)$$

$$\Longleftrightarrow 3|V| > 2|E| \qquad \lightning \quad 2|E| \overset{!}{\geq} 3|V|$$

$\square$

Theorem 3.9:

FEEDBACK Vertex Set lässt sich in Zeit $O((3k)^k \cdot \text{poly}(n))$ lösen.

Beweis

Betrachte die zu (G, k) äquivalente Instanz (G', k') nach Anwenden der Reduktionsregeln (leicht zu sehen: Polyzeit!)

- Falls $k' < 0$ $\Rightarrow$ Gib "nein" aus
- Falls $k' \geq 0$, G' ist leerer Graph $\Rightarrow$ Gib "ja" aus.
- Sonst:

  G' besitzt nur Knoten von Grad ≥ 3

  Nach Lemma 3.8 existiert ein Knoten in $V_{3k'}$, welcher in einem FVS ist.

  $\Rightarrow$ Branche über alle $3k$ Möglichkeiten.

Der Baum hat dann $r(k') = 3k' \cdot r(k'-1)$, $\Rightarrow r(k') = (3k')^{k'} \leq (3k)^k$ Knoten. $\square$