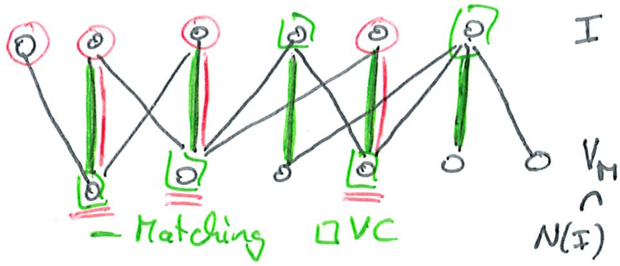
ParA VL05

Beweis Lemma 2.26

1.) Berechne ein inklusionsmaximales Matching M in G.
Ist $|M| \geq k+1$, sind wir fertig.
Betrachte also $|M| \leq k$

z.B. per Greedy-Algorithmus.

2.) Seien V_M die Endknoten der Kanten in M,
sei $I = V \setminus V_M$.
Nach Konstruktion muss I eine unabhängige Menge sein.
Bestimme ein kardinalitätsmaximales Matching M' mit Kanten zwischen I und V_M.
Ist $|M'| \geq k+1$, sind wir fertig.
Sei also $|M'| \leq k$.



3.) ~~Setze $C := I \cap V_{M^*}$, $H \in V_M \cap V_{M^*}$, $R = V \setminus (C \cup H)$~~
Nach Satz von König existiert VC X der Größe $|X| = |M'|$
Wir zeigen zunächst: $\exists v \in X \cap V_M$
Angenommen, es ex. kein $v \in X \cap V_M$, dann ist $X \subset I$. Wir zeigen, dass $X = I$. Dazu nehmen wir an, es ex. $w \in I \setminus X$. Da G keine isolierten Knoten besitzt, gibt es eine zu w inz. Kanten, die dann nicht abgedeckt wäre $\Rightarrow X = I$. $\Rightarrow |I| = |X| \leq k$
$\Rightarrow |I| + |V_M| \leq k + 2k = 3k$ ↯ (Wir haben $|V| \geq 3k+1$)
$\Rightarrow \exists v \in X \cap V_M$

4.) Sei $M^* \subseteq M'$, sodass jede Kante einen Endpunkt in $V_M \cap X$ besitzt.
Setze nun $H = X \cap V_{M^*}$, $C = (N(H) \cap I) \setminus X$, $R = V \setminus (H \cup C)$

Nun zu zeigen: (C, H, R) ist eine Kronenzerlegung

a) Da $|V| > 2k$ muss in I mind. 1 Knoten sein, welcher nicht isoliert sein kann $\hookrightarrow |C| \geq 1$

b) Da $C \subset I$, ist C eine unabh. Menge

c) Allen Kanten, die aus C herausführen, werden nach Konstruktion von H gecovert $\Rightarrow \nexists$ Kanten von C nach R.

d) Das Matching M^* überdeckt H.

$\Rightarrow$ Wir haben eine Kronenzerlegung gefunden. $\square$

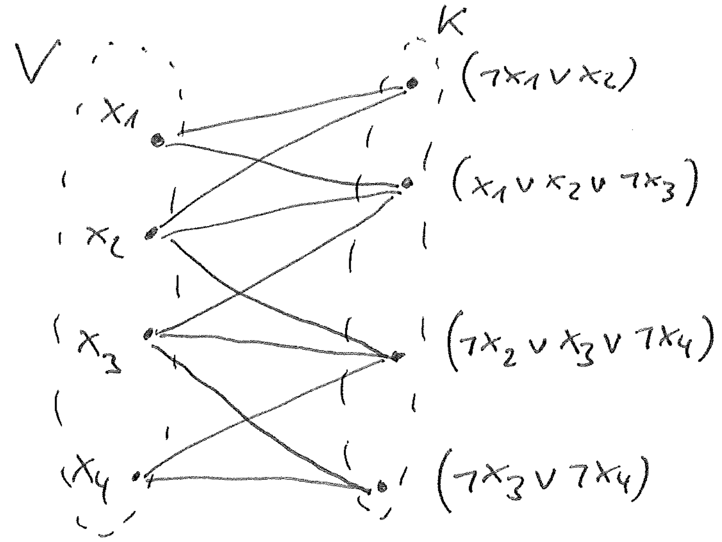
|ParA-VL5|

Beweis Theorem 2.30

Falls $m > 2k$, können wir Lemma 2.29 nutzen: Es ist eine ja-Instanz.
Wir müssen also nur $m \leq 2k$ betrachten.

~~Sei nun …~~ Betrachte den Variablen-Klausel-Inzidenz-Graph G_φ einer Formel φ:

- Jede Klausel und jede Variable wird durch einen Knoten repräsentiert. Seien K und V die Knotenmengen der Klauseln/Var.
- Es existiert eine Kante $\{u,v\}$, wenn die zu u gehörige Variable in der zu v gehörigen Klausel auftaucht (negativ oder positiv)



Angenommen, es gibt ein V überdeckendes Matching ~~K~~

- Falls $k \leq |V|$, ist es eine ja-Instanz. Jede Variable erfüllt die zugewiesene Klausel.
- Falls $k > |V|$, haben wir den gewünschten Kernel.

Angenommen, es gibt kein V überdeckendes Matching.
Da für $k > |V|$ der gew. Kernel erreicht ist, können wir $k \leq |V|$ annehmen.

Da kein Matching V überdecken kann, existiert eine kleinste Menge $C \subseteq V$ mit $|N(C)| < |C|$. Setze nun

- $H := N(C)$
- $R := V(G_\varphi) \setminus (C \cup H)$

<u>Behauptung:</u> (C, H, R) ist eine Kronen-Zerlegung.

1. $C \neq \emptyset$ Garantiert uns Satz von Hall.
2. $C \subseteq V \Rightarrow$ es ex. keine Kanten unter $C \Rightarrow C$ ist eine unabhängige Menge
3. Es existiert keine Kante von C nach R, da alle Nachbarn von C in H liegen.
4. Es existiert ein H überdeckendes Matching mit Kanten zw. C und H:

   Sei $x \in C$ beliebig. Da C minimal ist, muss es ein $C \setminus \{x\}$ überdeckendes Matching geben.

   Da $|C| > |H|$, ist ~~$|C| \geq |H|$~~ $|C \setminus \{x\}| \geq |H| \Rightarrow$

   Es ist auch ein H überdeckendes Matching.

<u>Behauptung:</u> (φ, k) ist eine ja-Instanz, gdw. $(\varphi \setminus H, k - |H|)$ ist eine ja-Instanz.

Wir beweisen dazu: In jeder maximalen erfüllenden Belegung sind die Klauseln aus H immer erfüllt.

Annahme, es gibt eine Belegung, sodass es ein $c \in H$ gibt, das nicht erfüllt ist. Die Kronenzerlegung oben zeigt, dass wir eine Variable finden können (in C), welche c erfüllt. Die Belegung war also nicht max. erfüllend. $\square$