



Technische  
Universität  
Braunschweig

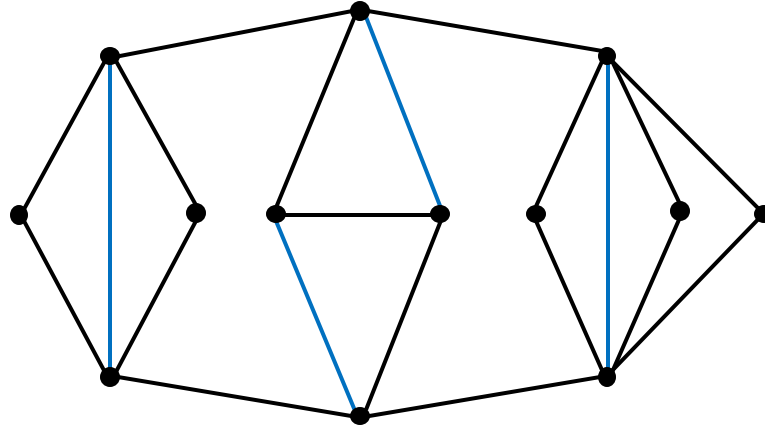


# Parametrisierte Algorithmen

Arne Schmidt

# Recap: Matchings

# Matchings

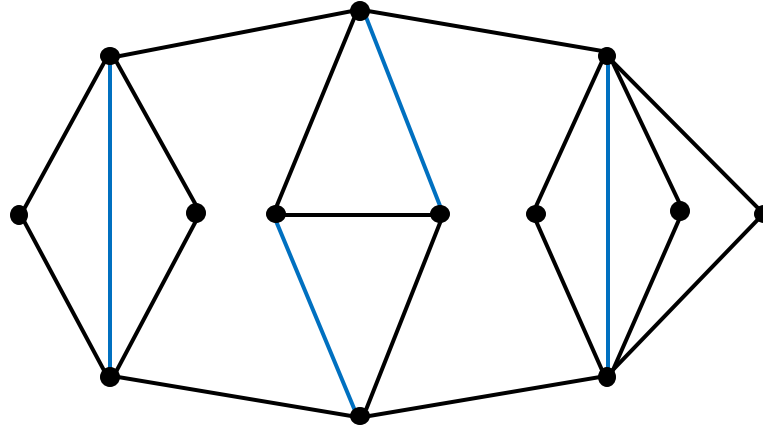


Inklusionsmaximal: Keine Kante hinzufügbar.

Kardinalitätsmaximal: Das absolut größte Matching

Beide Varianten liefern untere Schranke für die Größe eines Vertex Covers!

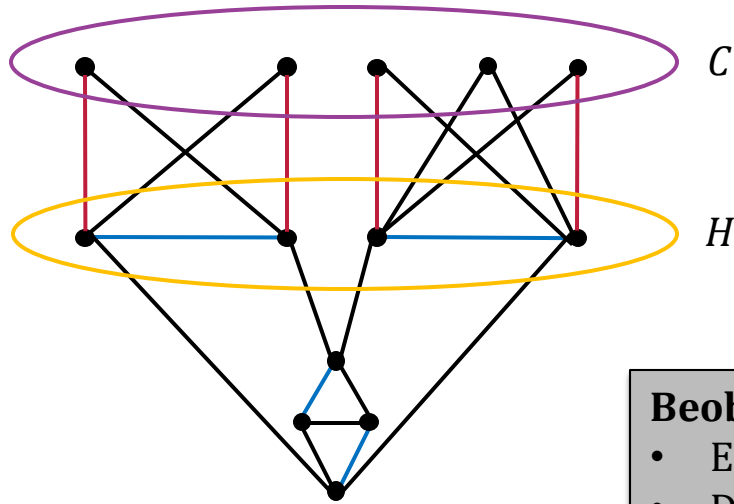
# Matchings – Unabhängige Knoten



## Beobachtung:

Alle Knoten, die nicht gematcht sind, sind untereinander nicht verbunden!

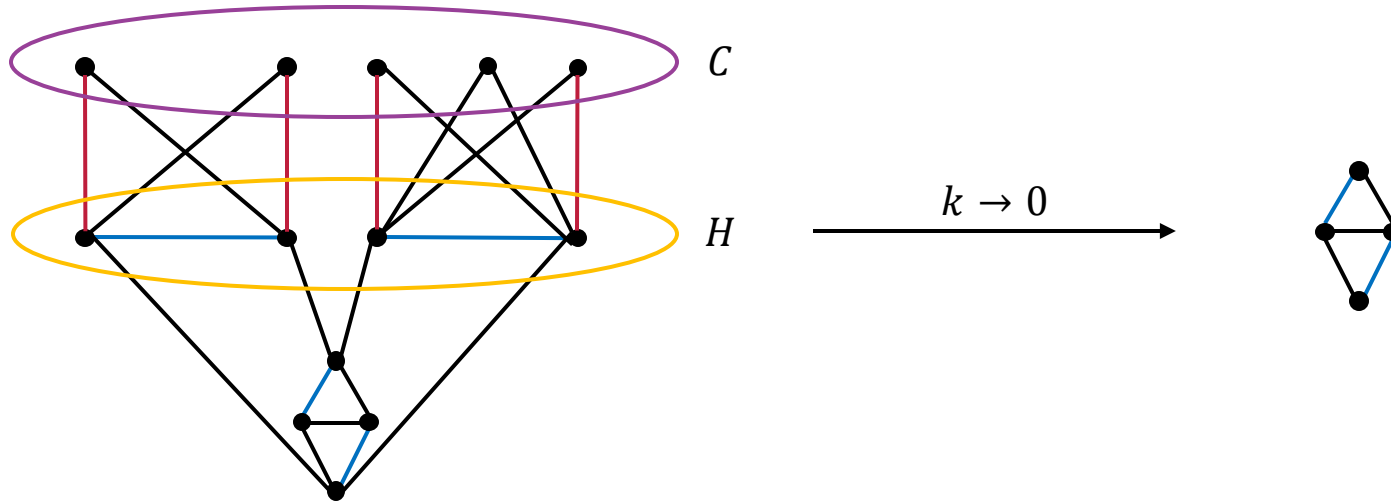
# Andere Darstellung



## Beobachtungen:

- Es existiert ein bipartiter Graph mit Knoten aus  $C$  und  $H$ .
- Dort existiert  $H$  überdeckendes Matching (rote Kanten)
- Knoten in  $H$  bilden Vertex Cover minimaler Größe.
- Knoten in  $H$  decken mehr ab als jede andere Kombination aus  $H \cup C$ .
- Knoten in  $H$  müssen im kompletten Graphen im VC sein!

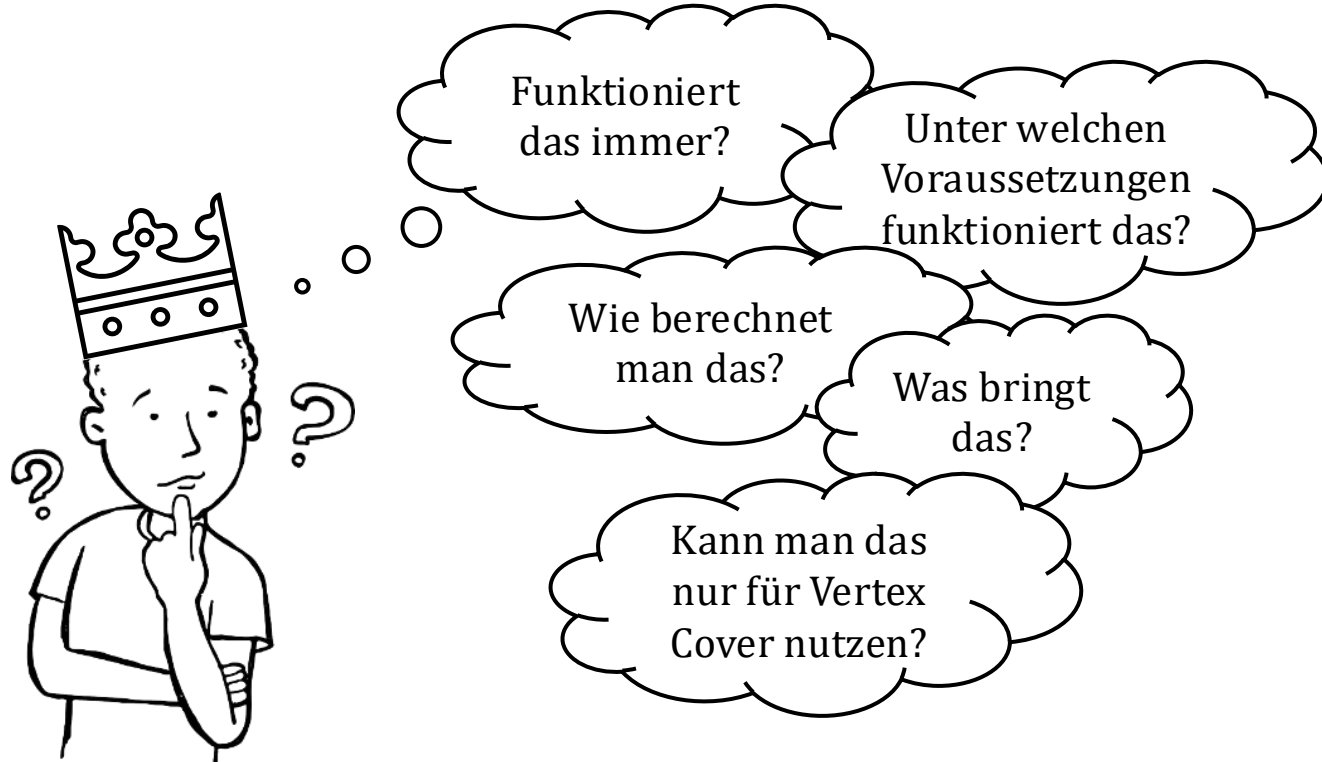
# Restgraph



## Beobachtung:

- Im Restgraphen ist kein VC der Größe 0 möglich.

# Fragen



## Kapitel 2.4 – Crown Decomposition

# Crown Decomposition

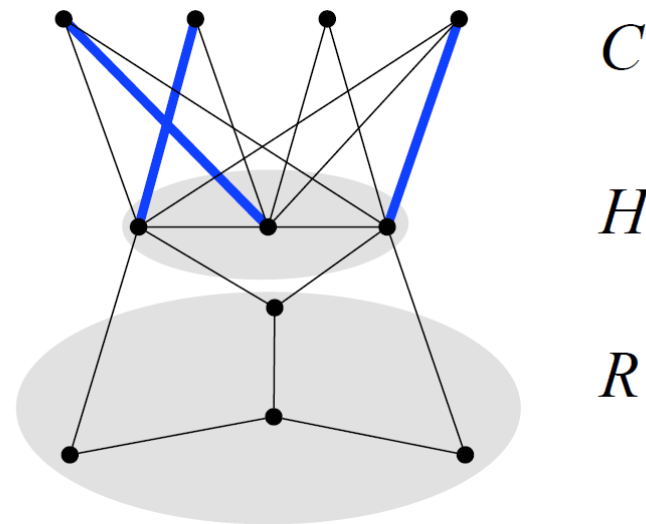
## Definition 2.25

Eine Kronzerlegung (engl. **Crown Decomposition**) eines Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Zerlegung von  $V$  in drei Mengen  $C, H, R \subseteq V$ , sodass

1.  $C \neq \emptyset$
2.  $\forall u, v \in C: \{u, v\} \notin E$
3.  $\forall u \in R, v \in C: \{u, v\} \notin E$
4. Sei  $E' = \{ \{u, v\} \mid u \in C, v \in H \}$ , dann existiert ein  $H$  überdeckendes Matching.

## Bemerkung:

Eine Zerlegung einer Menge teilt die Menge in disjunkte Mengen.



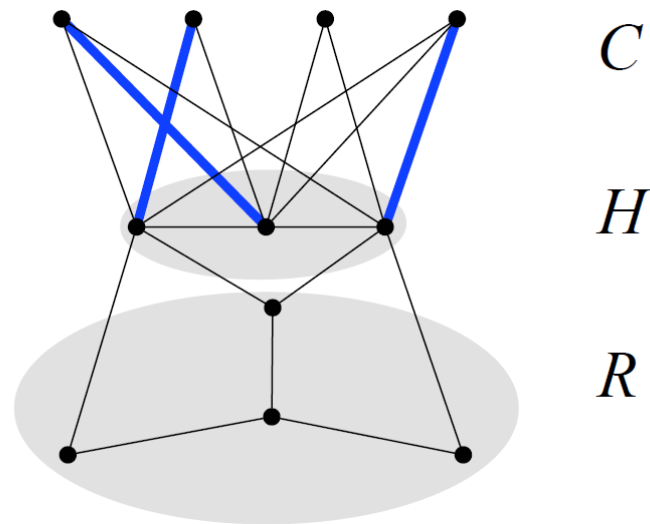
# Crown Decomposition

### Lemma 2.26 (Kronen-Lemma)

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph ohne isolierte Knoten und  $|V| \geq 3k + 1$ . Es existiert ein Poly.-Zeit-Algorithmus, welcher

1. entweder ein Matching der Größe  $k + 1$ ,
2. oder eine Crown Decomposition von  $G$  bestimmt.

## Beweis: Tafel!



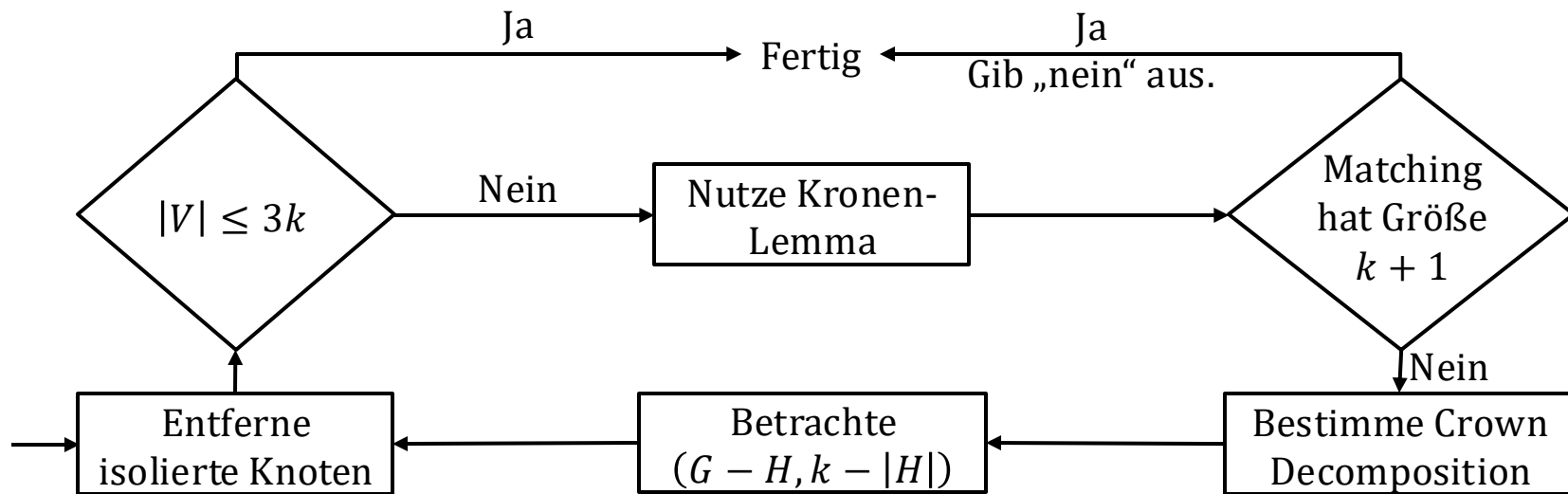
## Kapitel 2.4.1 – Vertex Cover

# Neuer Kernel für Vertex Cover

## Theorem 2.27

Vertex Cover besitzt einen Kernel der Größe  $3k$ .

Beweisskizze:



## Kapitel 2.4.2 – Maximum Satisfiability

# Maximum Satisfiability

## Problem 2.28

### Gegeben:

- Eine aussagenlogische Formel  $F$  in CNF mit  $m$  Klauseln und  $n$  Variablen
- Zahl  $k \in \mathbb{N}$

**Frage:** Gibt es eine Wahrheitsbelegung  $\psi$  der Variablen, sodass mind  $k$  Klauseln erfüllt sind?

$$F = (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg z)$$

### Beobachtung:

- Ist  $x = \text{true}$ , können die letzten beiden Klauseln nicht erfüllt werden.
- Ist  $x = \text{false}$ , können die ersten beiden Klauseln nicht erfüllt werden.
- $x$  kommt in jeder Klausel vor, d.h. entweder  $x = \text{true}$ , oder  $x = \text{false}$  erfüllt  $\frac{m}{2}$  Klauseln.

# Hilfslemma

$$F = (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg z)$$

## Lemma 2.29

Gilt  $2k \leq m$ , dann ist die Instanz  $(F, k)$  immer eine Ja-Instanz.

### Beweis:

- Sei  $\psi$  eine beliebige Belegung der Variablen und  $\neg\psi$  das Komplement der Belegung.
- Jede Klausel wird von  $\psi$  oder  $\neg\psi$  erfüllt.
- Damit erfüllt  $\psi$  oder  $\neg\psi$  mindestens  $\frac{m}{2}$  viele Klauseln.
- Ist also  $k \leq \frac{m}{2}$ , bzw.  $2k \leq m$ , dann ist die Instanz eine Ja-Instanz.

# Kernel für Maximum Satisfiability

$$F = (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (z \vee \neg x) \wedge (\neg x \vee \neg z)$$

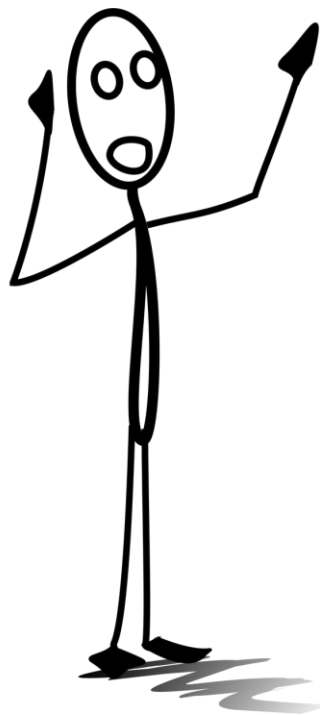
## Theorem 2.30

Maximum Satisfiability besitzt einen Kernel mit  $n \leq k$  Variablen und  $m \leq 2k$  Klauseln.

**Beweis:**

Tafel

# Kernelization mit Crown Decomposition



Die Nutzung der Crown Decomposition  
erfordert Analyse!

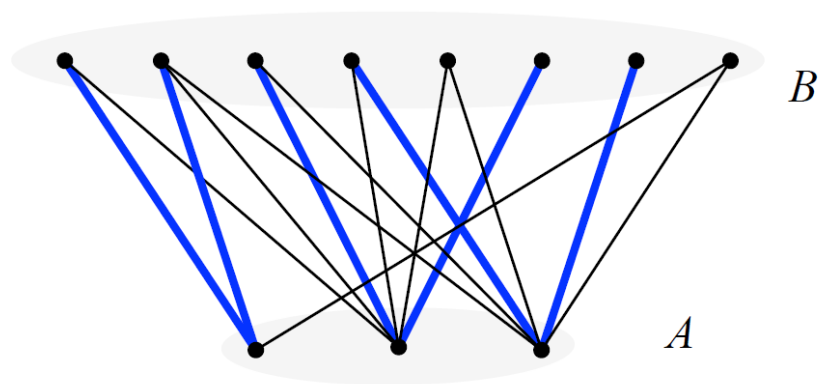
Wie lässt sich ein Problem mit Graphen lösen?

Wie finde ich in dem Graphen die Zerlegung?

Wie hilft mir die Zerlegung?  
Ist die abgeleitete Reduktionsregel sicher?

## Kapitel 2.5 – Ausblick

# Kernelisationstechniken



„Expansion“

Verallgemeinerung der  
Crown Decomposition

minimize  $\sum_{v \in V(G)} x_v$   
subject to  $x_u + x_v \geq 1$  for every  $uv \in E(G)$ ,  
 $0 \leq x_v \leq 1$  for every  $v \in V(G)$ ,  
 $x_v \in \mathbb{Z}$  for every  $v \in V(G)$ .

„Linear Programming“

## Theorem 2.31

Vertex Cover besitzt einen  
Kernel mit maximal  $2k$  Knoten.