ParA - VL04

Beweis Satz 2.23

"$\Rightarrow$": Trivial. Angenommen, $\exists X : |N(x)| < |X|$, dann kann nach Schubfachprinzip nicht jedes Element aus X einem Element aus $N(x)$ zugewiesen werden.

"$\Leftarrow$" Angenommen, G besitzt kein V_1 überdeckendes Matching, d.h. $|M| < |V_1|$ für jedes maximale Matching. Nach Satz 2.17 ist auch $|U| < |V_1|$ für ein minimales Vertex Cover U.
Betrachte nun $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ mit $U := U_1 \cup U_2$
Dann gilt $N(V_1 \setminus U_1) \subset U_2$.
Damit ist aber

$$|N(V_1 \setminus U_1)| \leq |U_2| < |V_1| - |U_1| = |V_1 \setminus U_1|$$

Das ist ein Widerspruch zur Bedingung des Satzes! $\square$