B.

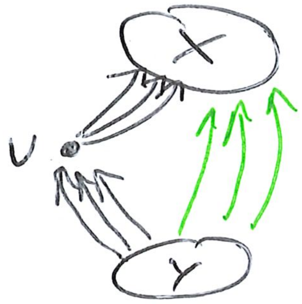
Beweis Lemma 2.9

Regel Fast1: klar

Regel FAST 2:

Sei v ein Knoten, welcher auf keinem Dreieck liegt.

Sei $X := N^+(v)$, $Y := N^-(v)$.



Dann ex. keine Kante von X nach Y.

Damit ~~ist~~ ergibt ein FA-set A_1 in X und ein FA-set A_2 in Y ein FA-set $F := A_1 \cup A_2$ in D.

Außerdem ~~ex~~ ergibt ein FA-set F in D ein FA-set in X (nämlich $A(X) \cap F$) und in Y $(A(Y) \cap F)$. $\square$

Beweis Th. 2.10

Laufzeit lassen wir aus. Wir zeigen die gewünschte Größe des Kernels.

Sei F ein FA-set in D. Wegen FAST2 liegt jeder Knoten auf einem Kreis, welche eine Kante aus F besitzen.

Jede Kante $e=(u,w)\in A$ liegt wegen FAST1 auf maximal k Kreisen.

Diese Kreise besitzen zusammen $k+2$ Knoten.

Für $|F| = k$ sind dies maximal k^2+2k Knoten.

Beweis Lemma 2.12

ECC1: Klar. Ein isolierter Knoten enthält keine Kanten und kann damit nicht Teil einer Clique werden.

ECC2: Auch klar. Die Kante muss abgedeckt werden. Das geht nur, wenn die ~~End~~ Knoten der Kante die Clique bilden

ECC3: Angenommen, wir haben eine Lösung $C_1, \dots, C_k$ im Graphen G ohne v.

Sei C_i eine Clique, welche u enthält.
(Nach Voraussetzung muss eine solche existieren)
Dann ist, weil $N[v] = N[u]$, auch $C_i \cup \{v\}$ eine Clique.
Wir können also v zu jeder Clique hinzufügen, in der auch u liegt ohne die Anzahl der Cliquen zu erhöhen.
Damit ist die Kante $\{u, v\}$ abgedeckt, sowie jede andere an v liegende Kante, da auch jede Kante an u abgedeckt ist.

Beweis Th. 2.13

Wir zeigen zunächst:
wenn (G, k) eine Ja-Instanz ist, dann gilt $|V| \leq 2^k$, sobald keine der genannten Regeln anwendbar ist.

Sei dazu $C_1, \dots, C_k$ ein ECC von G.
Angenommen, $|V| > 2^k$.
Betrachte einen Vektor b_v für jeden Knoten $v \in V$ mit k Binäreinträgen, ob Knoten v in Clique $1 \leq i \leq k$ vorkommt.
Es kann nur 2^k verschiedene Vektoren existieren.
Damit muss es zwei Knoten $u, v \in V$ mit $b_u = b_v$ geben.
Falls b_u ein Null-Vektor ist (alle Einträge false), dann können wir ECC1 anwenden.

Andernfalls sind u und v in den selben Cliquen vertreten.

$\Rightarrow \{u, v\} \in E$ und $N[u] = N[v]$

$\Rightarrow$ Regel ECC2 oder ECC3 kann angewendet werden

Es ist also immer eine Regel anwendbar $\lightning$

$\Rightarrow |V| \leq 2^k$

Der Kernel arbeitet nun folgendermaßen:

1) Führe Regeln ECC1, ECC2, ECC3 so lange wie möglich aus
2) Falls $|V| > 2^k$, gib "Nein" aus
3) Sonst gib die Reduzierte Instanz zurück. $\square$