ParA - VL 02

Beweis Th. 2.3

"$\Leftarrow$": Klar. Sei $f_A(I,k)$ die Laufzeit, um aus der Instanz $(I,k) \in Q$ die Instanz (I',k') zu erzeugen.
Nach Voraussetzung ist

$$f_A(I,k) \in \text{poly}(I,k) \text{ und } |I'|+k' \le g(k)$$

(polynomielle Laufzeit)

Ein Algorithmus B, der Instanzen von Q löst, habe Laufzeit $f_B(|I|,k)$.
Damit benötigt B auf (I',k') Zeit $f_B(|I'|,k) \le f_B(g(k),k')$
$\le g^*(k)$ für eine berechenbare Funktion g^*.

A und B haben somit eine Laufzeit von

$$\mathcal{O}(\text{poly}(I,k) + g^*(k)) \Rightarrow Q \in FPT$$

"$\Rightarrow$": Da $Q \in FPT$, existiert ein Algorithmus A mit Laufzeit $f(k) \cdot |I|^c$, $c \in \mathbb{N}$, welcher Q korrekt entscheidet. Wir konstruieren einen Kernel wie folgt:

Benutze A für $|I|^{c+1}$ Schritte.
a) Falls A terminiert: Produziere eine triviale Ja/Nein-Instanz.
b) Falls A nicht terminiert: Gib Instanz (I,k) zurück

Im Falle b) gilt $f(k)|I|^c > |I|^{c+1} \Rightarrow f(k) > |I|$
$\Rightarrow |I|+k \le f(k)+k$, also ein gültiger Kernel. $\square$

Beweis Lemma 2.4

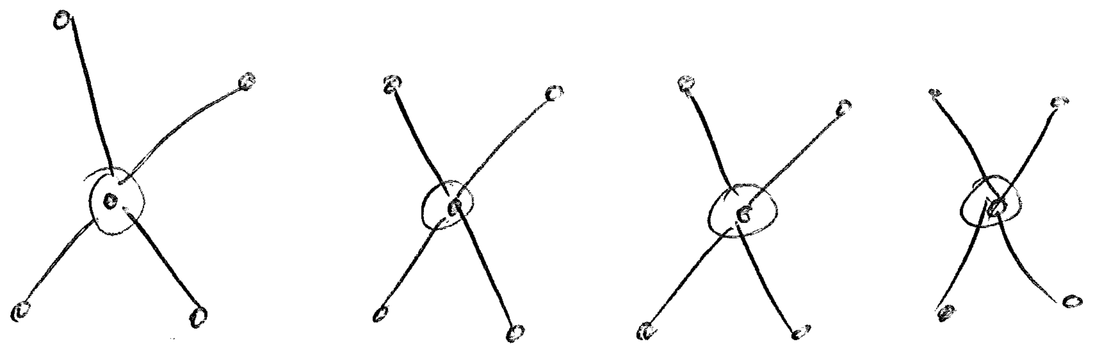
Nach Regel VC 1 existieren keine isolierten Knoten. Jeder Knoten besitzt also mind. ein Kante.

Nach Regel VC 2 ist jeder Grad maximal k. Damit können k Knoten maximal k^2 Kanten überdecken $\Rightarrow |E(G)| \leq k^2$

Jeder der k Knoten im Vertex Cover kann maximal k Nachbarn besitzen. Damit ist

$$|V(G)| \leq \underset{\substack{\text{Größe}\\ \text{VC}}}{k} \cdot (\underset{\substack{\text{\#Nach-}\\ \text{barschaft}}}{k} + \underset{\substack{\text{VC}\\ \text{knoten}\\ \text{selbst}}}{1}) = k^2 + k$$

$\square$



VC der Größe 4

Beweis Lemma 2.6

Sei $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ ein ger. Kreis minimaler Länge.

Angenommen ~~die~~ $k > 3$, d.h. die Länge des Kreises ist mind. 4.

Dann muss aber für jedes $i \in \{3, \ldots, k-1\}$ die Kante (v_1, v_i) existieren. Andernfalls wäre $(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_1)$ ein kleinerer Kreis. ↯ Widerspruch zur Annahme

Damit ist aber (v_1, v_{k-1}, v_k, v_1) ein ger. Kreis der Länge 3. $\square$

Beweis Lemma 7.8.

Zunächst sei $D \circledast F$ der ~~Tournament~~ ger. Graph, der entsteht, wenn die Kanten aus F umgedreht werden, d.h. $D \circledast F = (V, (A \setminus F) \cup \underbrace{\{(v,u) \mid (u,v) \in F\}}_{rev(F)})$.

"$\Rightarrow$" Sei F ein inkl. minimales Feedback-Arc-Set.

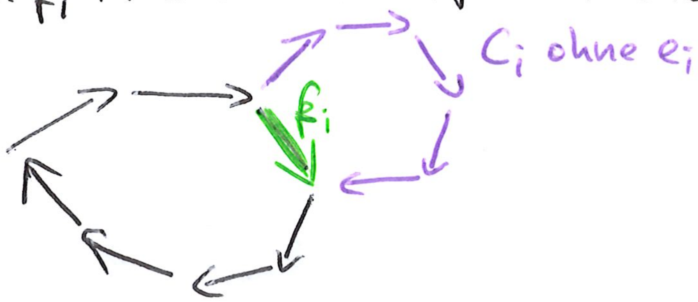
Angenommen, $G \circledast F$ sei nicht azyklisch. Sei C ein Kreis in $G \circledast F$. Dann muss C Kanten aus $rev(F)$ benutzen (andernfalls wäre F kein FAS)

Seien $f_1, \dots, f_\ell \in C \cap rev(F)$ in der Reihenfolge, wie sie auf C erscheinen. Sei e_i die umgekehrte Kante von f_i

Da F inklusionsminimal ist, gilt für jede Kante $e_i \in F$

$\exists$ Kreis C_i in G mit $F \cap C_i = \{e_i\}$.

$\Rightarrow$ Wir können f_i in C mit dem Pfad $C_i \setminus \{e_i\}$ ersetzen.



$\Rightarrow$ Wir erhalten einen neuen Kreis, welcher weniger Kanten aus $rev(F)$ benutzt

$\Rightarrow$ Wiederhole Vorgehen

$\Rightarrow$ $\exists$ Kreis in G ohne Kanten aus F

$\Rightarrow$ F ist kein FAS

Beweis 2.8 (fort.)

Damit gilt:

Ist $G \circledast F$ azyklisch, gdw. ist F ein Feedback-Arc-Set. (1)

Ist F also keine kleinste Menge, sodass $G \circledast F$ azyklisch, dann kann auch F keine kleinste FAS sein.

"$\Leftarrow$"

Sei F eine inkl.-minimales Menge von Kanten, sodass $G \circledast F$ azyklisch ist. Nach (1) muss F ein kleinstes FAS sein.