Para-Übung 5

Iterative Compression für $\overset{d-}{3}$-Hitting-Set:

Welches Problem müssen wir prinzipiell nur lösen?

$\Rightarrow$ Disjoint $\overset{d}{3}$-Hitting Set ($D\overset{d}{3}HS$)

Gegeben: $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathcal{F} \subseteq P(U)$ mit $|F| \leq \overset{d}{3}$ $\forall F \in \mathcal{F}$, $k \in \mathbb{N}$,
$H \subseteq U$ mit H ist Hitting Set und $|H| = k+1$

Gesucht: Existiert Hitting Set $H' \subsetneq U \setminus H$ mit $|H'| \leq k$?

Dazu: Welche Form hat jedes $F \in \mathcal{F}$, wenn Elemente aus H ausgeschlossen sind?

Sie enthalten max $\overset{d-1}{2}$ Elemente. $D(d-1)HS$

Können wir das lösen? Ja! Das ist Vertex Cover, für welches wir einen $O(1{,}4656^k \, n^{O(1)})$-Algo kennen!

$O((d-1+0{,}4656)^k \, n^{O(1)})$-Algo

Damit erhalten wir folgenden Alg. für $\overset{d}{3}$-HS.

Sei $\overset{d}{3}HS_i = (U_i, \mathcal{F}_i, k)$ die $\overset{d}{3}HS$-Instanz mit den ersten i Elementen ~~und~~ und den Mengen, die nur Elemente aus U_i nutzen.

1. $H = U_k$
2. Für $i = k+1$ bis n:
   a) $H = H \cup \{u_i\}$
   b) Für $\emptyset \neq H' \subseteq H$:
      (i) Ist $D\overset{d}{3}HS(\overline{U}_i, \overline{\mathcal{F}}_i, \underbrace{\overline{k}}_{k-|H|+|H'| = |H'|-1}, H')$ lösbar? Sei $\overline{H}$ die Lsg.

      $\overline{U}_i = (U_i \setminus H) \cup H'$

      $\overline{\mathcal{F}}_i = \mathcal{F}_i \setminus \{F \in \mathcal{F} \mid \exists u \in F: u \in H \setminus H'\}$

      Falls ja, $H = (H \setminus H' \cup \overline{H})$
      break;

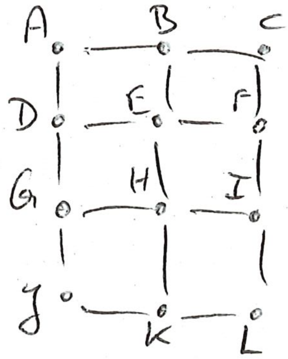
3) Falls $|H| \le k$, return true (und H)

Laufzeit: $O\left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} \cdot \overset{d-2}{1{,}4656}^{\,k-i} \cdot n^{O(1)}\right)$ (nach Korollar 4.11)

$= O\left(\overset{d-1}{2{,}4656}^{\,k} \cdot n^{O(1)}\right) \longrightarrow O\left((d-1+0{,}4656)^{k} \cdot n^{O(1)}\right)$

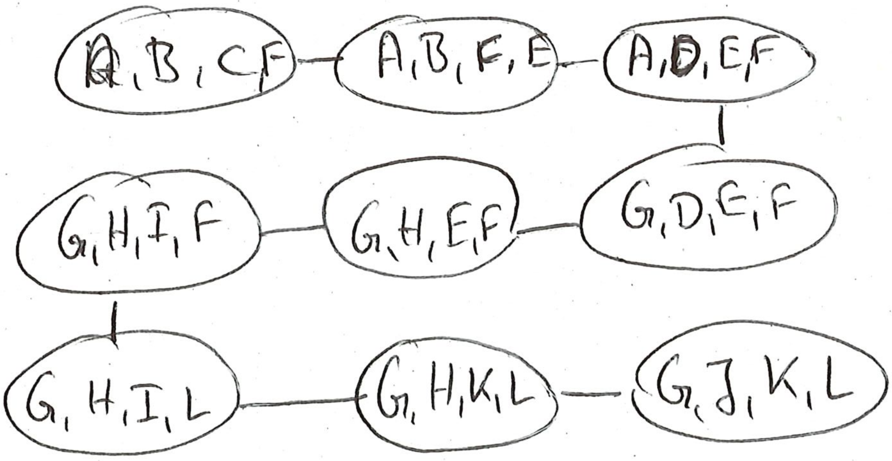
Verallgemeinerung für d-Hitting-Set

Tree-Width



Bestimme die Baum-Weite des Gittergraphen $G_{3\times 4}$.

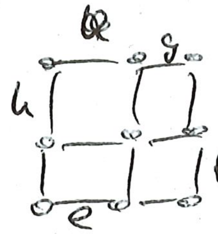
~~tw~~ $tw(G_{3\times 4}) \geq 3$:



Bag size $\le 4 \Rightarrow tw \le 3$

$tw(G_{3\times 4}) \geq 3$:

Betrachte 3x3 Gitter



Kontrahiere e, f, g und h:

Über Kantenkontraktion erhalten wir den K_4 aus dem $G_{3\times 3} \subseteq G_{3,4}$

$tw(K_4) = 3$

$\underbrace{tw(G_{3\times 4}) \geq tw(G_{3\times 3}) \geq}_{\text{Graph-Minor-Theorem}} tw(K_4) = 3$

$\Rightarrow tw(G_{3\times 4}) \geq 3$

Wie ist das allgemein für $G_{a,b}$?

Behauptung: $tw(G_{a,b}) = \min(a,b)$

"$\leq$" Sei $a \leq b$ $\quad a\left\{\overbrace{\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 7 & \cdot & \cdot \\ 2 & 5 & 8 & \cdot & \cdot \\ 3 & 6 & 9 & \cdot & \cdot \end{array}}^{b}\right.$

Nummeriere Knoten spaltenweise.

Dann ist der i-te Bag $B_i \{i, i+1, ..., i+a\}$ mit $|B| = a+1$

Der Bag B_i deckt damit die Kanten von i nach "unten" und "rechts" ab. Kanten nach links und oben wurden von kleineren i bereits abgedeckt.

$\Rightarrow$ Verbinde Bags B_i und B_{i+1}

$\Rightarrow$ Tree Decomp ist ein Pfad mit

Bag größe $\leq a$

[Falls $a > b$, tausche Rollen von a und b]

$\Rightarrow tw(G_{a,b}) \leq \min(a,b)$

"$\geq$" Einen $K_{\min(a,b)}$ zu finden scheint schwer.

Es gibt aber andere Strukturen, die man Nutzen kann.

$\boxed{\text{Exkurs}}$

<u>Brambles</u>

Sei G ein Graph. Zwei Mengen $A, B \subseteq V(G)$ <u>berühren sich</u>, falls $A \cap B \neq \emptyset$ oder $\exists \{u,v\} \in E(G)$ mit $u \in A$, $v \in B$.

Ein <u>Bramble</u> $\mathcal{B}$ eines Graphen G ist eine Mengen von zusammenhängenden Knotenmengen $V_1, \ldots, V_{|\mathcal{B}|}$ mit V_i, V_j berühren sich für alle $i \neq j$

Die <u>Ordnung von $\mathcal{B}$</u> ist die Größe eines kleinsten Hitting Sets von $\mathcal{B}$.

<u>Theorem:</u>

$\exists$ Bramble der Ordnung $k+1$ in G, dann gilt $tw(G) \geq k$

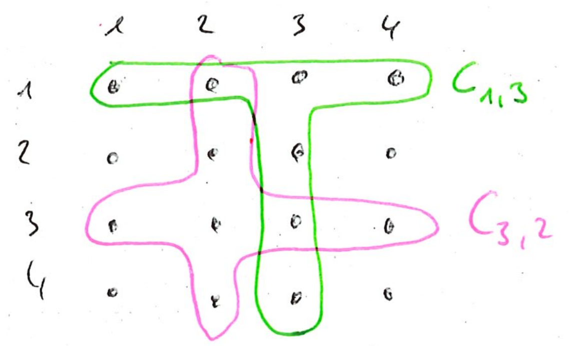
Zurück zu $G_{a,b}$. Da wir zeigen wollen $tw(G_{a,b}) \geq \min(a,b)$, konzentrieren wir uns auf $tw(G_{a,b}) \geq tw(G_{a,a}) \geq a$ für $a \leq b$ (analog $b > a$)

Frage: Existiert in $G_{a,a}$ ein Bramble der Ordnung $a+1$?

<u>Lemma</u>: In einem $a \times a$ Gittergraphen existiert ein Bramble der Größe a.

kurz für $\{1,\dots,a\}$

Betrachte Crosser $C_{i,j} = \{\{ik\} \mid k \in [a]\} \cup \{kj \mid k \in [a]\}$

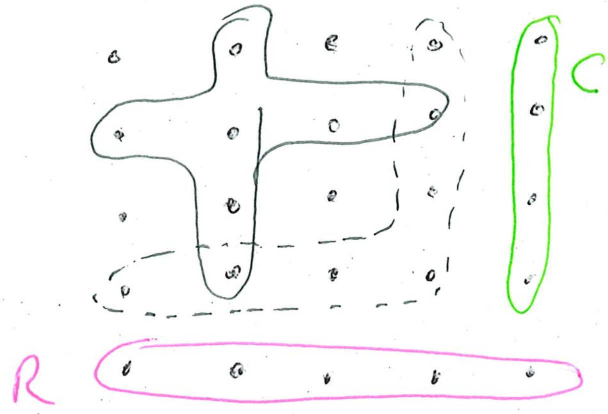


Angenommen Hitting Set hat Größe $a-1$. Dann muss eine Zeile z und eine Spalte s existieren, in der kein Element im Hitting Set ist. (Schubfachprinzip)
Dann ist aber $C_{z,s}$ nicht gehittet. $\Rightarrow$
Bramble hat Ordnung a.

<u>Lemma</u>: $a \times a$ Gittergraphen haben tree-width $\geq a$.

Idee: Definiere Bramble wie zuvor auf dem $a-1 \times a-1$ Gitter $\Rightarrow$ Hitting Set Größe $a-1$.
Zusätzlich sei $R = \{ai \mid i \in [a]\}$, $C = \{ia \mid i \in [a-1]\}$

Bramble-Sets aus dem $a-1 \times a-1$ Gitter.



Klar, C und R berühren sich. Da sie die ersten $a-1$ Knoten der Zeile/Spalte nutzen, müssen sie auch alle $G_{i,j}$ des $a-1 \times a-1$ Gitters berühren.

Jedes Hitting-Set hat damit Größe

$$\underbrace{a-1}_{\substack{a-1 \times a-1 \\ \text{Gitter}}} \underbrace{+1}_{R} \underbrace{+1}_{C} = a+1$$

$\Rightarrow tw(G_{a,a}) \geq a$

$\Rightarrow tw(G_{a,a}) = a$

$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{N}: G_{a,a}$ ist ein Minor eines Graphen G,
dann ist $tw(G) \geq tw(G_{a,a}) = a$