ParA – Übung 4
Bounded-Tree-Search

Entwickle einen BTS-Algorithmus für folgende zwei Probleme, um zu zeigen, dass diese FPT sind

1.) Cluster Editing

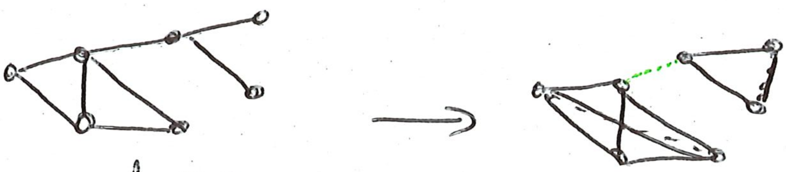
Gegeben: Graph $G=(V,E)$, $k\in\mathbb{N}$

Parameter: k

Frage: Existieren Menge $E^+, E^- \subseteq \binom{V}{2}$, sodass

a) $|E^+ \cup E^-| \leq k$

b) $\tilde{G} = (V, (E\setminus E^-)\cup E^+)$ eine Vereinigung von Cliquen ist? → Clustergraph



$k=3$ 2 ZHK, jeweils Cliquen

Hint: G ist ein Clustergraph, gdw. es keinen induzierten $\underbrace{\text{Pfad mit 3 Knoten}}_{P_3}$ enthält.

2.) Hitting Set

Gegeben: Universum $U=\{u_1,\dots,u_n\}$, Familie $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(U)$, $k\in\mathbb{N}$

Parameter: k, $d=\max_{F\in\mathcal{F}}|F|$

Frage: $\exists H\subseteq U$ mit $|H|\leq k$ mit $F\cap H\neq\emptyset\ \forall F\in\mathcal{F}$

Zu 1.

Angenommen, es existiert ein $P_3 = (u,v,w)$. Dann muss eine der folgenden Situationen eintreten:

a) Füge Kante $\{u,w\}$ hinzu (u,v,w sollen im selben Cluster sein)

b) Lösche Kante $\{u,v\}$

c) Lösche Kante $\{v,w\}$.

$\}$ (u,v,w sollen nicht im selben Cluster sein.)

Alle drei Optionen reduzieren k um 1.
Damit erhalten wir folgenden Algorithmus:

1. Falls $k < 0$ return false
2. Falls $k = 0$ und G ist Clustergraph, return true
3. Sei P ~~ein~~ $= (u,v,w)$ ein induzierter P_3
   a) Falls $(G = (V, E \setminus \{\{u,v\}\}), k-1)$ Ja-Instanz:
      return true
   b) Falls $(G = (V, E \setminus \{\{v,w\}\}), k-1)$ Ja-Instanz:
      return true
   c) Falls $(G = (V, E \cup \{\{u,w\}\}), k-1)$ Ja-Instanz:
      return true
4. return false

Laufzeit:

$T(k) = 3 \cdot T(k-1)$ Aufrufe

$\Rightarrow T(k) \in \mathcal{O}(3^k)$ Aufrufe

P_3 finden (Grob)

$\Rightarrow$ Cluster Editing lässt sich in Zeit $\mathcal{O}(3^k \cdot n^3)$

Zu 2.

Jede Menge $F \in \mathcal{F}$ muss gehittet werden.
Dafür kommen maximal d Element in Betracht.
$\Rightarrow$ Folgender Algorithmus löst Hitting Set:

1. Falls $k < 0$, return false
2. Falls $k = 0$ und $\mathcal{F} = \emptyset$ return true
3. ~~Für~~ Wähle $F \in \mathcal{F}$ bel.
4. Für $u \in F$:
   a) Falls $(U \setminus \{u\}, \mathcal{F} \setminus \bigcup_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ F \cap \{u\} \neq \emptyset}} F, k-1)$ Ja-Instanz

      return true
5. return false

Damit gibt es $T(k) = d \cdot T(k-1)$ Aufrufe, d.h

$T(k) \in \mathcal{O}(d^k)$

Jeder Aufruf kostet $\text{poly}(|U|, |\mathcal{F}|)$ Zeit

$\Rightarrow$ Laufzeit insgesamt:

$$\mathcal{O}(d^k \cdot \text{poly}(|U|, |\mathcal{F}|)) \text{ Zeit}$$

$\Rightarrow$ Hitting Set, parametrisiert nach k und d, ist in FPT.