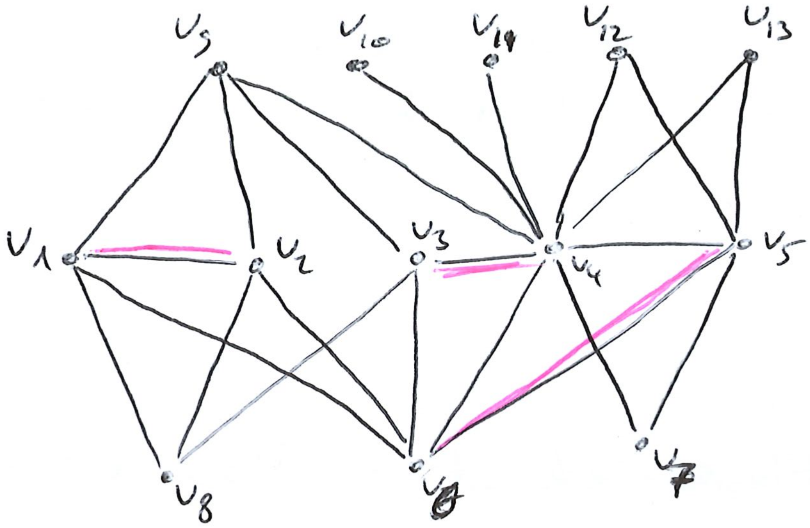
Para-Übung 3

Beispiel Crown-Decomp für Vertex Cover



Zeige/Widerlege mit Kronenzerlegung: Der Graph besitzt ein Vertex Cover der Größe 4.

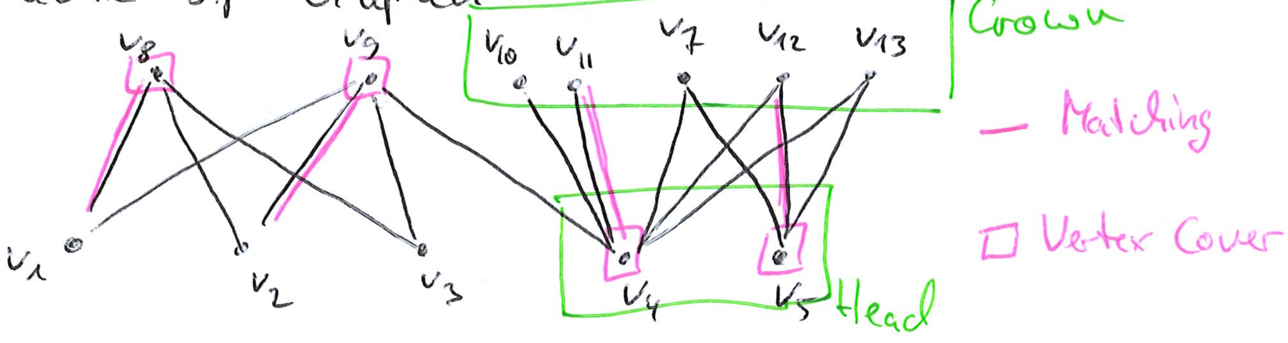
(Wir wollen hier keine anderen Reduktionsregeln nutzen

Matching in G:

$\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}$

$\rightarrow$ unabh. Knoten v_7 bis v_{13}

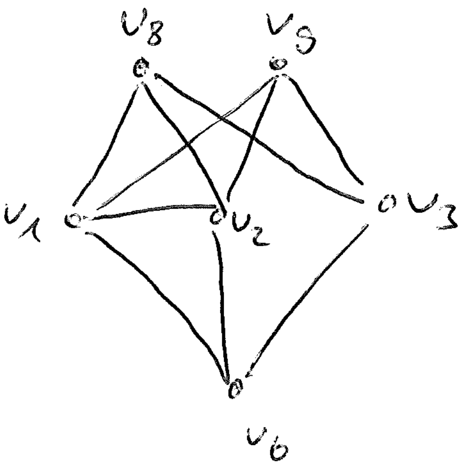
Betrachte bip. Graphen



$\Rightarrow$ Kronenzerlegung:

$C = \{v_7, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$, $H = \{v_4, v_5\}$, $R = \{v_1, v_2, v_3, v_8, v_9, v_6\}$

$\Rightarrow$ Reduzierte Instanz $(G[R], \underbrace{k-|H|}_{=2})$:



Da $3 \cdot 2 + 1 = 7$
und nur 6 Knoten übrig sind,
ist der Kernel hier fertig!

Mit scharfem Hinsehen erkennt man, dass der Restgraph nicht mit 2 Knoten abgedeckt werden kann:

- (v_1, v_2, v_8) bildet einen K_3 $\Rightarrow$ zwei davon müssen ins VC.
- $\{v_3, v_6\}$ unabhängig davon $\Rightarrow$ einer davon muss ins VC.

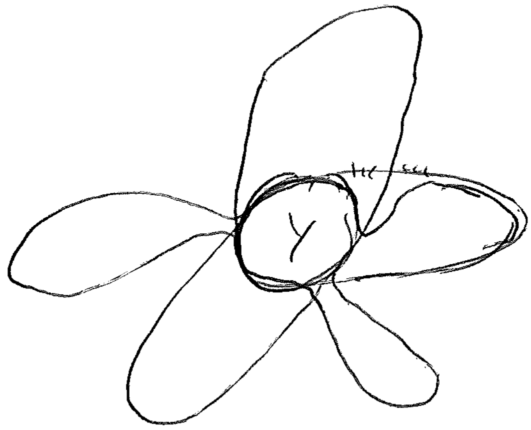
$\Rightarrow$ mind. 3 Knoten werden für das VC benötigt.

~~Bemerkung:~~
~~Bei diesem Beispiel~~

Andere Argumentation: Der Graph enthält den $K_{3,3}$ $\Rightarrow$ Es ex. Matching der Größe 3.

Sunflower: k Petals, core Y

Ein Menge von Mengen $S_1, \dots, S_k$, sodass $S_i \cap S_j = Y$ für alle $i \neq j$ und $S_i \neq \emptyset \ \forall i$



Lemma:

Sei A eine Menge von Mengen über eine Elementmenge U (ohne Duplikate) mit $|A_i| \leq d \ \forall i$.
Falls $|A| > d!(k-1)^d$, dann enthält A eine Sunflower S mit k Petals. S kann in Zeit poly$(|A|, |U|, k)$ berechnet werden.

d-Hitting-Set

Gegeben: Universum $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, Familie $F \subseteq P(U)$,
$k \in \mathbb{N}$, $\forall F \in \mathcal{F}: |F| \leq d$

Frage: $\exists \cancel{S}\, H \subseteq U: |S| \leq k \wedge \forall F \in \mathcal{F}: F \cap S \neq \emptyset$?

Theorem: d-Hitting erlaubt einen Kernel mit $\leq d!k^d d$ Mengen und $\leq d!k^d \cdot d^2$ Elementen

Reduktionsregel:

Sei $(U, \mathcal{F}, k)$ eine dHS Instanz und sei

$S = \{S_1, \dots, S_{k+1}\}$ eine sunflower mit Kern Y

und Größe $k+1$.

ein Element daraus hittet jedes S_i!

Setze $\mathcal{F}' = (\mathcal{F} \setminus S) \cup \{Y\}$ und $U' = \underbrace{\bigcup_{X \in \mathcal{F}'} X}$

entfernt Elemente, die jetzt in keiner Menge vorkommen

$\Rightarrow$ neue Instanz $(U', \mathcal{F}', k)$

Algorithmus:

1. Suche $d' \in \{1, \dots, d\}$, sodass es $> d'!k^{d'}$ Mengen mit $= d'$ Elementen in $\mathcal{F}$ gibt. Falls kein d' existiert $\rightarrow 3$.
2. Wende Regel an. $\rightarrow 2$.
3. $|\mathcal{F}|$ ist nun max $d!k^d \cdot d$

   $|U| \leq d \cdot |\mathcal{F}| \leq d!k^d \cdot d^2$