Gr. Übung 1

Inhalt

1. Vertex Cover auf Graphen mit maximal Grad 2
2. Vertex Cover auf Bäumen
3. Blätter und ≥ 3-Grad-Knoten in Bäumen
4. k-leaf spanning tree Problem.

---

1. Graphen mit maximalem Grad 2:

Sammlung von disjunkten Pfaden und Kreisen!

→ Bestimme VC auf jedem Teilgraphen:

Pfad: Jeder 2. Knoten im VC gibt $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Knoten im VC

Kreis: $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ Knoten mit gleichem Argument

Warum einmal auf, einmal abrunden?

2. Zeige: Bäume erlauben einen Kernel für VC der Größe 0.

Regel: Sei v ein Knoten mit $\delta(v) = 1$. Sei w sein Nachbar.
Betrachte Instanz $(G \setminus \{v, w\}, k-1)$.

Claim: Regel ist safe.

Angenommen, v ist im Vertex Cover VC. Dann ist $VC' = (VC \cup \{w\}) \setminus \{v\}$ auch ein Vertex Cover und es gilt $|VC'| \leq |VC|$.

3. Sei $T=(V,E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$,

$B = \{v \in V \mid \delta(v) = 1\}$, $I = \{v \in V \mid \delta(v) \geq 3\}$.

Dann ist $|I| \leq |B| - 2$.

Einfach zu überlegen: Ist $I = \emptyset$ gibt es exakt 2 Blätter, d.h. $|I| = 2$

Auch gut zu überlegen: Für jeden Knoten v mit $\delta(v) \geq 3$ entstehen $\delta(v) - 2$ neue Blätter.

Damit ist $\sum_{v \in V} \delta(v) - 2 = -2$

Also $\underbrace{\sum_{v \in I} \delta(v) - 2}_{\geq |I|} + \underbrace{\sum_{v \in B} \delta(v) - 2}_{= -|B|} + \underbrace{\sum_{v \in V \setminus (I \cup B)} \delta(v) - 2}_{= 0} = -2$

$\Rightarrow |I| - |B| \leq -2$ $\square$

4. k-Leaf-Spanning-Tree-Problem:

Gegeben: Graph $G = (V,E)$, $k \in \mathbb{N}$

Parameter: k

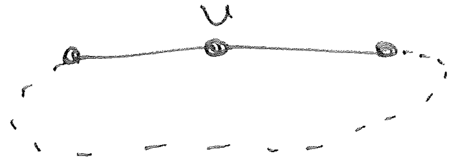
Gesucht: Spannbaum T von G mit $\geq k$ Blättern.

Zeige: Es können Regeln angewendet werden, sodass nur Graphen mit $O(k)$ Knoten betrachtet werden müssen.

Ziel: Identifiziere Strukturen in G, die entfernt werden können, sodass der Graph immer noch ~~einen~~ einen solchen Spannbaum besitzt.

Nach 3.: Knoten von Grad 2 sind ~~un~~ uninteressant in Bäumen. Was können wir über Knoten in G aussagen, die nur Grad 2 besitzen?

Fall 1:



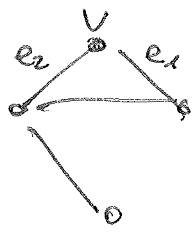
v mit $\delta(v) = 2$ liegt auf einem Kreis.

Claim: Wenn man eine Kante von v löscht existiert immer noch ein Baum mit $\geq k$ Blätter, wenn auch G einen Baum mit $\geq k$ Blättern besitzt.

Falsch!

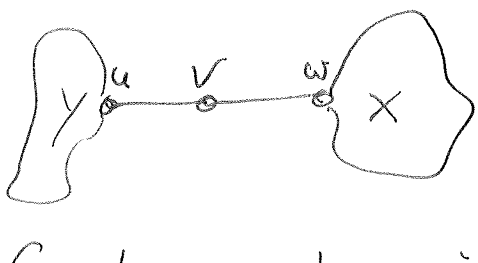
Gegenbeispiel:

G:



Löscht man e_2, hat der resultierende Graph nur einen Spannbaum mit ≤ 2 Blättern. Aber G besitzt einen mit ≥ 3 Blättern!

Fall 2:



v liegt auf keinem Kreis.

Claim: G ohne v aber mit Kante (u,w) enthält Baum mit $\geq k$ Blättern gdw. wenn G selbst einen hat.

Klar. v muss benutzt werden um von x nach y zu gelangen. Das wird mit Kante $\{u,w\}$ simuliert.

Weitere Idee:

v hat zwei Nachbarn, die auch Grad 2 haben.

auch Kontraktion genannt!

$\Rightarrow$ verschmelze u und v. $\Rightarrow$ erhalte G'

Ist u ~~in G~~ im Spannbaum von G' ein Blatt, können wir nach expandieren von u zu u–v einfach v zum Blatt machen.

Ist u kein Blatt, füge v wieder auf der Kante $\{u,w\}$ hinzu.

$\Rightarrow$ 2 Regeln für v mit $\delta(v)=2$

1. Ist v auf keinem Kreis, kontrahiere v mit einem Nachbarn
2. besitzt v zwei Nachbarn mit Grad 2, kontrahiere v mit einem der Nachbarn.

Behauptung: Der entstehende Graph G' besitzt $O(k)$ Knoten.

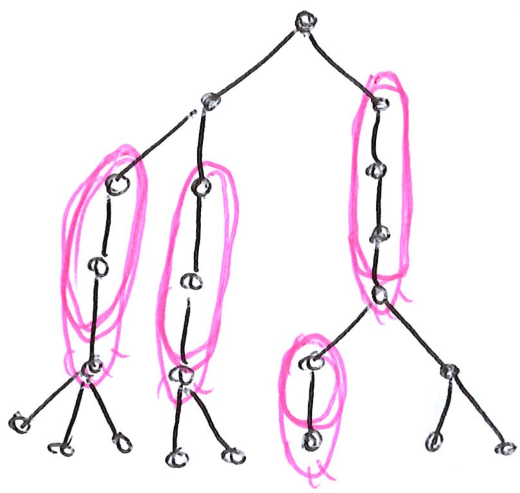
Zunächst: ~~Nach~~ Jeder Knoten v mit $\delta(v) = 2$ in G' hat einen Knoten mit Grad 1 oder Grad ≥ 3 als Nachbarn.

Betrachte nun einen Spannbaum T von G', der die Anzahl an Blättern maximiert.
Wir wollen die Anzahl an Knoten darüber abschätzen.

$$V(T) = \cancel{V} \underbrace{B(T)}_{\text{Blätter}} + \underbrace{I(T)}_{\delta \geq 3 \text{ Knoten}} + \underbrace{D(T)}_{\delta = 2 \text{ Knoten}} \overset{\text{Aufgabe 3}}{\leq} 2B(T) - 2 + D(T)$$

Ist $D(T) \in O(B(T))$?

T :



Maximal lange Kette von Grad-2-Knoten, die in einem Blatt oder Grad-≥ 3-Knoten enden.

Für jede Kette ist spätesten jeder 3. Knoten v von Grad ≥ 3 in G'. Sei D' die Menge dieser Knoten.

Sei $S = B \cup I$, wir zeigen, es gibt ein injektives Mapping $f: D' \to S$

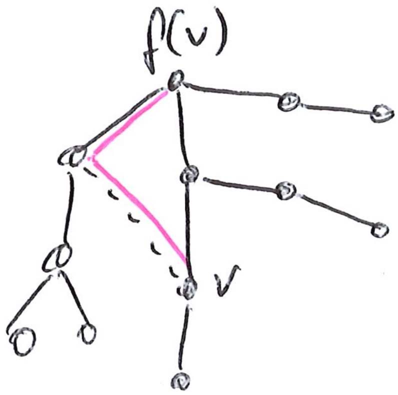
Haben wir dieses Mapping ist automatisch

$$|D| \in O(|I|+|B|) \subseteq O(I)$$

Berechne $f(v)$ wie folgt.

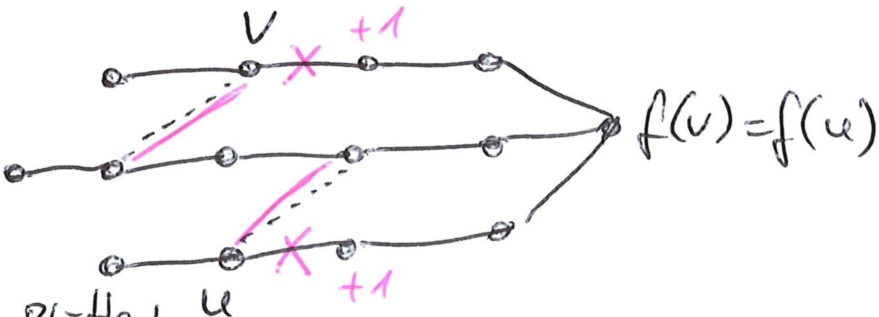
Da $\delta(v) \geq 3$ in G, aber $=2$ in T, ex. Kante an v, die in T einen Kreis schließt.

$f(v)$ ist der erste Knoten von $B \cup I$, der von v aus mit der Kante erreichbar ist.



Claim: Es gibt keine zwei Knoten $u, v \in D'$ mit $f(u)=f(v)$.

Skizze



$\Rightarrow$ T hatte nicht maximal viele Blätter!