

Übungsblatt 4

Präsenzaufgabe 1 (VC und FVS):

- a) Wende Iterative Compression auf den in Abbildung 1 dargestellten Graphen G an, um zu entscheiden, ob G ein Vertex Cover der Größe $k = 3$ besitzt.

Ausgehend von v_1 , füge in jeder Iteration den Knoten mit dem kleinsten Index zum aktuellen Teilgraphen hinzu. Gib in jeder Iteration den aktuellen Graphen und das Vertex Cover vor sowie nach einem Kompressionsschritt an.

- b) Bestimme im Graph G aus Abbildung 1 ein Feedback Vertex Set der Größe $k = 2$.

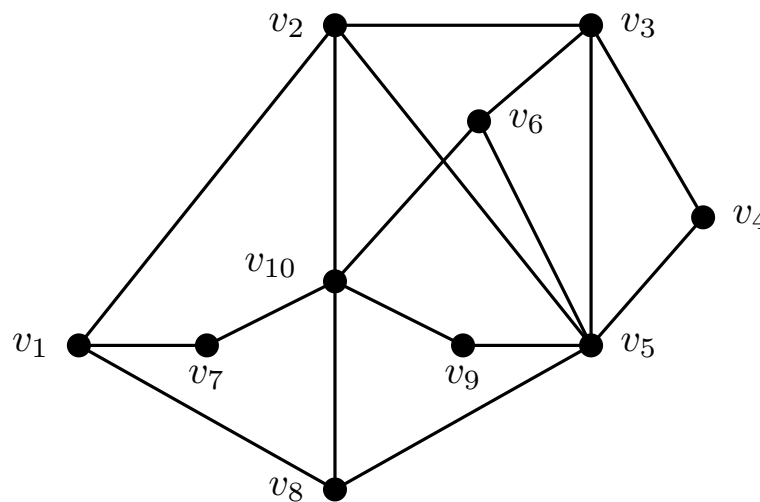


Abbildung 1: Ein Graph G

Präsenzaufgabe 2 (Feedback Vertex Set):

In dieser Aufgabe wollen wir einen Iterative-Compression-Algorithmus für Feedback Vertex Set konstruieren. Dazu müssen wir zunächst einen Kompressions-Algorithmus entwerfen. Wir nehmen an, wir haben einen Graphen G und ein FVS S in G mit $|S| = k + 1$. Zusätzlich nehmen wir an, es gibt ein FVS F der Größe $|F| = k$ in G . Definiere für eine Auswahl $S' \subseteq S$ die Menge $N = S \setminus S'$.

- a) Wir wollen die Menge N für ein FVS verbieten.

Zeige: $G[N]$ und $G[V \setminus S]$ sind kreisfrei. (Anderfalls ist $F \cap N \neq \emptyset$)¹

¹ $G[U]$ ist der von U induzierte Teilgraph von G , enthält also alle Kanten aus G , die Knoten aus U verbinden. Formal: $G[U] = (U, E_U)$ mit $E_U = \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in U\}$

b) Betrachte das folgende Problem FOREST BIPARTITION:

Gegeben ein Graph $T = (V_1 \dot{\cup} V_2, E)$, wobei $T[V_1]$ und $T[V_2]$ jeweils kreisfrei sind, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage Existiert ein FVS der Größe k , sodass nur Knoten aus V_1 benutzt werden?

Stelle Reduktionsregeln bzgl. der Blätter in V_1 auf, die die Struktur des Graphen T vereinfachen. Welche Eigenschaft(en) besitzen die Blätter in V_1 nach Anwenden dieser Regeln?

- c) Zeige: FOREST BIPARTITION kann in Zeit $O(4^k \text{poly}(n))$ gelöst werden.
- d) Definiere einen Iterative-Compression-Algorithmus für FVS und analysiere dessen Laufzeit.

Präsenzaufgabe 3 (Baumweite):

- a) Zeige: Baumgraphen besitzen Baumweite 1.
- b) Zeige: Vollständige Graphen K_n besitzen Baumweite $n - 1$.
- c) Bestimme die Baumweite des Graphens aus Abbildung 2.

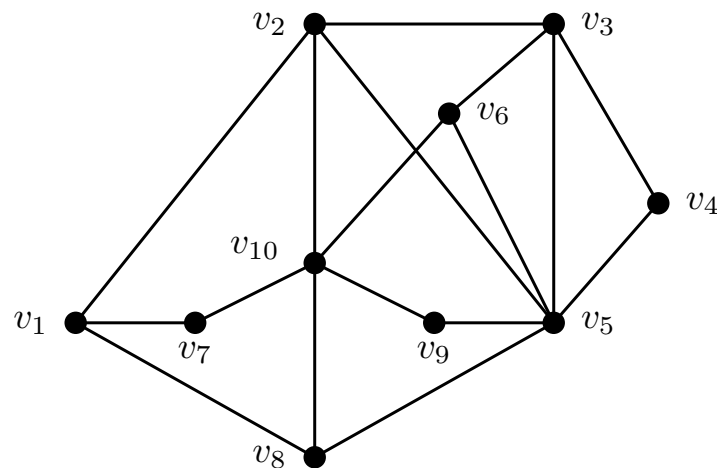


Abbildung 2: Ein Graph G