

Übungsblatt 3

Besprechung der Aufgaben am 07.01.2026.

Präsenzaufgabe 1 (Vertex Cover - Bounded Tree Search):

- a) Betrachte den in Abbildung 1 dargestellten Graphen G . Gib den gesamten Baum der Bounded Tree Search auf G an, und bestimme damit, ob G ein Vertex Cover der Größe $k = 5$ besitzt. Branche dabei jeweils über den Knoten mit dem höchsten Grad. Stehen mehrere zur Auswahl, wähle den mit dem kleinsten Index.

(Hinweis: Bei trivialen Instanzen (Maximalgrad 2) muss nicht weiter gebrannt werden.)

- b) Falls G ein Vertex Cover der Größe $k = 5$ besitzt, wie viele (und welche) Kanten müssen maximal hinzugefügt werden, damit das kleinste Vertex Cover die Größe 6 besitzt.

Andersherum: Falls G kein Vertex Cover der Größe $k = 5$ besitzt, wie viele Kanten (und welche) müssen mindestens entfernt werden, damit ein Vertex Cover der Größe 5 existiert?

- c) Alice möchte die Bounded Tree Search nutzen, um Vertex Cover auf 4-regulären Graphen zu lösen. Sie möchte zeigen, dass der Algorithmus schneller als auf beliebigen Graphen performt. Da in einem 4-regulären Graphen jeder Knoten exakt den Grad 4 besitzt, können wir einen Knoten mit Grad 4 wählen, über den wir branchen. Damit lässt sich die Anzahl Knoten im Baum durch folgende Rekursion abschätzen:

$$T(k) = T(k-1) + T(k-4)$$

Unter der Annahme, dass $T(k) \leq c\lambda^k$ ist, müssen wir die Ungleichung

$$\lambda^k \geq \lambda^{k-1} + \lambda^{k-4}$$

bzw.

$$\lambda^4 \geq \lambda^3 + 1$$

lösen. Man erhält $\lambda \leq 1.3803$. Da jeder Knoten in polynomieller Zeit bearbeitet werden kann, folgert Alice, dass der Bounded-Tree-Search-Algorithmus für Vertex Cover auf 4-regulären Graphen eine Laufzeit von $O(1.3803^k \text{ poly}(n, k))$ besitzt.

Zeige: Der Beweis ist nicht korrekt. Kann der Beweis korrigiert werden?

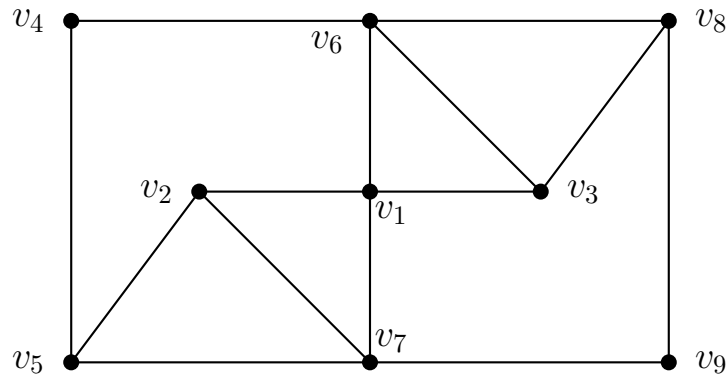


Abbildung 1: Graph G

Präsenzaufgabe 2 (Feedback Vertex Sets):

Sei G ein zusammenhängender r -regulärer Graph mit n Knoten.

- Zeige: Für $r = 1$ besitzt jedes FVS die Größe 0, für $r = 2$ besitzt jedes FVS die Größe 1.
- Zeige: Für $r \geq 3$ existiert in G kein FVS der Größe $k \leq n/4$.
- Zeige präziser: Für $r \geq 3$ besitzt jedes FVS mind. $\frac{n}{2} \cdot \frac{r-2}{r-1} + \frac{1}{r-1}$ Knoten.

Präsenzaufgabe 3 (Lange Pfade):

Betrachte folgendes parametrisiertes Problem Δ -LONG-PATH.

Gegeben: Gittergraph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad Δ , Knoten $s, t \in V$, $k \in \mathbb{N}$

Parameter: k, Δ

Frage: Existiert ein Pfad von s nach t mit mindestens k Kanten?

Zeige: Das Problem kann mit Bounded Tree Search in Zeit $O((\Delta - 1)^{k-1} \text{poly}(n))$ gelöst werden.