

Übungsblatt 2

Präsenzaufgabe 1 (Matchings):

- a) Ein Graph heißt *k-regulär*, wenn jeder Knoten den Grad k besitzt.
- (i) Zeige, dass der k -reguläre *bipartite* Graph $G = (X \cup Y, E)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, ein perfektes Matching besitzt.
- (ii) Zeige, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, einen k -regulären Graphen $G = (V, E)$ gibt, sodass G kein perfektes Matching besitzt.
- b) Bestimme im Graphen $F = (V, E)$ aus Abbildung 1 ein maximales Matching mit dem Algorithmus 2.18 aus der Vorlesung. Seien $V_1 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ und $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$ mit $V = V_1 \dot{\cup} V_2$. Beginne den Algorithmus mit dem Knoten v_0 und arbeite V_1 danach in der Reihenfolge v_1, v_2, v_3 ab. Kommen in einem Schritt des Algorithmus zwischenzeitlich mehrere Kanten infrage, wähle die mit dem kleinsten Index. Gib in jeder Iteration den Baum T , den augmentierenden Pfad P und das aktuelle Matching M an.

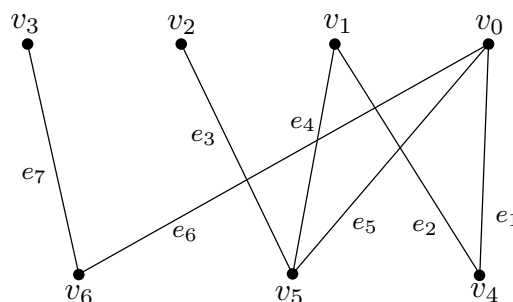


Abbildung 1: Der Graph F .

Präsenzaufgabe 2 (Crown Decomposition):

Betrachte den Graphen G aus Abbildung 2.

- a) Bestimme ein inklusionsmaximales Matching M in G . Nutze dazu folgenden Greedy-Algorithmus:
- Betrachte die Kanten in der Reihenfolge der Indizes.
 - $M := \emptyset$
 - Für jede Kante e : Falls $M \cup \{e\}$ ein valides Matching ist, setze $M := M \cup \{e\}$.
- b) Nutze das Matching aus Teil a), um eine Kronenzerlegung zu bestimmen. Gib dazu die Knotenmengen C, H, R explizit an.
- c) Begründe, ob der Graph G ein Vertex Cover der Größe 5 besitzt.

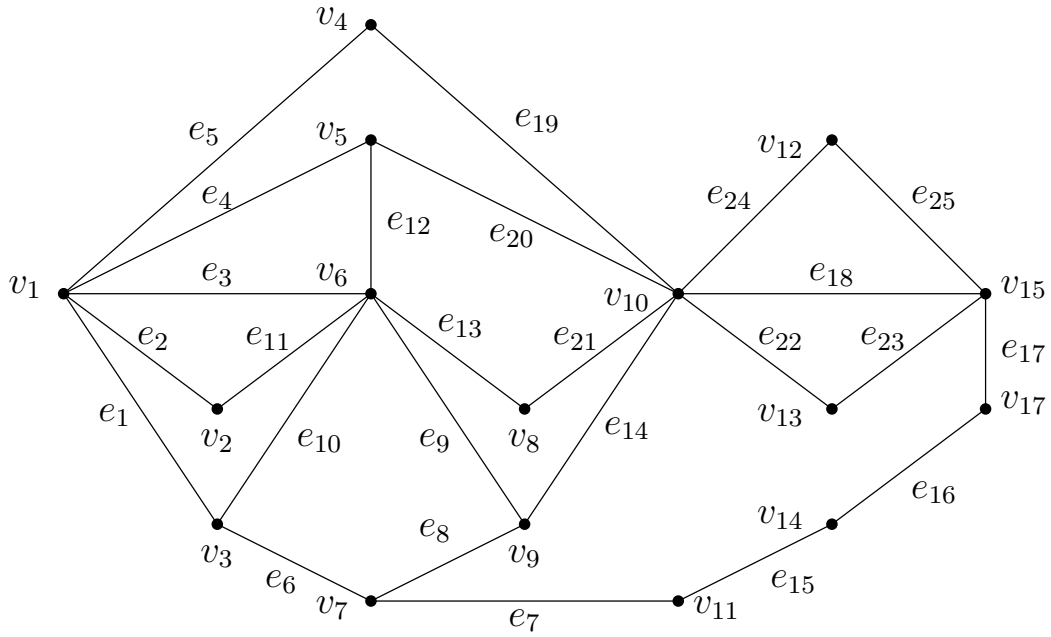


Abbildung 2: Der Graph G .

Präsenzaufgabe 3 (Dual-Färbung):

Betrachte folgendes parametrisiertes Problem DUAL-COLORING.

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$.

Parameter: k

Frage: Existiert in G eine $(|V| - k)$ -Färbung?

Eine p -Färbung eines Graphen ist dabei eine Funktion $c : V \rightarrow \{1, \dots, p\}$, sodass $c(v) \neq c(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$ gilt (benachbarte Knoten werden unterschiedlich gefärbt).

Sei $\overline{G} = (V, \overline{E})$ der Komplementgraph von G mit $\overline{E} := \{\{u, v\} \notin E\}$.

- Zeige: Existiert in $\overline{G}$ ein inklusionsmaximales Matching der Größe k , dann existiert in G eine $(|V| - k)$ -Färbung.
- Angenommen, in $\overline{G}$ existiert ein inklusionsmaximales Matching der Größe $\leq k - 1$. Erstelle mit Hilfe einer Kronenzerlegung (C, H, R) eine Reduktionsregel.
- Zeige: DUAL-COLORING erlaubt einen Kernel mit $3k$ Knoten.