

Dr. Arne Schmidt

Klausur
Parametrisierte Algorithmen (Musterklausur)
01.03.26

Nachname:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

☐ Bachelor ☐ Master ☐ Andere:

Hinweise:

- Bitte das Deckblatt in Druckschrift vollständig ausfüllen.
 - Die Klausur besteht aus 8 Blättern, bitte auf Vollständigkeit überprüfen.
 - Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 120 Minuten.

 - Erlaubte Hilfsmittel: keine
 - Eigenes Papier ist nicht erlaubt.
 - Die Rückseiten der Blätter dürfen beschrieben werden.
 - Antworten, die *nicht* gewertet werden sollen, bitte deutlich durchstreichen.
 - Kein Tippex verwenden.
 - Werden mehrere Antworten gegeben, werten wir die mit der geringsten Punktzahl.
 - Mit *Bleistift* oder in *Rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.
-
-

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Max	12	12	12	17	18	15	14	100
Erreicht								

Aufgabe 1: Kurzfragen

(2+2+2+4+2 Punkte)

- a) Wie ist die Klasse FPT definiert?
- b) Wie ist die Klasse XP definiert?
- c) Wie ist die Klasse $W[t]$ für $t \in \{1, 2, \dots\}$ definiert.
- d) Zeige: Parametrisierte Reduktionen sind transitiv.
- e) Kreuze an, welche Aussagen wahr sind. Es ist immer mindestens eine Aussage wahr. Nur vollständig korrekt angekreuzte Aufgaben bringen Punkte.
 - ☐ CLIQUE parametrisiert nach Cliquengröße ist in FPT
 - ☐ VERTEX COVER parametrisiert nach maximalem Knotengrad ist in FPT.
 - ☐ INDEPENDENT SET parametrisiert nach der Größe des Independent Set ist in $W[1]$.

(6+3+3 Punkte)

a) Bestimme ein inklusionsmaximales Matching M in G . Nutze dazu folgenden Greedy-Algorithmus:

- b) Bestimme eine Kronenzerlegung. Gib dazu die Knotenmengen C, H, R explizit an.

-

Abbildung 1: Der Graph G .

Aufgabe 3: Kernelization Modellierung**(5+5+2 Punkte)**

Betrachte folgendes parametrisiertes Problem DUAL-COLORING.

Gegeben: Graph $G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$.

Parameter: k

Frage: Existiert in G eine $(|V| - k)$ -Färbung?

Eine p -Färbung eines Graphen ist dabei eine Funktion $c : V \rightarrow \{1, \dots, p\}$, sodass $c(v) \neq c(w)$ für alle $\{v, w\} \in E$ gilt (benachbarte Knoten werden unterschiedlich gefärbt).

Sei $\overline{G} = (V, \overline{E})$ der Komplementgraph von G mit $\overline{E} := \{\{u, v\} \notin E\}$.

- a) Zeige: Existiert in $\overline{G}$ ein inklusionsmaximales Matching der Größe k , dann existiert in G eine $(|V| - k)$ -Färbung.
- b) Angenommen, in $\overline{G}$ existiert ein inklusionsmaximales Matching der Größe $\leq k - 1$. Erstelle mit Hilfe einer Kronenzerlegung (C, H, R) eine Reduktionsregel.
- c) Zeige: DUAL-COLORING erlaubt einen Kernel mit $3k$ Knoten.

Aufgabe 4: Bounded Tree Search

(2+3+5+7 Punkte)

- a) Beschreibe kurz die Methode Bounded Tree Search.
- b) Beschreibe ein allgemeines Vorgehen, wie man Laufzeiten von Rekursionsgleichungen der Form $T(n) = \sum_{i=1}^m T(n - d_i)$ bestimmen kann.
- c) Betrachte folgendes parametrisiertes Problem Max-Degree- Δ -Dominating-Set.

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$ mit Maximalgrad Δ , bel. aber fest, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Parameter: k

Frage: Existiert $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$, sodass für jeden Knoten $u \in V$ gilt: $u \in V'$ oder $\exists v \in V' : \{u, v\} \in E$.

- (i) Zeige oder widerlege: Ist der Knotengrad $\delta(v) > k$ für einen Knoten $v \in V$, dann ist die Instanz $(G \setminus \{v\}, k - 1)$ genau dann lösbar, wenn (G, k) lösbar ist.
- (ii) Entwirf einen Algorithmus, der das Problem in Zeit $O((\Delta + 1)^k \cdot (n + m))$ löst.

Aufgabe 5: Iterative Compression**(2+7+6+3 Punkte)**

In dieser Aufgabe wollen wir einen Iterative-Compression-Algorithmus für Feedback Vertex Set konstruieren. Dazu müssen wir zunächst einen Kompressions-Algorithmus entwerfen. Wir nehmen an, wir haben einen Graphen G und ein FVS S in G mit $|S| = k + 1$. Zusätzlich nehmen wir an, es gibt ein FVS F der Größe $|F| = k$ in G . Definiere für eine Auswahl $S' \subseteq S$ die Menge $N = S \setminus S'$.

- a) Beschreibe kurz die Methode Iterative Compression.
- b) Zeige: $G[N]$ und $G[V \setminus S]$ sind kreisfrei.¹
- c) Betrachte das folgende Problem FOREST BIPARTITION:

Gegeben ein Graph $T = (V_1 \dot{\cup} V_2, E)$, wobei $T[V_1]$ und $T[V_2]$ jeweils kreisfrei sind, und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage Existiert ein FVS der Größe k , sodass nur Knoten aus V_1 benutzt werden?

[Hier kommen ein paar Reduktionsregeln]

- (i) Zeige, diese Regeln sind sicher.
- (ii) Welche Eigenschaft(en) besitzen die Blätter in V_1 nach Anwenden dieser Regeln?
- d) Zeige: FOREST BIPARTITION kann in Zeit $O(4^k n^{O(1)})$ gelöst werden. (Hinweis: Nutze Bounded Tree Search)
- e) Definiere einen Iterative-Compression-Algorithmus für FVS und analysiere dessen Laufzeit. (Hinweis: Die Laufzeitabschätzung muss nicht scharf sein!)

¹ $G[U]$ ist der von U induzierte Teilgraph von G , enthält also alle Kanten aus G , die Knoten aus U verbinden. Formal: $G[U] = (U, E_U)$ mit $E_U = \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in U\}$

Aufgabe 6: Tree Width

(4+4+7 Punkte)

- a) Zeige: Baumgraphen besitzen Baumweite 1.
- b) Zeige: Vollständige Graphen K_n besitzen Baumweite $n - 1$.
- c) Bestimme die Baumweite des Graphens aus Abbildung 2.

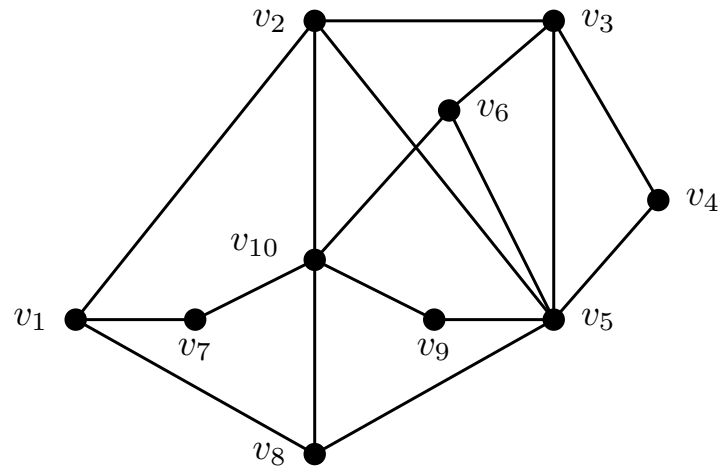


Abbildung 2: Ein Graph G

Aufgabe 7: Intractability**(10+4 Punkte)**

Betrachte folgendes parametrisiertes Problem SET COVER

Gesucht: Universum $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, Familie von Teilmengen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(U)$, Zahl $k \in \mathbb{N}$

Parameter: k

Frage: Existiert $F \subseteq \mathcal{F}$ mit $|F| \leq k$, sodass $\bigcup_{f \in F} f = U$ gilt.

- a) Zeige: SET COVER ist $W[2]$ -vollständig.
- b) Wie lassen sich parametrisierte Reduktionen mit mehreren Parametern generalisieren?
(Hinweis: Beide Probleme können unterschiedlich viele Parameter besitzen.)

Viel Erfolg ☺