

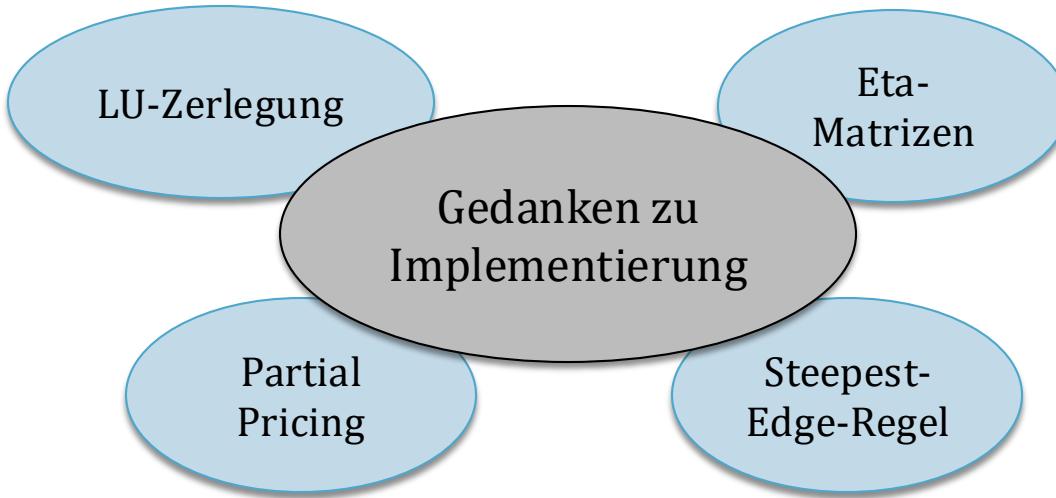


# Mathematische Methoden der Algorithmitk – Vorlesung #07

Arne Schmidt

# Letzte Woche

# Gedanken zur Implementierung



# LPs in allgemeiner Form

# LPs in allgemeiner Form

$$\max c^T x$$

s.t.

$$\begin{aligned} a &\leq Ax \leq b \\ \ell &\leq x \leq u \end{aligned}$$

Sowohl die Constraints als auch die Variablen besitzen eine obere und untere Schranke.

Naiver Ansatz:

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ \text{s.t.} \\ Ax &\leq b \\ -Ax &\leq -a \\ x &\leq u \\ x &\geq \ell \end{aligned}$$

Das verdoppelt aber die Constraints!

# Fragen



Was machen wir mit  
Constraints / Variablen,  
die keine untere / obere  
Schranke besitzen?

Was passiert mit den  
Schlupfvariablen?

Können wir Simplex  
einfach anpassen?

# Schranken

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \\ & a \leq Ax \leq b \\ & \ell \leq x \leq u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && 3x_1 - x_2 \\ \text{subject to} \quad & 1 \leq -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2 \leq -3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & \textcolor{red}{?} \quad 2x_1 - x_2 \leq 0 \\ & -2 \leq x_1 && \textcolor{red}{?} \\ & 0 \leq x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

Ist  $a, b, \ell, u$  für einen Constraint bzw. eine Variable nicht gegeben, ersetzen wir diese mit  $-\infty$  (für untere Schranken) bzw  $\infty$  (für obere Schranken).

# Schlupf

Bisher hatten wir für  $w_i$  immer den Wert angegeben, wie viel Luft noch bis zur Gleichheit existiert. Das funktioniert hier nicht mehr.

Stattdessen können wir einfach den Wert des Constraints festhalten und schauen, ob er sich innerhalb der Schranken (engl. bounds) befindet.

maximize	$3x_1 - x_2$
subject to	$1 \leq -x_1 + x_2 \leq 5$
	$2 \leq -3x_1 + 2x_2 \leq 10$
	$2x_1 - x_2 \leq 0$
	$-2 \leq x_1$
	$0 \leq x_2 \leq 6$

$$\begin{aligned}w_1 &= -x_1 + x_2 \\w_2 &= -3x_1 + 2x_2 \\w_3 &= 2x_1 - x_2\end{aligned}$$

$$\text{Mit } 1 \leq w_1 \leq 5, 2 \leq w_2 \leq 10, -\infty \leq w_3 \leq 0$$

Halte die Schranken der Variablen im Dictionary fest!

# Dictionary mit Schranken

$$\begin{array}{llll} \text{maximize} & 3x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & \begin{array}{llll} 1 \leq -x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2 \leq -3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 - x_2 \leq 0 \\ -2 \leq x_1 \\ 0 \leq x_2 \leq 6 \end{array} \end{array}$$

$l$	$u$	$-2$	$0$
		$\infty$	6
$\zeta = 3x_1 - x_2 = -6$			
1	5	$w_1 = -x_1 + x_2 = 2$	
2	10	$w_2 = -3x_1 + 2x_2 = 6$	
$-\infty$	0	$w_3 = 2x_1 - x_2 = -4$	

Die Nichtbasisvariablen waren implizit immer 0. Das funktioniert hier nicht mehr so einfach.  
Wir müssen festhalten, ob sie die obere oder untere Schranke einhalten! (Markiert mit einer Box.)

Ist das angegebene Dictionary gültig?

Ist das angegebene Dictionary optimal?

# Pivotschritt

$$\begin{array}{lllll} \text{maximize} & 3x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & 1 \leq -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2 \leq -3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 0 \\ & -2 \leq x_1 \\ & 0 \leq x_2 \leq 6 \end{array}$$

$l$		$-2$	$0$
$u$		$\infty$	$6$
$\zeta = 3x_1 - x_2 = -6$			
1	5	$w_1 = -x_1 + x_2 = 2$	
2	10	$w_2 = -3x_1 + 2x_2 = 6$	
$-\infty$	0	$w_3 = 2x_1 - x_2 = -4$	

$x_1$  ist derzeit an der unteren Grenze und taucht positiv in  $\zeta$  auf.

D.h. Eine Erhöhung von  $x_1$  ist sinnvoll!

Was passiert, wenn  $x_1$  erhöht wird?

→ Die  $w_i$  nähern sich ihrer oberen oder unteren Schranke!

Um wieviel können wir  $x_1$  also erhöhen?

$$w_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 \leq -1, \quad w_2 \geq 2 \Rightarrow x_1 \leq -\frac{2}{3}, \quad w_3 \leq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2$$

# Pivotschritt - Recap

$$\begin{array}{lllll} \text{maximize} & 3x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & 1 \leq -x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 2 \leq -3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 0 \\ & -2 \leq x_1 \\ & 0 \leq x_2 \leq 6 \end{array}$$

$l$	$1$	$0$
$u$	$5$	$6$
	$\zeta = -3w_1 + 2x_2 = -3$	
$-2 \infty$	$x_1 = -w_1 + x_2 = -1$	
$2 \ 10$	$w_2 = 3w_1 - x_2 = 3$	
$-\infty \ 0$	$w_3 = -2w_1 + x_2 = -2$	

Ist also das Pivot an der unteren Grenze, prüfe wie groß es werden darf, sodass alle aktuellen Basisvariablen noch in ihren Grenzen bleiben. Halte dabei im neuen Dictionary fest, ob die herausgehende Variable ihre obere oder untere Schranke angenommen hat.

Andersherum:

Ist das Pivot aktuell an der oberen Grenze, prüfe wie weit es kleiner werden darf.  
Achtung: Das Pivot muss dann negativ in der Zielfunktion auftreten!

# Alle Pivotschritte am Beispiel

$l$		$-2$	$0$
$u$		$\infty$	$6$
		$\zeta = 3x_1 - x_2 = -6$	
1	5	$w_1 = -x_1 + x_2 = 2$	
2	10	$w_2 = -3x_1 + 2x_2 = 6$	
$-\infty$	0	$w_3 = 2x_1 - x_2 = -4$	

$l$		$1$	$0$
$u$		$5$	$6$
		$\zeta = -3w_1 + 2x_2 = -3$	
-2	$\infty$	$x_1 = -w_1 + x_2 = -1$	
2	10	$w_2 = 3w_1 - x_2 = 3$	
$-\infty$	0	$w_3 = -2w_1 + x_2 = -2$	

Tausche  $x_1$  mit  $w_1$ .

# Alle Pivotschritte am Beispiel

$l$		$1$	$0$
$u$		5	6
		$\zeta = -3w_1 + 2x_2 = -3$	
$-2 \infty$	$x_1 = -w_1 + x_2 = -1$		
2 10	$w_2 = 3w_1 - x_2 = 3$		
$-\infty 0$	$w_3 = -2w_1 + x_2 = -2$		

$l$		$1$	$2$
$u$		5	10
		$\zeta = 3w_1 - 2w_2 = -1$	
$-2 \infty$	$x_1 = 2w_1 - w_2 = 0$		
0 6	$x_2 = 3w_1 - w_2 = -1$		
$-\infty 0$	$w_3 = w_1 - w_2 = -1$		

Degeneriert?!

Tausche  $x_2$  mit  $w_2$ .

Ein Dictionary ist degeneriert, wenn eine Basisvariable eine seiner Schranken annimmt.

# Alle Pivotschritte am Beispiel

$l$	$u$	$1$	$2$
		$5$	$10$
		$\zeta = 3w_1 - 2w_2 = -1$	
$-2$	$\infty$	$x_1 = 2w_1 - w_2 = 0$	
$0$	$6$	$x_2 = 3w_1 - w_2 = 1$	
$-\infty$	$0$	$w_3 = w_1 - w_2 = -1$	

$l$	$u$	$-\infty$	$2$
		$0$	$10$
		$\zeta = 3w_3 + w_2 = 2$	
$-2$	$\infty$	$x_1 = 2w_3 + w_2 = 2$	
$0$	$6$	$x_2 = 3w_3 + 2w_2 = 4$	
$1$	$5$	$w_1 = w_3 + w_2 = 2$	

Tausche  $w_1$  mit  $w_3$ .

# Alle Pivotschritte am Beispiel

$l$		$-\infty$	$2$
$u$		<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">10</span>
		$\zeta = 3w_3 + w_2 = 2$	
-2	$\infty$	$x_1 = 2w_3 + w_2 = 2$	
0	6	$x_2 = 3w_3 + 2w_2 = 4$	
1	5	$w_1 = w_3 + w_2 = 2$	

$l$		$-\infty$	$0$
$u$		<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6</span>
		$\zeta = 1.5w_3 + 0.5x_2 = 3$	
-2	$\infty$	$x_1 = 0.5w_3 + 0.5x_2 = 3$	
2	10	$w_2 = -1.5w_3 + 0.5x_2 = 3$	
1	5	$w_1 = -0.5w_3 + 0.5x_2 = 3$	

Tausche  $w_2$  mit  $x_2$ .

# Phase I

# Fragen



Wenn das initiale  
Dictionary nicht gültig ist,  
müssen wir eine Phase I  
starten.

Wie sieht das duale  
System aus?

# Dualisieren allgemeiner LPs

Primal:

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{aligned} Ax &\leq b \\ -Ax &\leq -a \\ x &\leq u \\ -x &\leq -\ell \end{aligned} \end{aligned}$$

Inkl. Schlupf

$$\begin{aligned} & \max c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{aligned} Ax + f &= b \\ -Ax + p &= -a \\ x + t &= u \\ -x + g &= -\ell \\ x \text{ free}, f, p, t, g &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} & \min b^T v - a^T q + u^T s - \ell^T h \\ \text{s.t.} \quad & \begin{aligned} A^T(v - q) - (h - s) &= c \\ v, q, h, s &\geq 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Komplementärer Schlupf bei Optimalität:  $f_i v_i = 0, p_i q_i = 0, t_j s_j = 0, g_j h_j = 0$

# Herleitung eines (nicht) linearen Programms

Dual:

$$\begin{aligned} & \min b^T v - a^T q + u^T s - \ell^T h \\ \text{s.t.} \quad & A^T(v - q) - (h - s) = c \\ & v, q, h, s \geq 0 \end{aligned}$$

Wir definieren uns für eine Variable  $\xi$ :  $\xi^+ := \max(\xi, 0)$  und  $\xi^- := \max(-\xi, 0)$

Damit ist  $\xi^+ \xi^- = 0$  und  $\xi^+ - \xi^- = \xi$ .

Wenn wir also schreiben:

$$v = y^+, q = y^-, h = z^+, s = z^-$$

Erhalten wir

$$\begin{aligned} & \min b^T y^+ - a^T y^- + u^T z^- - \ell^T z^+ \\ \text{s.t.} \quad & A^T y - z = c \end{aligned}$$

# Ein nicht-lineares Programm als duales

$$\max c^T x$$

s.t.

$$a \leq Ax \leq b$$

$$\ell \leq x \leq u$$

$$\min b^T y^+ - a^T y^- + u^T z^- - \ell z^+$$

s.t.

$$A^T y - z = c$$

Das dargestellte duale Programm wird auch **stückweise lineares Programm** genannt.

# Ein nicht-lineares Programm als duales

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 2x_1 - x_2 \\ \text{subject to} & 0 \leq x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2 \leq -x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 - x_2 \leq 0 \\ & -2 \leq x_1 \\ & 1 \leq x_2 \leq 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 6y_1^+ + 10y_2^+ + 2z_1^+ - z_2^+ \\ & - 2y_2^- + \infty y_3^- + \infty z_1^- + 5z_2^- \\ \text{subject to} & y_1 - y_2 + y_3 - z_1 = 2 \\ & y_1 + 2y_2 - y_3 - z_2 = -1 \end{array}$$

Konvention:

$$\infty \cdot a = \begin{cases} -\infty, & \text{wenn } a < 0 \\ 0, & \text{wenn } a = 0 \\ \infty, & \text{wenn } a > 0 \end{cases}$$

# Duales Dictionary

$$-\xi = -6y_1^+ - 10y_2^+ - 2z_1^+ + z_2^+ + 2y_2^- - \infty y_3^- - \infty z_1^- - 5z_2^-$$

Im Dictionary haben wir

$$\begin{aligned} z_1 &= -2 + y_1 - y_2 + y_3 \\ z_2 &= 1 + y_1 + 2y_2 - y_3 \end{aligned}$$

Das ist für  $z_1 = -2$  nicht gültig:  $z_1 < 0 \Rightarrow z_1^- > 0 \Rightarrow -\xi = -\infty$ !

Um eine gültige Lösung zu finden, ändern wir die primale Zielfunktion ab:  $\eta = -2x_1 - x_2$   
Damit erhalten wir ein gültiges, duales Dictionary.

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + y_1 - y_2 + y_3 \\ z_2 &= 1 + y_1 + 2y_2 - y_3 \end{aligned}$$

# Duales Dictionary

$$-\xi = -6y_1^+ - 10y_2^+ - 2z_1 + z_2 + 2y_2^- - \infty y_3^-$$

$$z_1 = 2 + y_1 - y_2 + y_3$$

$$z_2 = 1 + y_1 + 2y_2 - y_3$$

Um zu entscheiden, ob wir  $y_1, y_2, y_3$  in die Basis tauschen, müssen wir jeweils unterscheiden, ob sie negativ, oder positiv werden. Wie verändert sich dann die Zielfunktion?

- Erhöhe  $y_1$ :  $-6 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -7 < 0$
- Verringere  $y_1$ :  $-(-2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 1 > 0 \Rightarrow$  Verbessert unsere Zielfunktion
- Erhöhe  $y_2$ :  $-10 - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -6 < 0$
- Verringere  $y_2$ :  $2 - (-2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) = -2 < 0$
- Erhöhe  $y_3$ :  $0 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -3 < 0$
- Verringere  $y_3$ :  $-\infty - (-2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = -\infty < 0$

# Pivotschritt

$$-\xi = -6y_1^+ - 10y_2^+ - 2z_1 + z_2 + 2y_2^- - \infty y_3^-$$

$$z_1 = 2 + y_1 - y_2 + y_3$$

$$z_2 = 1 + y_1 + 2y_2 - y_3$$

Wir tauschen also  $y_1$  rein durch Verkleinern. Dadurch erreicht  $z_2$  zuerst die 0. Damit:

$$z_1 = 1 + z_2 - 3y_2 + 2y_3$$

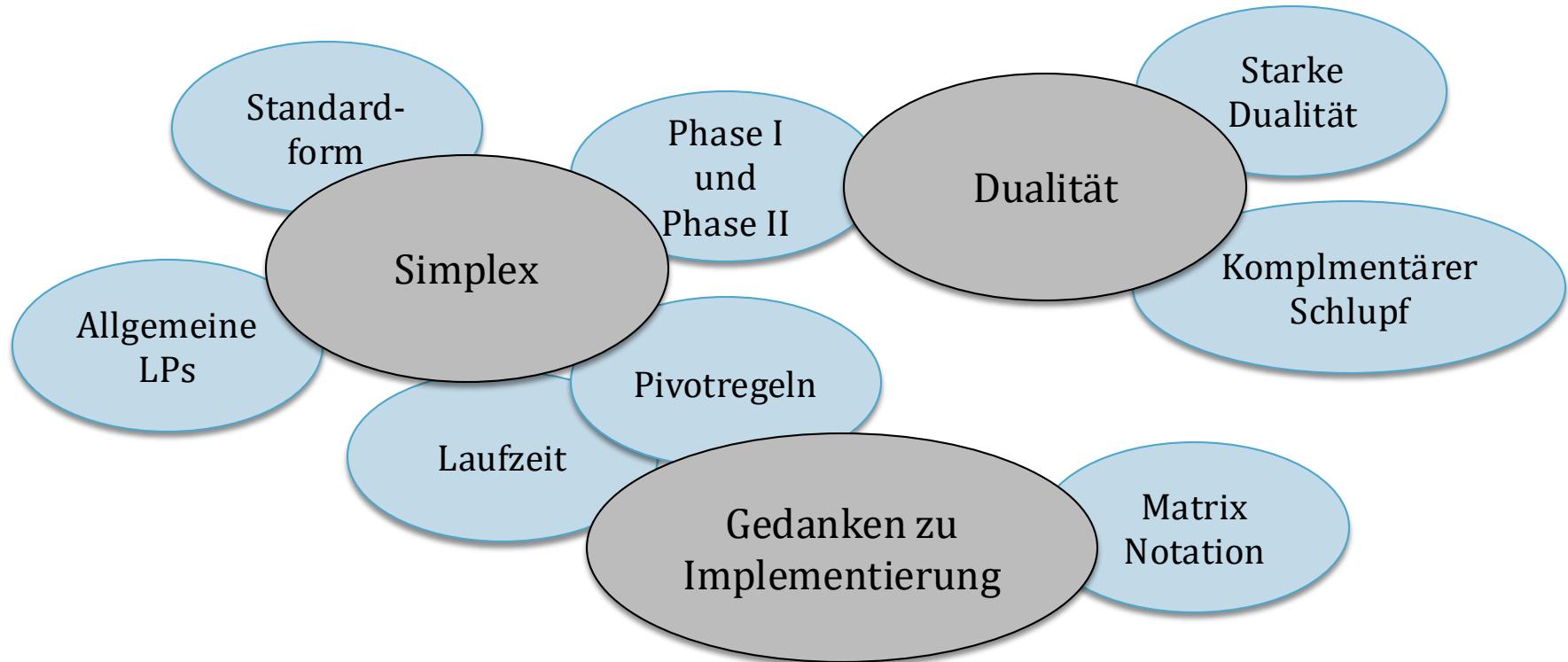
$$y_1 = -1 + z_2 - 2y_2 - y_3$$

Im primalen geht nun  $x_2$  rein und  $w_1$  raus.

Für  $w_1$  gilt außerdem:  $y_1^- > 0 \Rightarrow q_1 > 0 \Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow w_1 = a_1$ .

Nimmt also die untere Schranke an.

# Was bisher geschah...



# Ausblick



Viele Probleme erfordern ganzzahlige Lösungen.

Nächste Woche: Wie findet man optimale, ganzzahlige Lösungen.

Danach: Wie lassen sich andere Probleme lösen? Gibt es allgemeine Techniken?

Gibt es einen Unterschied zwischen Problemen, die NP-schwer sind oder die effizient lösbar sind?

