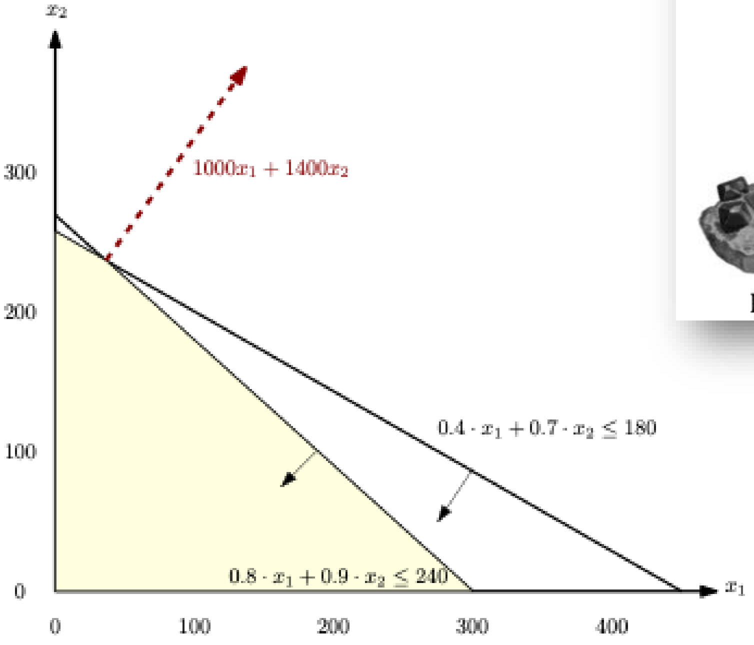
Technische Universität Braunschweig

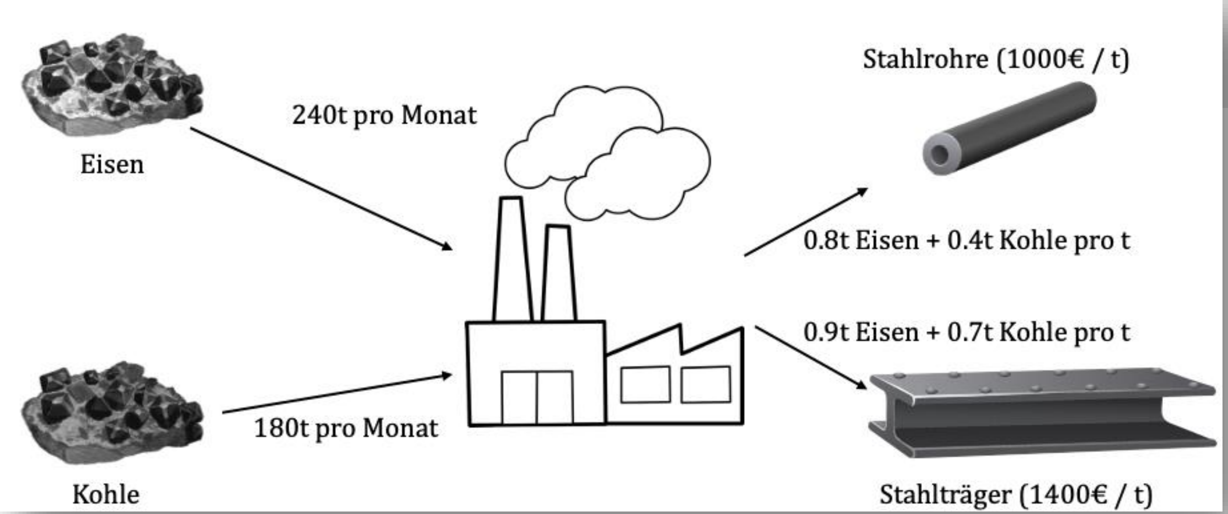
Mathematische Methoden der Algorithmik – Vorlesung #01

Arne Schmidt

Letzte Woche

Letzte Woche





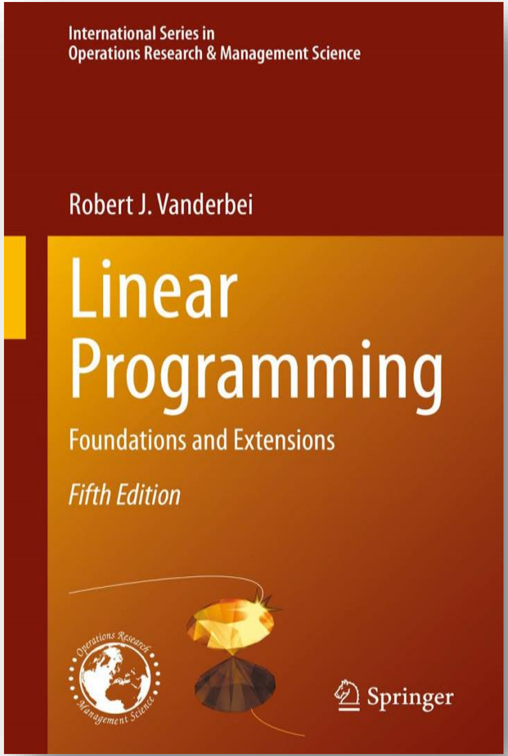
Maximiere $c^T x$

Unter Bedingungen

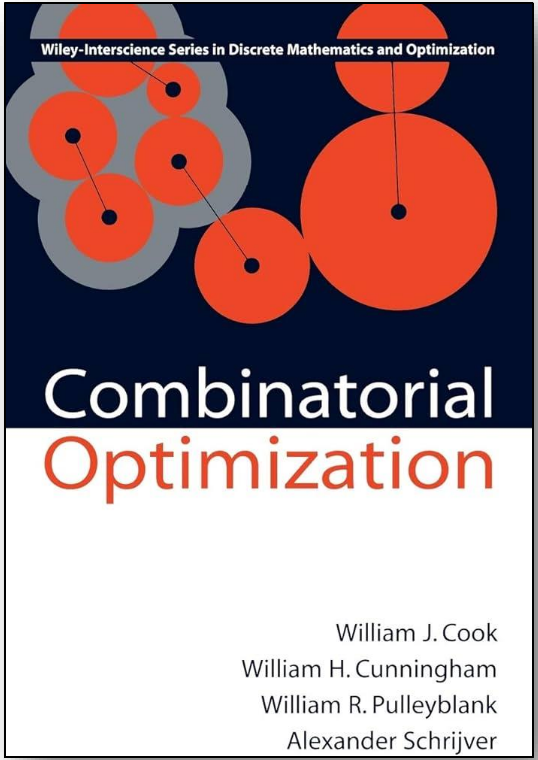
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Standardform
Lösung
(in)feasible
optimal
unbounded

Literatur



Hauptreferenz



Die Simplex Methode

Ein Beispiel-LP

$$\begin{array}{rrrrl} max & 5x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + & 3x_2 + & x_3 & \leq 5 \\ & 4x_1 + & x_2 + & 2x_3 & \leq 11 \\ & 3x_1 + & 4x_2 + & 2x_3 & \leq 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & \geq 0 \end{array}$$

Bei jeder gültigen Lösung ist die Differenz zwischen der linken und rechten Seite der Ungleichungen nicht-negativ.

$\Rightarrow$ Führe Variablen ein, die diesen Unterschied angeben!

Diese Variablen heißen **Slack-Variablen**.

Ein Beispiel-LP mit Slack Variablen

$$
\begin{array}{rrrrrr}
max & \zeta = & & 5x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 \\
\text{s.t.} & w_1 = & 5 - & 2x_1 - & 3x_2 - & x_3 \\
 & w_2 = & 11 - & 4x_1 - & x_2 - & 2x_3 \\
 & w_3 = & 8 - & 3x_1 - & 4x_2 - & 2x_3 \\
 & & & \multicolumn{2}{r}{w_1, w_2, w_3, x_1, x_2, x_3} & \geq 0
\end{array}
$$

Bei jeder gültigen Lösung ist die Differenz zwischen der linken und rechten Seite der Ungleichungen nicht-negativ.

$\Rightarrow$ Führe Variablen ein, die diesen Unterschied angeben!

Diese Variablen heißen **Slack-Variablen**.

Idee: Starte nun mit irgendeiner Lösung und schaue, wie diese Verbessert werden kann!

Startlösung und erste Verbesserung

$$
\begin{array}{llrrrr}
max & \zeta = & & 5x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 \\
\text{s.t.} & w_1 = & 5 - & 2x_1 - & 3x_2 - & x_3 \\
 & w_2 = & 11 - & 4x_1 - & x_2 - & 2x_3 \\
 & w_3 = & 8 - & 3x_1 - & 4x_2 - & 2x_3 \\
 & & & & w_1, w_2, w_3, x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Eine gültige Lösung ist
$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{w}_3) = (0,0,0,5,11,8)$

Wie können wir das verbessern?

Betrachte bspw. x_1. Um wieviel dürfen wir die Variable erhöhen, sodass alle Slack-Variablen nicht negativ werden?

$$
w_1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_1 \leq \frac{5}{2},} \qquad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{11}{4}, \qquad w_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq \frac{8}{3}
$$

Setze $x_1 = \frac{5}{2}$, damit wird $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \frac{1}{2}$

Eine bessere Lösung. Und nun?

$$
\begin{array}{llrrrr}
max & \zeta = & & 5x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 \\
\text{s.t.} & w_1 = & 5 - & 2x_1 - & 3x_2 - & x_3 \\
& w_2 = & 11 - & 4x_1 - & x_2 - & 2x_3 \\
& w_3 = & 8 - & 3x_1 - & 4x_2 - & 2x_3 \\
& & & & w_1, w_2, w_3, x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Eine weitere gültige Lösung ist

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{w}_3) = \left(\frac{5}{2}, 0,0,0,1, ½\right)$$

Lösungswert: 12.5

Wie können wir das verbessern?
Da w_1 bereits 0 ist, können wir x_2 und x_3 nicht mehr wie x_1 einfach erhöhen. Oder?

Dictionaries

$$
\begin{array}{rrrrrr}
max & \zeta = & & 5x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 \\
\text{s.t.} & w_1 = & 5 - & 2x_1 - & 3x_2 - & x_3 \\
 & w_2 = & 11 - & 4x_1 - & x_2 - & 2x_3 \\
 & w_3 = & 8 - & 3x_1 - & 4x_2 - & 2x_3
\end{array}
$$

Definition:
Das obige Layout ist ein **Dictionary**. Zielfunktion und Variablen auf der linken Seite werden durch Variablen auf der rechten Seite definiert.

- Abhängige Variablen (links) heißen **Basisvariablen** (basic variables).
- Unabhängige Variablen (rechts) heißen **Nichtbasisvariablen** (nonbasic variables)
- Durch setzen der Nichtbasisvariablen auf 0, bekommen wir eine **Basislösung** (basis solution, dictionary solution).

Passe das Dictionary an!

$$\begin{array}{rrrrrr}
\max & \zeta = & & 5x_1 + & 4x_2 + & 3x_3 \\
\text{s.t.} & w_1 = & 5 - & 2x_1 - & 3x_2 - & x_3 \\
& w_2 = & 11 - & 4x_1 - & x_2 - & 2x_3 \\
& w_3 = & 8 - & 3x_1 - & 4x_2 - & 2x_3
\end{array}$$

Und $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}w_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$

$$\begin{array}{rrrrrr}
\max & \zeta = & 12.5 - & 2.5w_1 - & 3.5x_2 + & 0.5x_3 \\
\text{s.t.} & x_1 = & 2.5 - & 0.5w_1 - & 1.5x_2 - & 0.5x_3 \\
& w_2 = & 1 + & 2w_1 + & 5x_2 - & 0x_3 \\
& w_3 = & 0.5 + & 1.5w_1 + & 0.5x_2 - & 0.5x_3
\end{array}$$

Zweite Iteration!

$$\begin{array}{lrrrrr} \max & \zeta = & 12.5 - & 2.5w_1 - & 3.5x_2 + & 0.5x_3 \\ \text{s.t.} & x_1 = & 2.5 - & 0.5w_1 - & 1.5x_2 - & 0.5x_3 \\ & w_2 = & 1 + & 2w_1 + & 5x_2 - & 0x_3 \\ & w_3 = & 0.5 + & 1.5w_1 + & 0.5x_2 - & 0.5x_3 \end{array}$$

Eine weitere gültige Lösung ist

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{w}_3) = \left(\frac{5}{2}, 0,0,0,1, ½\right)$$

Lösungswert: 12.5

Wie können wir das verbessern?

$$x_1 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 5, \qquad w_2 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \infty, \qquad w_3 \geq 0 \boxed{\Rightarrow x_3 \leq 1}$$

Setze $x_3 = 1$, damit wird $w_3 = 0, w_2 = 1, x_1 = 2$. Passe das Dictionary wieder an!

Dritte Iteration!

$$
\begin{array}{llrrrr}
\max & \zeta = & 13 - & w_1 - & 3x_2 - & w_3 \\
\text{s.t.} & x_1 = & 2 - & 2w_1 - & 2x_2 - & w_3 \\
 & w_2 = & 1 + & 2w_1 + & 5x_2 - & 0w_3 \\
 & x_3 = & 1 + & 3w_1 + & x_2 - & 2w_3
\end{array}
$$

Eine weitere gültige Lösung ist
$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{w}_3) = (2,0,1,0,1,0)$

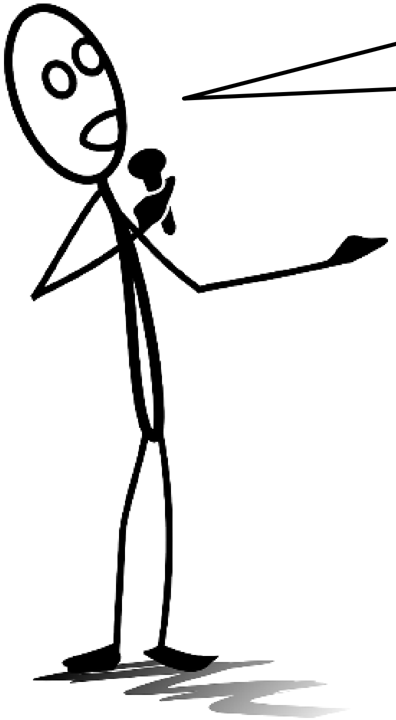
Lösungswert: 13

Können wir das verbessern?

Behauptung: Die Lösung ist optimal!

- Es gibt keine Nichtbasisvariable, die den Funktionswert erhöhen würde.
- Die Gleichung $\zeta = 13 - w_1 - 3x_2 - w_3$ wurde durch Äquivalenzumformungen erreicht.
- Dabei wurden nur Constraints verwendet!

Hintergrund



Bei den Iterationen handelt es sich um einen **Basistausch** über ein **Pivot**!

Und Allgemein?

Das Beispiel war recht klein und deckt evtl. nicht alle Fälle ab.

Wie machen wir das im Allgemeinen?

Schritt 1: LP zu Dictionary

Gegeben sei ein LP in Standardform:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i\,, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Umwandeln in ein Dictionary:

$$\zeta = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Schritt 1: LP zu Dictionary

Umwandeln in ein Dictionary:

$$\zeta = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\,, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Sei nun $\mathcal{N}, \mathcal{B} \subseteq \{1, 2, \ldots, n + m\}$ die Indexmenge der (Nicht-)Basisvariablen.

Dann ist zu Beginn:
$\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$
$\mathcal{B} = \{n + 1, n + 2, \ldots, n + m\}$

Mit dieser Notation lässt sich das Dictionary noch etwas anders aufschreiben!

Schritt 1: LP zu Dictionary

Umwandeln in ein Dictionary:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j \,, \qquad i \in \mathcal{B}$$

Die Koeffizienten im Vektor $\bar{c}$ heißen auch **reduzierte Kosten.**

Sei nun $\mathcal{N}, \mathcal{B} \subseteq \{1, 2, \dots, n+m\}$ die Indexmenge der (Nicht-)Basisvariablen.

Dann ist zu Beginn:
$\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$
$\mathcal{B} = \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$

Mit dieser Notation lässt sich das Dictionary noch etwas anders aufschreiben!

Der Balken über Konstanten bedeutet, dass diese sich über Iterationen verändern.

Schritt 2: Pivotschritt

Das Dictionary:

$$\zeta = \bar{\zeta} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{c}_j x_j$$

$$x_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in \mathcal{N}} \bar{a}_{ij} x_j\,, \qquad i \in \mathcal{B}$$

- Wähle nun $k \in \{j \in \mathcal{N} \mid \bar{c}_j > 0\}$.
- Existiert k nicht, dann sind wir optimal!
- Erhöhe nun x_k so weit wie möglich.

- Es muss für alle $i \in \mathcal{B}$ gelten:
$$x_i \leq \bar{b}_i - \bar{a}_{ik} x_k$$
- Da für ein $i \in \mathcal{B}$ der Wert x_i auf 0 gesetzt wird, erhalten wir $x_k \leq \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$.
- Wähle $\ell \in \mathcal{B}$ mit $\bar{a}_{\ell k} > 0$ und $\frac{\bar{b}_\ell}{\bar{a}_{\ell k}}$ kleinstmöglich.
- Setze $x_\ell = 0, x_k = \frac{\bar{b}_\ell}{\bar{a}_{\ell k}}$
- Passe Dictionary über den Variablentausch an!

Fragen I

Prinzipiell egal. Die Wahl des Pivots kann aber die Laufzeit beeinflussen. Dazu später mehr!

Prinzipiell egal. In dieser Situtation treten Degenerationen auf! Dazu später mehr.

Fragen II

Bisher sind die $\overline{b}_i$ immer positiv. Das muss im LP nicht immer sein, oder?

Ein weiteres Beispiel

$$
\begin{array}{rrrl}
\max & -2x_1 - & x_2 & \\
\text{s.t.} & -x_1 + & x_2 & \leq -1 \\
 & -x_1 - & 2x_2 & \leq -2 \\
 & & x_2 & \leq 1 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rrrr}
\zeta = & & -2x_1 - & x_2 \\
w_1 = & -1 + & x_1 - & x_2 \\
w_2 = & -2 + & x_1 + & 2x_2 \\
w_3 = & 1 - & & x_2
\end{array}
$$

Die Lösung (0,0,-1,-2,1) ist nicht gültig!
Das LP hat aber eine Lösung (z.B. $x_1 = 2, x_2 = 0$)

Generell: Das Dictionary ist genau dann gültig, wenn alle $\bar{b}_i > 0$.
Wie bekommen wir ein gültiges Dictionary?

Ein Hilfsproblem

Wir erstellen uns ein Hilfsproblem, für welches

1) ein gültiges Dictionary einfach zu finden ist.
2) eine gültige Lösung für unser originales Problem bereitstellt, oder zeigt, dass keine gültige Lösung existiert

$$\boxed{\begin{aligned} &\max -x_0 \\ &\text{s.t.} \\ &\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) - x_0 \leq b_i, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ &\qquad\qquad\qquad x_j \geq 0, \qquad j \in \{0, 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}}$$

Warum hat dieses LP **immer** eine Lösung?

Wann zeigt dieses LP, dass für das **Ursprungsproblem keine Lösung** existiert?

Ein Dictionary für das Hilfsproblem

$$\max -x_0$$

s.t.

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) - x_0 \le b_i, \qquad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j \in \{0,1, 2, \dots, n\}$$

1. Erstelle das Dictionary wie gehabt.
2. Führe einen Pivotschritt mit x_0 und der Schlupfvariablen mit kleinstem, negativen b_i.

Das erhaltene Dictionary ist dann gültig!

Am Beispiel

$$
\begin{aligned}
\xi &= && - && x_0 && && \\
w_1 &= &-1 &+ && x_0 + && x_1 - && x_2 \\
w_2 &= &-2 &+ && x_0 + && x_1 + && 2x_2 \\
w_3 &= &1 &+ && x_0 - && && x_2
\end{aligned}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\xi &= &-2 &- && w_2 + && x_1 + && 2x_2 \\
w_1 &= &1 &+ && w_2 && - && 3x_2 \\
x_0 &= &2 &+ && w_2 - && x_1 - && 2x_2 \\
w_3 &= &3 &+ && w_2 - && x_1 - && 3x_2
\end{aligned}
$$

Nach dem Pivotschritt ist das Dictionary gültig und wir können fortfahren!

Situation nach Simplex

$$
\begin{array}{rrrrr}
\xi = & -2 - & w_2 + & x_1 + & 2x_2 \\
w_1 = & 1 + & w_2 & - & 3x_2 \\
x_0 = & 2 + & w_2 - & x_1 - & 2x_2 \\
w_3 = & 3 + & w_2 - & x_1 - & 3x_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
\xi = & & - & x_0 & \\
x_2 = & 0.33 & & - 0.33\, w_1 + & 0.33 w_2 \\
x_1 = & 1.33 - & x_0 + & 0.67\, w_1 + & 0.33 w_2 \\
w_3 = & 0.67 + & x_0 + & 0.33\, w_1 - & 0.33 w_2
\end{array}
$$

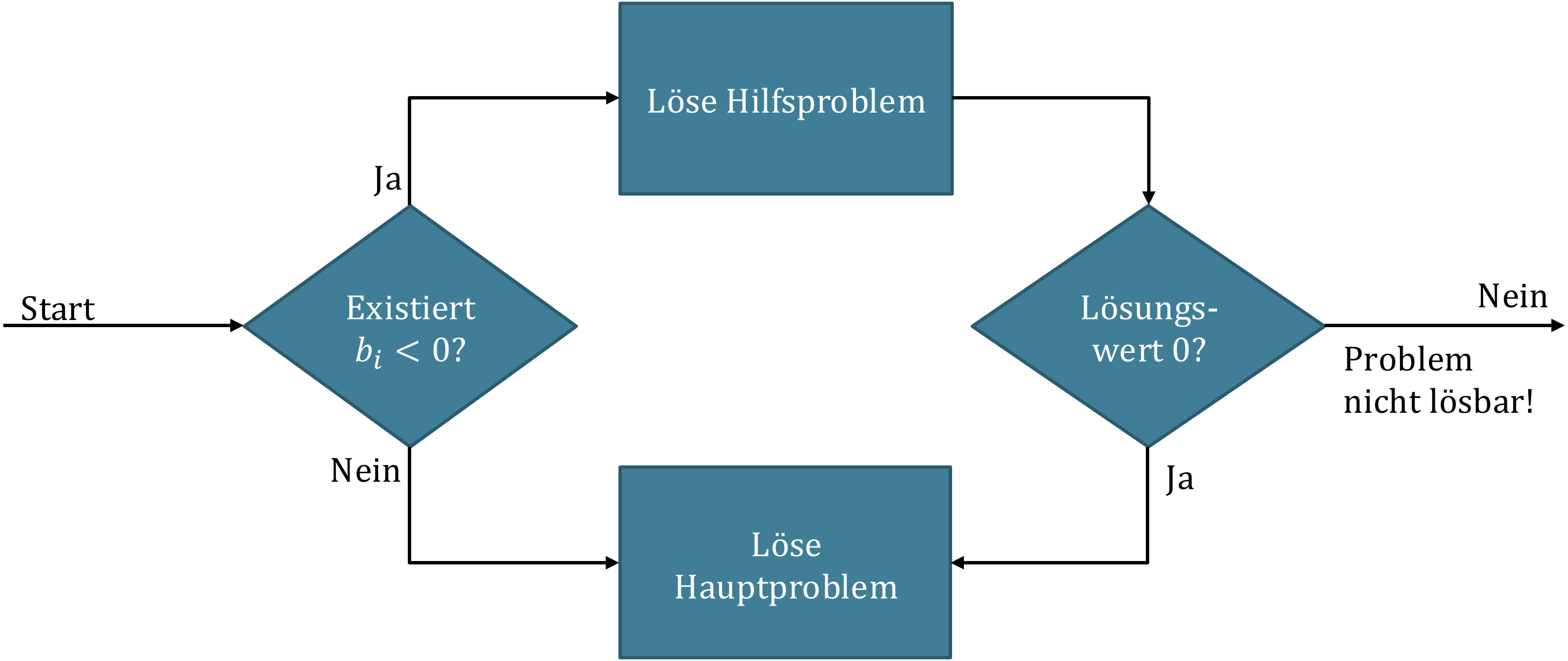
Lösungswert ist 0, also ist unser ursprüngliches LP gültig. Entferne x_0 wieder und benutze:

$$\zeta = -2x_1 - x_2 = -3 - w_1 - w_2$$

$$
\begin{array}{rrrr}
\zeta = & -3 - & w_1 - & w_2 \\
x_2 = & 0.33 - & 0.33\, w_1 + & 0.33 w_2 \\
x_1 = & 1.33 + & 0.67\, w_1 + & 0.33 w_2 \\
w_3 = & 0.67 + & 0.33\, w_1 - & 0.33 w_2
\end{array}
$$

$x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$ ist sogar direkt die optimale Lösung!

2-Phasen Simplex



Fragen III


Okay, Test für Infeasible ist vorhanden.
Was ist mit Unbeschränktheit?

Noch ein Beispiel!

$$
\begin{array}{rrrrr}
\zeta = & 0 + & 2x_1 - & x_2 + & 1x_3 \\
w_1 = & 4 + & 5x_1 - & 2x_2 + & 1x_3 \\
w_2 = & 10 + & 1x_1 - & 2x_2 - & 2x_3 \\
w_3 = & 7 + & & 2x_2 - & 3x_3 \\
w_4 = & 6 + & 2x_1 + & 2x_2 - & 4x_3 \\
w_5 = & 6 + & 3x_1 + & & 3x_3
\end{array}
$$

Wie wählt man hier das Pivot?

x_1 sieht interessant aus!

Egal wie hoch man x_1 wählt, die Constraints sind immer erfüllt!

Da x_1 positiv in ζ vorkommt, kann der Funktionswert nur beliebig wachsen.

Zur Erinnerung: Für ein $k \in \mathcal{N}$ mit $\bar{c}_k > 0$, wähle $j \in \left\{ i \in \mathcal{B} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \text{ und } \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \text{ minimal} \right\}$.

Lemma: Ist für ein $k \in \mathcal{N}$ mit $\bar{c}_k > 0$ die Menge $\left\{ i \in \mathcal{B} \mid \bar{a}_{ik} > 0 \text{ und } \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \text{ minimal} \right\}$ leer, dann ist das LP unbeschränkt.

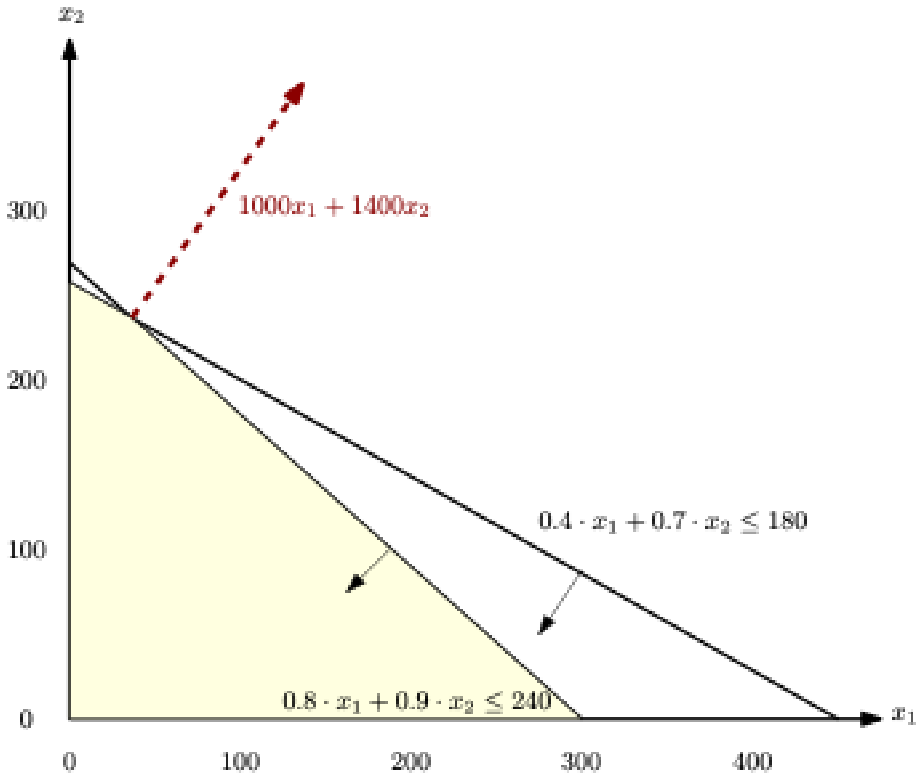
Simplex und Geometrie

Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

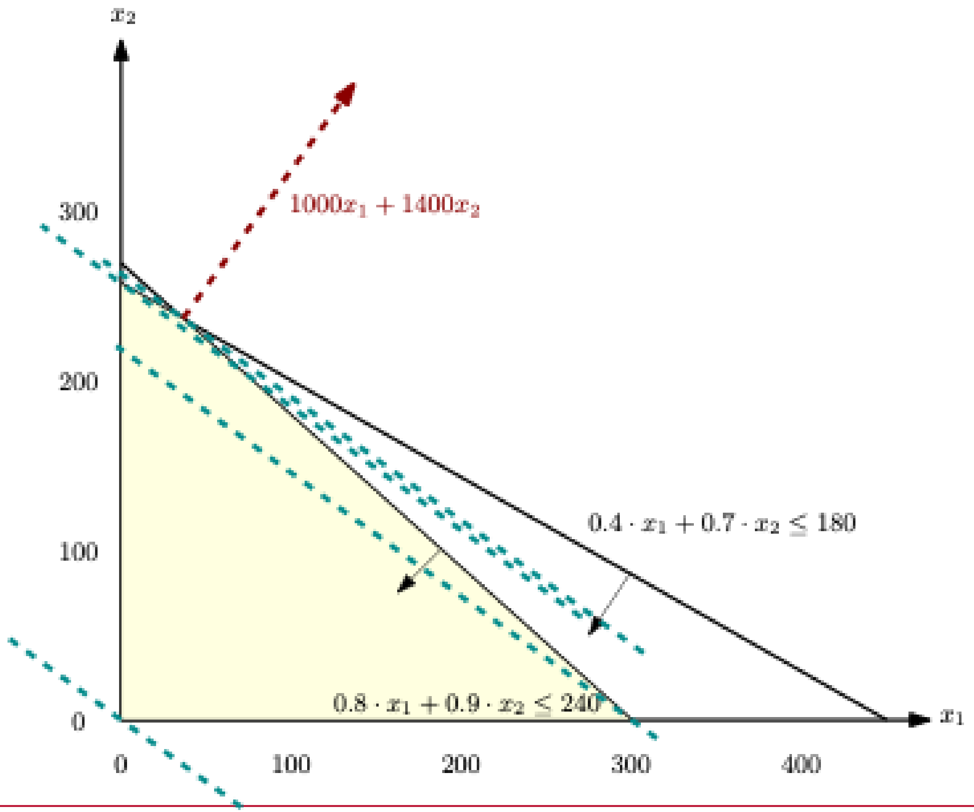


Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

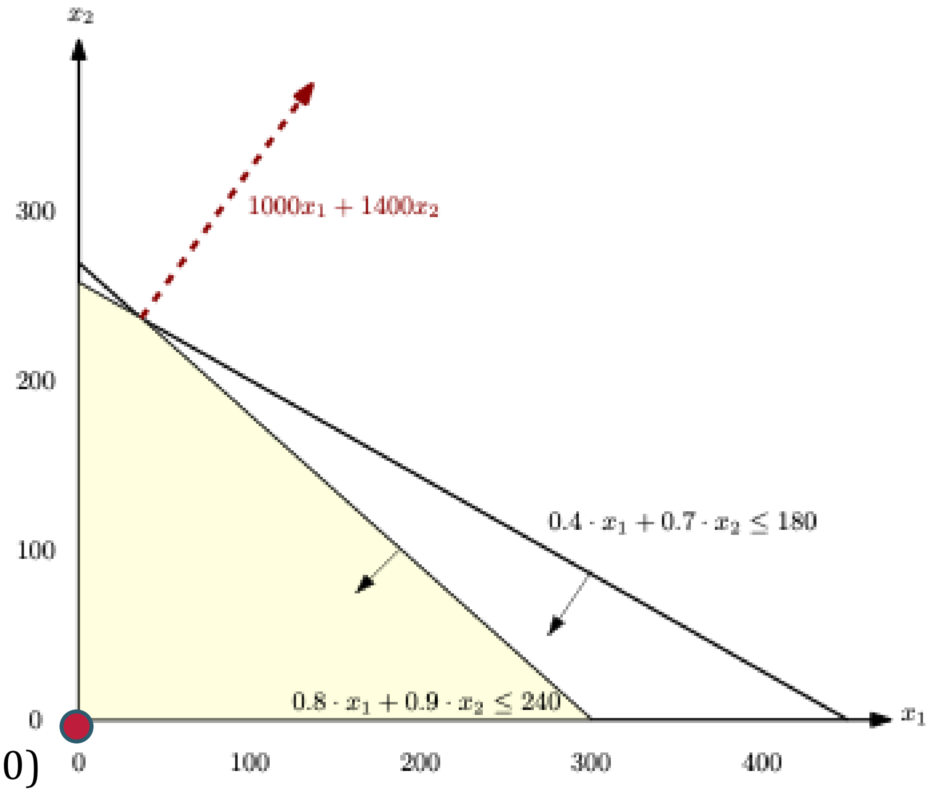


Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



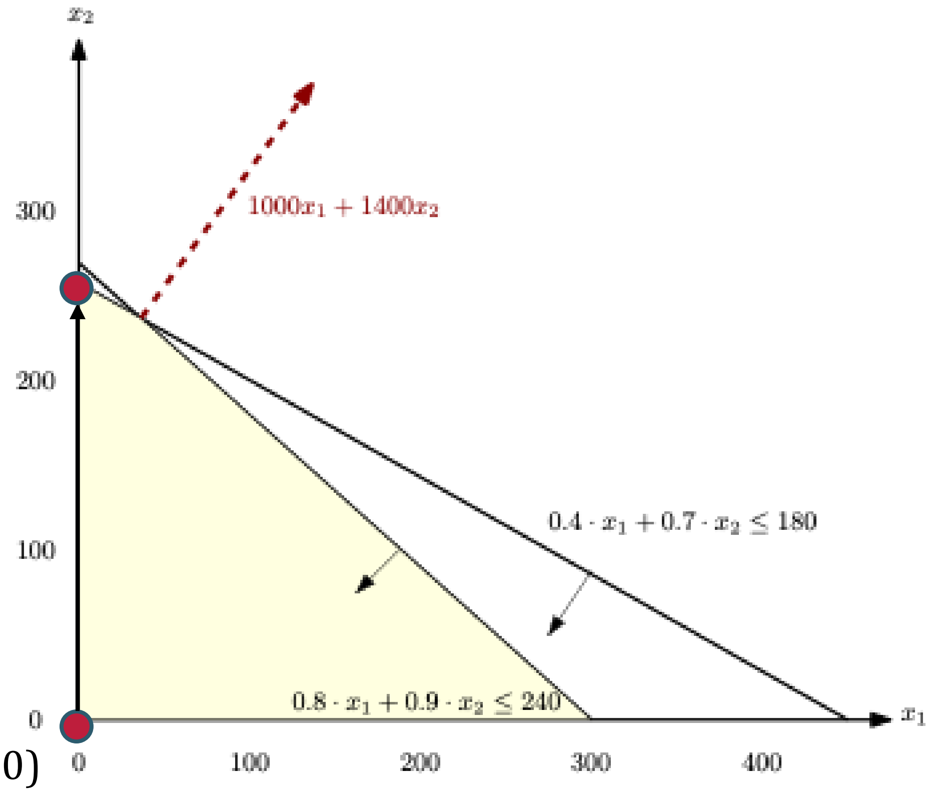
Simplex startet im Punkt (0,0)

Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



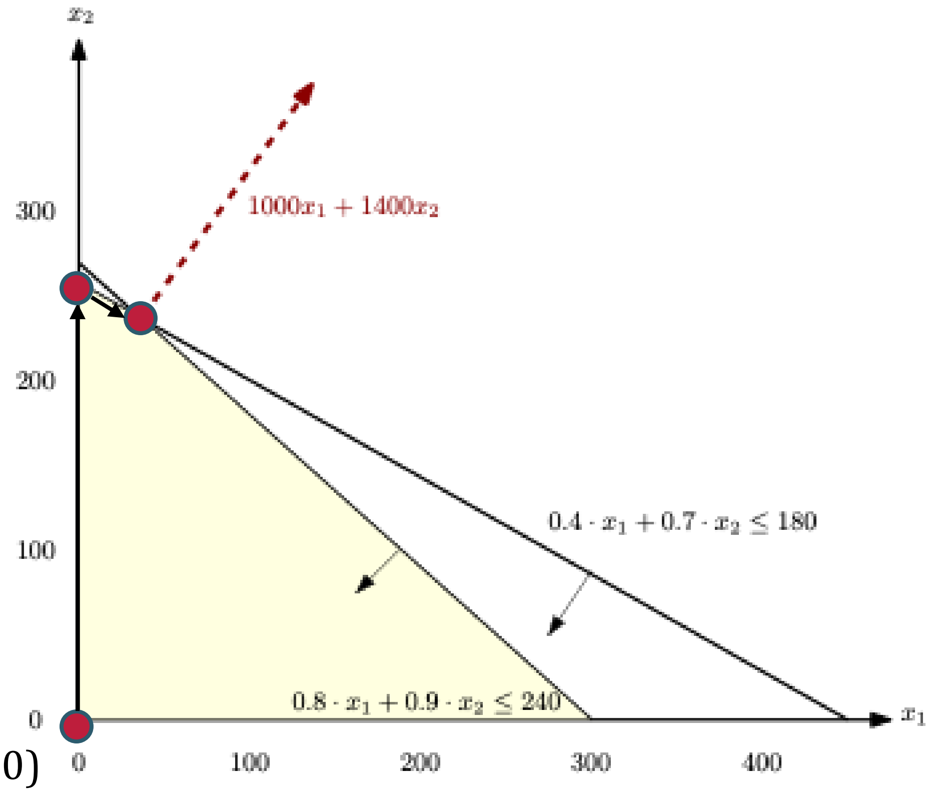
Simplex startet im Punkt (0,0)

Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Simplex startet im Punkt (0,0)

Zusammenhang zwischen Simplex und Geometrie

Zunächst:
Jeder Constraint beschneidet den Lösungsraum mit einer Halbebene.

Der Simplex-Algorithmus bewegt sich entlang der Extrempunkte zum Optimum!

➔ Extrempunkte entsprechen Basislösungen!