Mathematatische Methoden der Algorithmik – Vorlesung #00

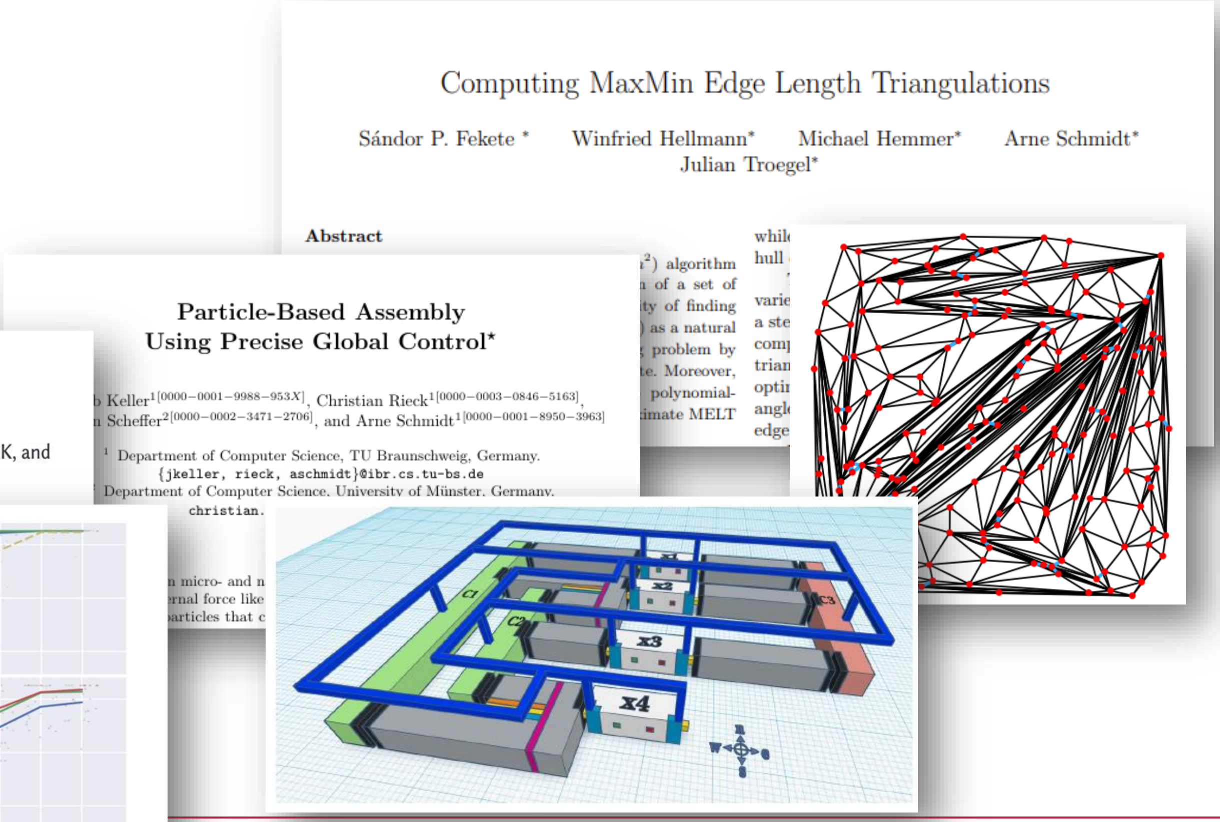
Arne Schmidt

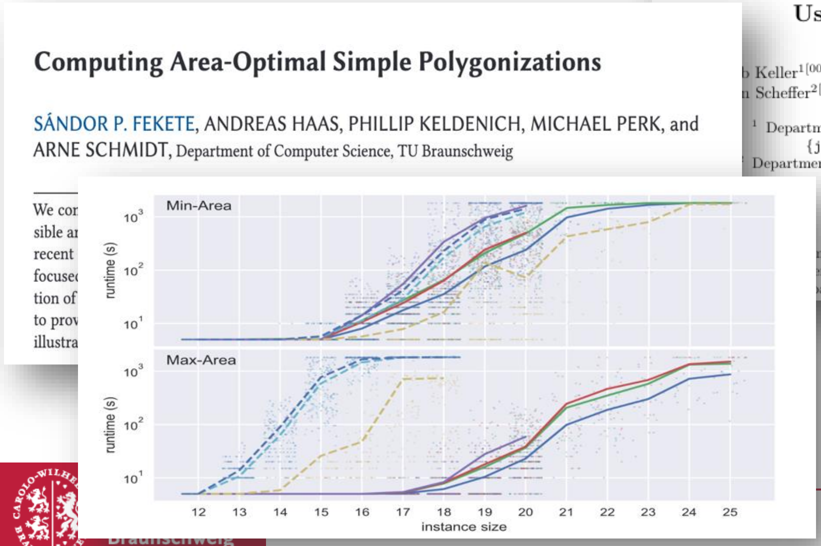
Vorstellung

Interessen

- Geometrische Optimierung,
- Programmierbare Materie,
- Komplexitätstheorie

#GernePerDu





Organisation

Vorlesung + Gr. Übung

- Grundlagen

- Vertiefungen
- Exkurse
- Beispiele

Arne Schmidt

+ Kl. Übung

- Besprechung Hausaufgaben

Fragen

Inhaltlich oder allgemeiner Ablauf	Vorlesung / große Übung
Zu Übungsblättern	Kleine Übungen
Individuelle Fragen	**Immer per Mail** an aschmidt@ibr.cs.tu-bs.de
Sprechstunde	Montags, 09:45 Uhr im Raum IZ 333 (Am besten vorher per Mail ankündigen)

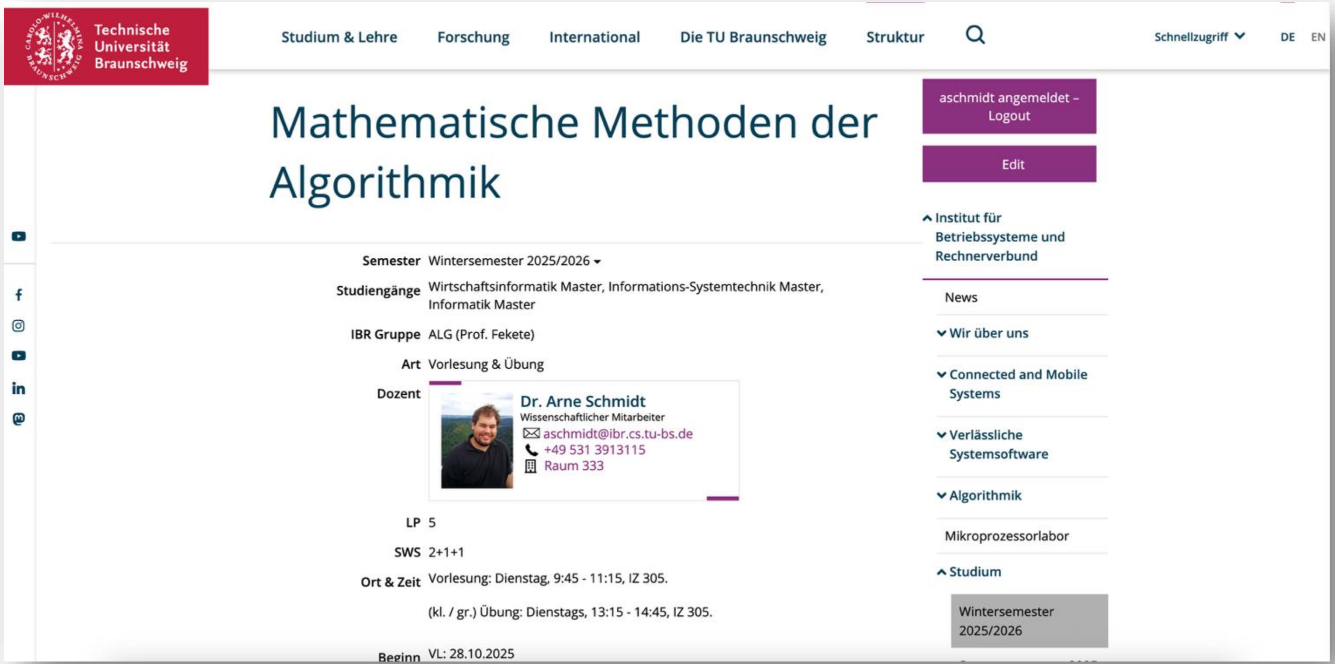
Semesterplan (vorläufig)

Datum (VL / Ü)	VL	VL / Ü Inhalt	Hausaufgabe (Ausgabe, Mi.)	Gr. Ü / Kl. Ü.
21.10.	-			
28.10	0	Orga + Einleitung		
04.11.	1	Simplex		G
11.11.	2	Fundamentalsatz	HA1	
18.11.	3	Dualität I		G
25.11	4	Dualität II	HA2	K
02.12.	5	Matrix Notation		G
09.12.	6	Implementationen	HA3	K
16.12.	7	Allgemeine LPs		G
23.12.	-			
30.12.	-			
06.01.	8	Integer Programming	HA4	K
13.01.	9	Graphenprobleme		G
20.01.	10	Matching Polytop	HA5	K
27.01.	11	Geometrische Probleme		G
03.02.	12	Zusammenfassung		K

Unterlagen

- Öffentlich zugänglich
- Wird enthalten:
  - Slides (VL / UE)
  - Hausaufgaben

https://www.ibr.cs.tu-bs.de/courses/ws2526/mma/index.html



Mailingliste

https://lists.ibr.cs.tu-bs.de/postorius/lists/mma.ibr.cs.tu-bs.de/

Postorius Listen Archiv Anmelden Registrieren

MMA mma@ibr.cs.tu-bs.de

Zusammenfassung

Mathematische Methoden der Algorithmik - WS24/25

Mathematische Methoden der Algorithmik - WS24/25. Über diese Liste werden für die Vorlesung, Übung, und Hausaufgaben wichtige Informationen verteilt. Alle Teilnehmer sollte sich eintragen (auch wenn ihr auch noch nicht sicher seid). Ein Austragen ist problemlos jederzeit möglich.

Benutzen Sie folgende Adresse, um die Listen-Besitzer zu kontaktieren: *mma-owner@ibr.cs.tu-bs.de*

You have to sign in to visit the archives of this list.

Mitglied werden/Mitgliedschaft beenden

To subscribe or unsubscribe from this list, please sign in first. If you have not previously signed in, you may need to set up an account with the appropriate email address.

Anmelden

You can also subscribe without creating an account. If you wish to do so, please use the form below.

Ihre E-Mail-Adresse

Ihr Name (optional)

Abonnieren

Hausaufgaben

Hausaufgaben

Insgesamt 5 Präsenzblätter.

Studienleistung ist bestanden.

Aufgaben werden nur besprochen und diskutiert.

Prüfungsform?

Prüfungsform voraussichtlich Klausur

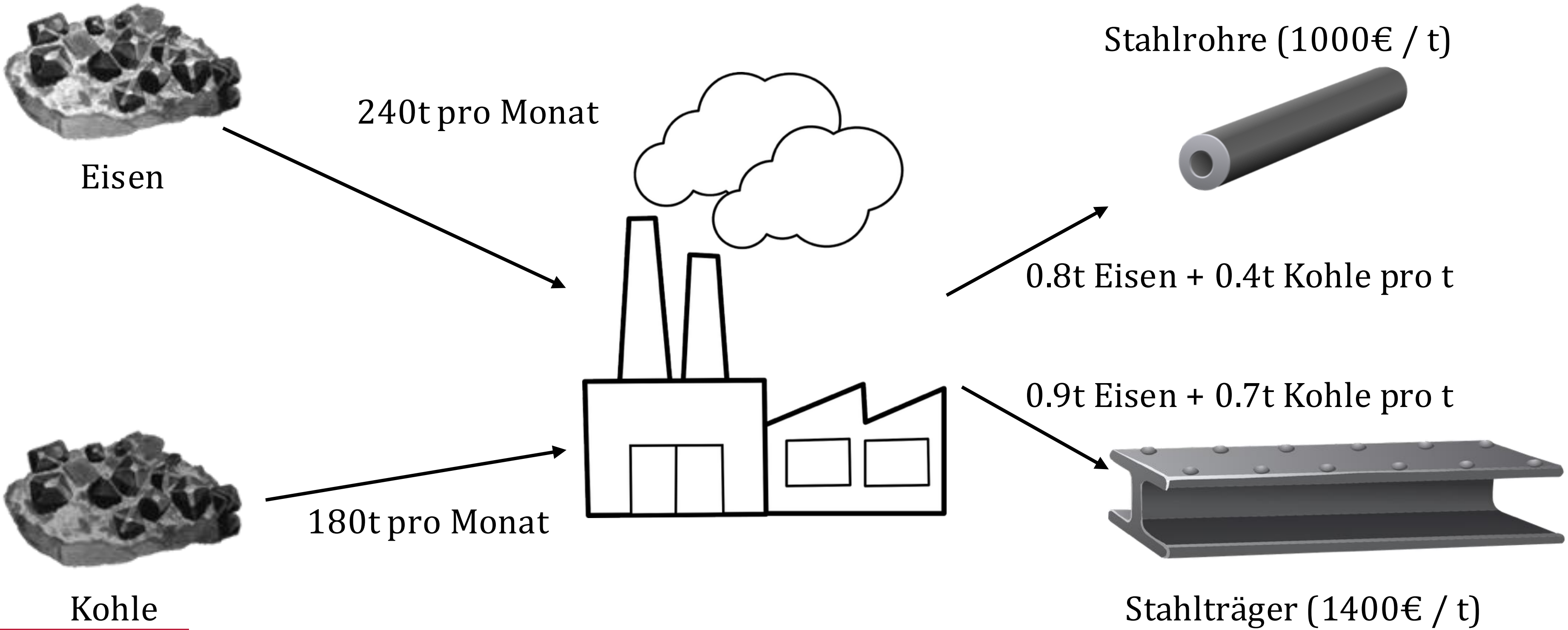
Mögliche Zeiträume:
- 09. – 13.02.
- 09. – 20.03.

Uhrzeit:
- Eher Vormittags?
- Eher Nachmittags?

Fragen?

Kapitel 1 – Lineare Programme

Fabrik – Bestmöglicher Profit?



Etwas mathematischer

Maximiere: $1000 * \text{Rohre} + 1400 * \text{Träger}$ **Profit**

$0.8 * \text{Rohre} + 0.9 * \text{Träger} \leq 240$ **Eisenlimit**

$0.4 * \text{Rohre} + 0.7 * \text{Träger} \leq 180$ **Kohlelimit**

Reicht das zur Beschreibung?

$\text{Rohre} \geq 0$
$\text{Träger} \geq 0$

Eine Lösung:
Rohre = 0
Träger = 257,14285…
Umsatz = 360000

Andere Lösung:
Rohre = 30
Träger = 240
Umsatz = 366000

Geht das besser?

Etwas anders

Maximiere $\boxed{(1000, 1400)} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} Rohre \\ Träger \end{pmatrix}}$ **Profit**

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}} \boxed{\begin{matrix} \begin{pmatrix} Rohre \\ Träger \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} Rohre \\ Träger \end{pmatrix} \end{matrix}} \begin{matrix} \leq \\ \\ \geq \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}}$$

Eisenlimit
Kohlelimit

Allgemein

Maximiere $c^T x$

Unter Bedingungen

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Definition

Maximiere $c^T x$

Unter Bedingungen

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Ein lineares Programm (LP) besteht aus einer linearen Zielfunktion (**objective function**) $\zeta = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = c^Tx$, welche maximiert oder minimiert werden soll.
Dabei ist:

- c der **Kostenvektor**
- x ein **Variablenvektor** (Entscheidungsvariablen)

Zusätzlich besitzt ein LP m Nebenbedingungen (Constraints) in der Form

$$Ax \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b$$

Dabei ist

- A eine $m \times n$-**Koeffizientenmatrix**
- b ein n-dimensionaler **Vektor von Konstanten**

Standardform

Maximiere $c^T x$

Unter Bedingungen

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Ein lineares Programm (LP) in **Standardform** besteht aus einer linearen Zielfunktion (objective funktion) $\zeta = c^T x$, welche **maximiert** werden soll. Dabei ist:

- c ein n-dimensionaler **Kostenvektor**
- x ein n-dimensionaler **Variablenvektor** (Entscheidungsvariablen)

Zusätzlich besitzt ein LP m Nebenbedingungen (Constraints) in der Form

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Dabei ist

- A eine $m \times n$-**Koeffizientenmatrix**
- b ein n-dimensionaler **Vektor von Konstanten**

Lemma: Jedes LP lässt sich in Standardform bringen.

Feasibility und Optimalität

Eine Belegung von Variablen für ein LP heißt Lösung (**solution**).

- Eine Lösung ist gültig (**feasible**), wenn alle Constraints erfüllt werden.
- Eine Lösung heißt **optimal**, wenn der Lösungswert dem Maximum entspricht.

Besitzt ein LP keine gültige Lösung, so ist das LP ungültig (**infeasible**).
Besitzt ein LP Lösungen mit beliebig hohen Werten, dann ist das LP unbeschränkt (**unbounded**).

Lemma:
Ist ein LP feasible und bounded, dann hat das LP ein Optimum.

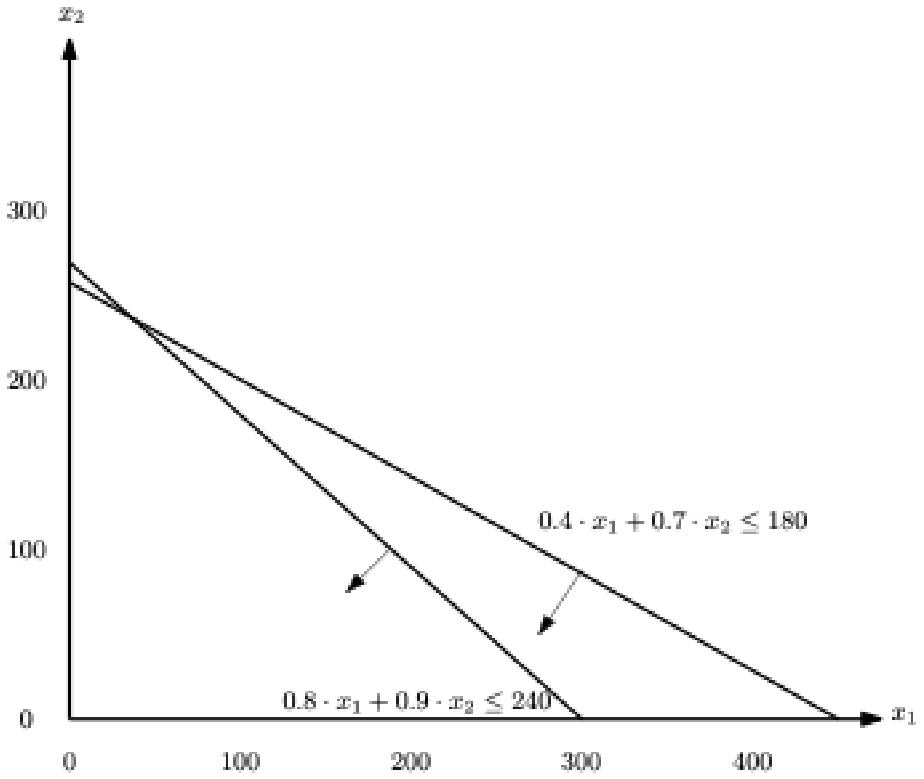
Beweis:
Sei X die Lösungsmenge. Da das LP beschränkt ist, existiert ein Supremum s.
Da c linear ist, wird die abgeschlossene Menge X auf eine abgeschlossene Menge c[X] abgebildet.
s ist entweder in c[X] oder ein Häufungspunkt. Da c[x] abgeschlossen ist, muss s in c[X] sein.

Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

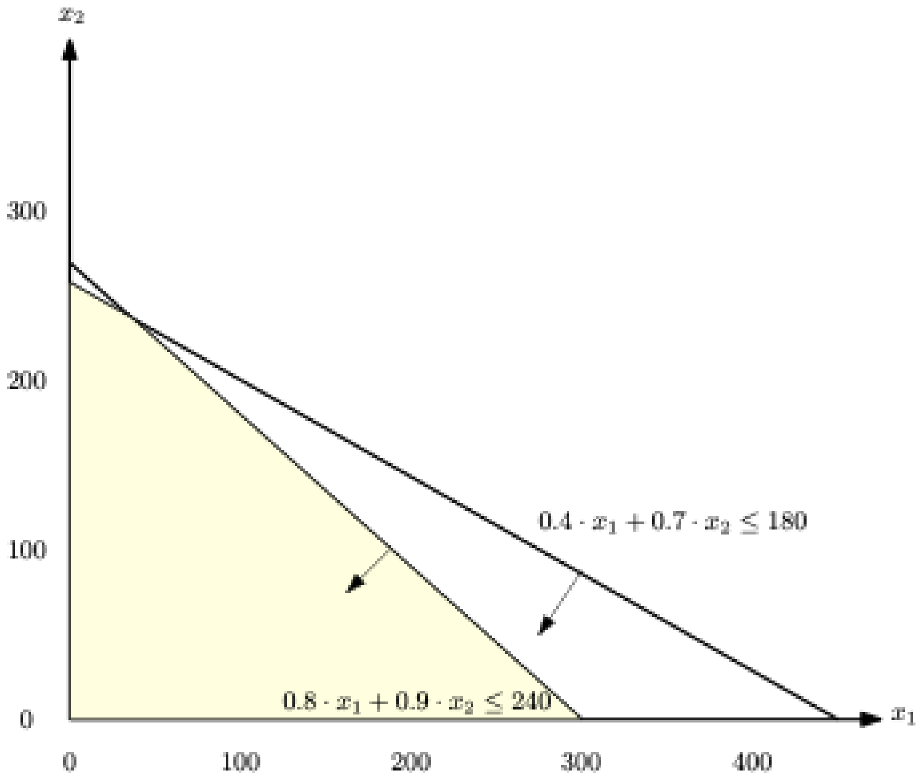


Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

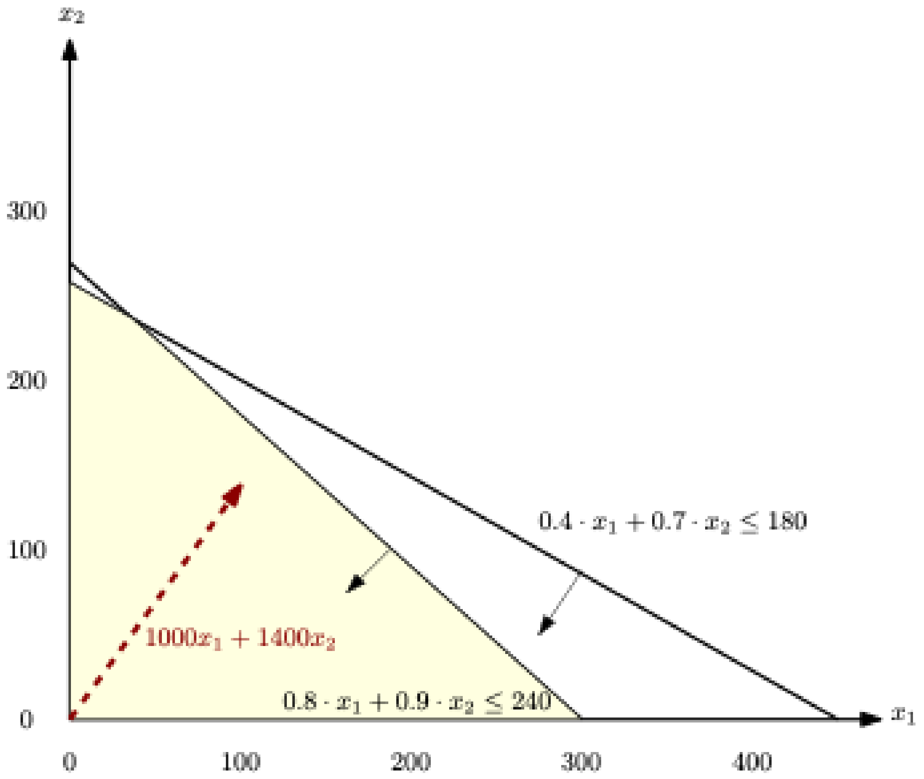


Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

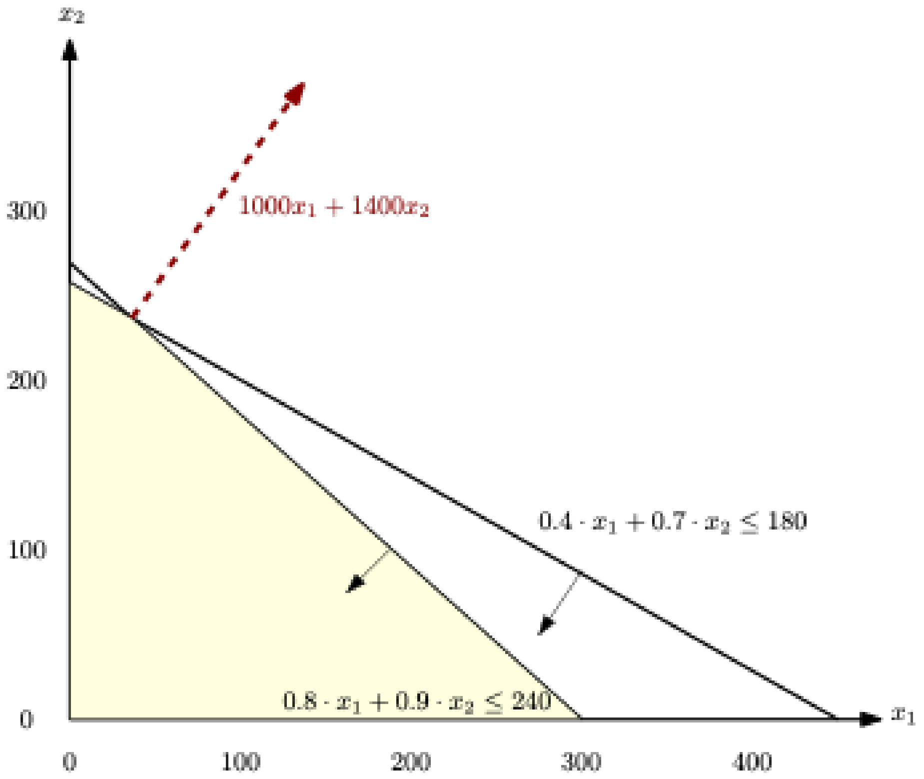


Graphische Darstellung

Maximiere: $(1000, 1400) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

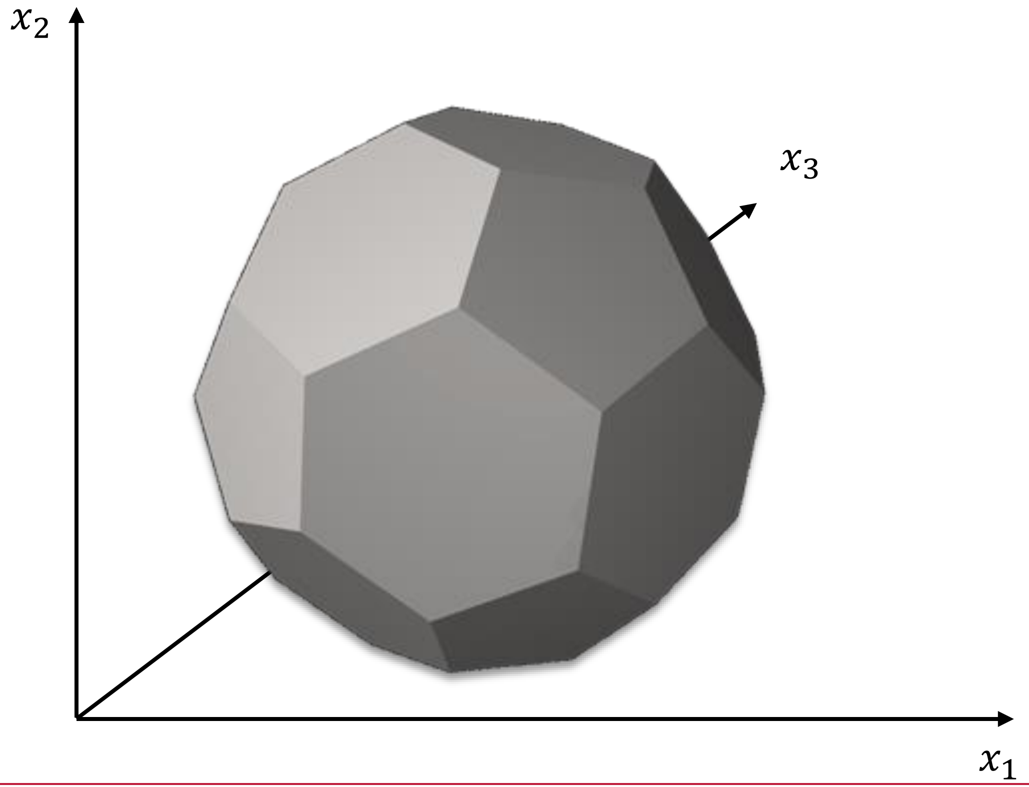
$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 240 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Mehr Variablen = mehr Dimensionen

- Jede Variable erhöht die Dimension des Lösungsraumes um eins.
- Constraints entsprechen Hyperebenen, die den Lösungsraum beschneiden.



Lemma:
Der Lösungsraum eines LPs ist immer konvex.

Fragen

Wie bestimmt man das Optimum?

Wie beweist man Optimalität?

Wie schnell geht das?

Was passiert, wenn wir ganzzahlig sein müssen?

Welche Techniken existieren sonst noch?