

Übung 4

①

- Simplex auf allg. LPs

- Recap

Betrachte folgendes LP.

$$\max 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4$$

$$\text{s.t.} \quad x_2 + x_4 \leq 6$$

$$-2 \leq 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 4$$

$$2x_1 - x_4 \leq 2$$

$$0 \leq x_1 \leq 3$$

$$-1 \leq x_2 \leq 4$$

$$0 \leq x_3 \leq 2$$

$$0 \leq x_4 \leq 4$$

Schreibe das initiale, allgemeine Dictionary dazu auf.

l	u		$\boxed{0}$ 3	$\boxed{-1}$ 4	$\boxed{0}$ 2	$\boxed{0}$ 4
		$z =$	$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2$			
$-\infty$	6	$w_1 =$	$x_2 + x_4 = -1$			
-2	4	$w_2 =$	$2x_1 - x_2 - x_3 = 1$			
$-\infty$	2	$w_3 =$	$2x_1 - x_4 = 0$			

Über welche Variable pivotisieren? Welche Variablen kommen überhaupt in Frage?

2

Eine Variable verbessert ZFW, wenn

(a) Variable an unterer Schranke + positiv in ZF

(b) Variable an oberer Schranke + negativ in ZF

Hier also nur x_1 und x_3 . Wir wählen x_1 und tauschen mit w_3 , denn

$$(1) x_1 \leq 3$$

$$(2) w_2 \rightarrow 4 \Rightarrow x_1 \leq \frac{3}{2}$$

$$(3) w_3 \rightarrow 2 \Rightarrow x_1 \leq 1$$

Dictionary nach Tausch:

l	u		$-\infty$	$\boxed{-1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$
			$\boxed{2}$	4	2	4
		$Z =$	$\frac{3}{2}w_3 - 2x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4$	$= 35$		
$-\infty$	6	$w_1 =$		x_2	$+ x_4$	$= -1$
-2	4	$w_2 =$	$w_3 - x_2 - x_3 + x_4$	$= 3$		
0	3	$x_1 =$	$\frac{1}{2}w_3$		$+ \frac{1}{2}x_4$	$= 1$

Nun kann nur über x_3 pivotisiert werden.

$$(1) x_3 \leq 2$$

$$(2) w_2 \rightarrow -2 \Rightarrow x_3 \leq 5$$

Es findet also kein Tausch statt! x_3 erreicht einfach seine obere Schranke.

3

l	u	$-∞$	$\boxed{1}$	0	$\boxed{0}$
		$\boxed{2}$	4	$\boxed{2}$	4
	$z =$	$\frac{3}{2}w_3 - 2x_2 + 3x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 7$			
$-∞$	6	$w_1 =$	x_2	$+ x_4 = -1$	
-2	4	$w_2 =$	$w_3 - x_2 - x_3$	$+ x_4 = 1$	
0	3	$x_1 =$	$\frac{1}{2}w_3$	$+ \frac{1}{2}x_4 = 1$	

Lösung des LPs ist also

$$(1, -1, 2, 0) =: (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$$

Recap

LP in Standardform

$$\max c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Jedes LP kann in Standardform transformiert werden.

In Dictionaryform

$$z = \bar{z} + \bar{c}^T x$$

$$w = \bar{b} - \bar{A}x$$

zu Beginn

$$\bar{b} := b, \quad \bar{c} = c$$

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{A} = A$$

Simplex:

Tausche iterativ eine Variable in die Basis, welche den ZFW verbessert.

Überblick behalten!

- Wann ist primales Dictionary

- infeasible?
- degeneriert?

- Woran erkennt man, dass das LP

- unbeschränkt ist?
- infeasible ist? $\rightarrow$ Phase I!

Dualität:

Idee: Bestimme über Ungleichungen eine obere Schranke für das LP.

⇒ Ein neues LP mit einer min-ZF.

Generell

$$\begin{array}{ll} \max c^T x & \min b^T y \\ \text{s.t. } Ax \leq b & \leftrightarrow \text{s.t. } A^T y \geq c \\ x \geq 0 & y \geq 0 \end{array}$$

Wie sieht das duale LP aus, wenn das primale LP nicht in Standardform ist?

Wichtige Sätze

1. Starke Dualität $\cancel{c^T x^*} = b^T y^*$
für opt. Lösungen x^* für das primale und y^* für das duale LP.

2. kompl. Schlupf: Bei opt. Lsg:

Produkt aus primaler Variable und dualen Schlupf ist 0.

Produkt aus dualer Variable und primalem Schlupf ist 0.

⇒ Nutze kompl. Schlupf, um Optimalität zu zeigen.

⇒ Nutze kompl. Schlupf, um Eigenschaften opt. Lösungen herzuleiten.

(initiales)

Duales Dictionary

$$- \xi = -\bar{\xi} - \bar{b}^T y$$

$$z = -\bar{c} - \bar{A}^T y$$

Eigenschaft:

Dictionary ist negativ
transponiert zum primalen Dict!

⇒ Führe Simplex auf dualem LP aus.

Dafür reicht uns die Kenntnis des primalen
Dictionaryes!

Phase I - Möglichkeiten

- Hilfsproblem mit x_0

- Ändere Zielfunktion des primalen (wähle $c' \leq 0$)
oder des dualen (wähle $b' \geq 0$)

↳ Ändern der ZF ändert die Menge der gültigen
Lösungen nicht!

Allgemeine LPs

↳ benutzt untere und obere Schranken für Constraints
und Variablen gleichzeitig

↳ wie sehen hier degenerierte Basislösungen aus?

Pivotisierungsregeln!

↳ Zykeln verhindern (notfalls auch per Perturbation)

↳ Steepest Edge

↳ Größter Koeffizient

↳ ...

↳ Partial Pricing: Betrachte nur eine Auswahl von Variablen für
ein paar Iterationen.