Übungsblatt 5

Besprechung der Aufgaben erfolgt am 02.03.26.

Präsenzaufgabe 1 (Dominating Set): **(1+1+2+2 Punkte)**
Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Eine *dominierende Menge* $D \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, sodass für jeden Knoten $v \in V$ entweder $v \in D$ gilt oder ein Nachbar $w \in N(v)$ mit $w \in D$ existiert. Dabei ist $N(v)$ die Menge aller zu v benachbarten Knoten. Ziel ist es eine möglichst kleine dominierende Menge zu finden.

a) Modelliere das Problem als IP.

b) Eine *unabhängig Menge* $I \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, welche paarweise nicht in G benachbart sind. D.h. für je zwei Knoten $u, v \in I$ gilt $\{u, v\} \notin E$.

   Wie lautet ein zusätzlicher Constraint, um eine unabhängige dominierende Menge zu finden?

c) Ein Graph ist *zusammenhängend*, wenn zwischen je zwei Knoten ein Pfad existiert. Wir möchten nun eine Menge von Constraints entwickeln, sodass eine zusammenhängende dominierende Menge gefunden wird. Der Graph $\bar{G}$, den wir auf Zusammenhang prüfen wollen, ist abhängig davon, welche Knoten in einer dominierenden Menge liegen. Es ergibt also Sinn, auch Kanten in die Variablenmenge mit aufzunehmen. Sei dazu $y_e \in \{0, 1\}$, ob die Kante $e \in E$ in dem Graphen $\bar{G}$ liegt.

   (i) Gib einen Constraint an, welcher für zwei Knoten $u, v \in V$ die Variablen x_u und x_v auf 1 setzt, wenn $y_{u,v} = 1$ gilt. Begründe kurz die Korrektheit des Constraints.

   (ii) Gib einen Constraint an, welcher für jedes Paar $(s, t) \in V \times V$ und jede Teilmenge $S \subsetneq V$ mit $s \in S$ und $t \notin S$ folgendes prüft: Ist $x_s = 1$ und $x_t = 1$, dann muss für mindestens eine Kante $e \in \delta(S)$ die Bedingung $y_e = 1$ gelten.

   Diese Bedingung soll dafür sorgen, dass ein Pfad über die y-Variablen zwischen s und t existiert.

d) Zeige: Es gibt Graphen, auf denen alle drei Varianten (Dominierende Menge, unabhängige dominierende Menge, zusammenhängende dominierende Menge) verschieden große optimale Lösungswerte besitzen. (Falls ihr keinen Graphen findet, könnt ihr auch zeigen, dass die Aussage paarweise gilt. Gibt dann aber einen Punkt weniger.)

Präsenzaufgabe 2 (Cutting Planes): **(2 Punkte)**
Betrachte folgendes IP.

$$\begin{array}{|lrrrl|}
\hline
\max & 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & \leq 6 \\
 & -1x_1 & +4x_2 & +1x_3 & \leq 2 \\
 & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \in \mathbb{N}_{\geq 0} \\
\hline
\end{array}$$

Leite Cutting Planes aus den Constraints des IP ab, bis das erhaltene relaxierte LP eine ganzzahlige optimale Basislösung besitzt.

Zum Überprüfen, ob eine ganzzahlige Basislösung existiert, kann ein online solver unterstüzend benutzt werden: `https://online-optimizer.appspot.com`. Als Model benötigt man folgende Zeilen.

```
var x1>=0;
var x2>=0;
var x3>=0;
var x4>=0;

maximize z: 3 * x1 + 2 * x2 + 2 * x3;
subject to c1: 3 * x1 - 2 * x2 + 2 * x3 <= 6;
subject to c2: -1 * x1 + 4 * x2 + 1 * x3 <= 2;
subject to c3: 1 * x1+ 2 * x2 + 2 * x3 <= 7;

end;
```

Die Cutting Planes können dann dort manuell erweitert werden.

Präsenzaufgabe 3 (Knotenfärbung): **(2 Punkte)**
Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$. Gesucht ist eine Zuweisung der Knoten zu den Zahlen $\{1, \ldots, k\}$, sodass jeweils benachbarte Knoten unterschiedliche Zahlen besitzen.

Gib eine IP-Formulierung an, die dieses Problem löst.