

# Übungsblatt 3

Besprechung der Aufgaben am 06.01.2026.

**Präsenzaufgabe 1 (Dualer Simplex-Algorithmus):**

Betrachte folgendes Dictionary.

$$\begin{array}{r|cccc} \zeta = & 0 & -1x_1 & -2x_2 & -1x_3 \\ w_1 = & -1 & +1x_1 & -2x_2 & +2x_3 \\ w_2 = & -2 & +2x_1 & +1x_2 & +3x_3 \end{array}$$

- a) Führe eine Iteration des dualen Simplex-Algorithmus durch, ohne das duale Dictionary zu benutzen.

Kommen mehrere Basisvariablen als Pivot in Frage, wähle diejenige mit der kleinsten Konstante.

- b) Schreibe das duale Dictionary zu dem in a) erhaltenen primalen Dictionary auf.

**Präsenzaufgabe 2 (Fractional Knapsack):**

Gegeben seien eine Kapazität  $W$ , sowie  $n$  Ressourcen mit jeweils Gewicht  $w_i > 0$  und Wert  $v_i > 0$ . Gesucht sind Werte  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ , sodass

- $\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W$ , und
- $\sum_{i=1}^n v_i x_i$  maximal.

- a) Schreibe das primale und duale LP zu obigen Problem auf.
- b) Gib eine optimale Lösung für das duale LP an, wenn  $\sum_{i=1}^n w_i \leq W$  gilt. Begründe die Optimalität!
- c) Zeige: Ist  $\sum_{i=1}^n w_i > W$ , gilt in einer optimalen Lösung  $x^*$  immer  $\sum_{i=1}^n w_i x_i^* = W$ .
- d) Angenommen,  $\sum_{i=1}^n w_i > W$  und die  $n$  Objekte sind absteigend nach  $\frac{v_i}{w_i}$  sortiert, d.h.  $\frac{v_1}{w_1} \geq \dots \geq \frac{v_n}{w_n}$ .

Zeige mit Hilfe von Dualität und des komplementären Schlupfes: Eine optimale Lösung des Problems ist in der Form  $(1, \dots, 1, x_j, 0, \dots, 0)$ , d.h. es existiert ein  $1 \leq j \leq n$  sodass

- $x_i = 1$  für alle  $i < j$ ,
- $0 \leq x_j < 1$  und
- $x_i = 0$  für alle  $i > j$ .

- e) Gib mit Hilfe von d) einen Algorithmus mit Laufzeit  $O(n \log n)$  an, der das fractional Knapsack Problem optimal löst.