

Übungsblatt 3

Besprechung der Aufgaben am 06.01.2026.

Präsenzaufgabe 1 (Dualer Simplex-Algorithmus):

Betrachte folgendes Dictionary.

$\zeta =$	0	$-1x_1$	$-2x_2$	$-1x_3$
$w_1 =$	-1	$+1x_1$	$-2x_2$	$+2x_3$
$w_2 =$	-2	$+2x_1$	$+1x_2$	$+3x_3$

- a) Führe eine Iteration des dualen Simplex-Algorithmus durch, ohne das duale Dictionary zu benutzen.

Kommen mehrere Basisvariablen als Pivot in Frage, wähle diejenige mit der kleinsten Konstante.

- b) Schreibe das duale Dictionary zu dem in a) erhaltenen primalen Dictionary auf.

Präsenzaufgabe 2 (Fractional Knapsack):

Gegeben seien eine Kapazität W , sowie n Ressourcen mit jeweils Gewicht $w_i > 0$ und Wert $v_i > 0$. Gesucht sind Werte $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, sodass

- $\sum_{i=1}^n w_i x_i \leq W$, und
- $\sum_{i=1}^n v_i x_i$ maximal.

- a) Schreibe das primale und duale LP zu obigen Problem auf.
- b) Gib eine optimale Lösung für das duale LP an, wenn $\sum_{i=1}^n w_i \leq W$ gilt. Begründe die Optimalität!
- c) Zeige: Ist $\sum_{i=1}^n w_i > W$, gilt in einer optimalen Lösung x^* immer $\sum_{i=1}^n w_i x_i^* = W$.
- d) Angenommen, $\sum_{i=1}^n w_i > W$ und die n Objekte sind absteigend nach $\frac{v_i}{w_i}$ sortiert, d.h. $\frac{v_1}{w_1} \geq \dots \geq \frac{v_n}{w_n}$.

Zeige mit Hilfe von Dualität und des komplementären Schlupfes: Eine optimale Lösung des Problems ist in der Form $(1, \dots, 1, x_j, 0, \dots, 0)$, d.h. es existiert ein $1 \leq j \leq n$ sodass

- $x_i = 1$ für alle $i < j$,
- $0 \leq x_j < 1$ und
- $x_i = 0$ für alle $i > j$.

- e) Gib mit Hilfe von d) einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ an, der das fractional Knapsack Problem optimal löst.