Übungsblatt 2

Besprechung der Aufgaben findet am 09.12.25 statt.

Präsenzaufgabe 1 (Modellieren, Dualisieren, Analysieren):
Wir betrachten eine Aufteilung von n Personen auf k Jobs, welche möglichst früh abgeschlossen werden sollen. Dabei kann jede Person einen Anteil an einem Job übernehmen. Zusätzlich gelten folgende Punkte:

I) Die Summe aller Anteile einer Person über alle Jobs darf maximal den Wert 1 annehmen (Auslastung der Person).

II) Die Anteile an einem Job über alle Personen muss mindestens den Wert 1 annehmen (Job wird fertiggestellt).

III) Person i benötigt für Job j insgesamt c_{ij} Minuten pro Anteil.

a) Modelliere das Szenario als LP in Standardform.

b) Dualisiere dein LP.

c) Zeige: In jeder optimalen Lösung des primalen LPs ist die Nebenbedingung bzgl. II) mit Gleichheit erfüllt.

Präsenzaufgabe 2 (Komplementärer Schlupf):
Betrachte folgendes LP.

$$
\begin{array}{rrrl}
\max & +2x1 & +3x2 & \\
\text{s.t.} & +2x1 & +3x2 & \leq 30 \\
 & -x1 & -2x2 & \leq -10 \\
 & +x1 & -x2 & \leq 1 \\
 & -x1 & +x2 & \leq 1 \\
 & x1 & & \geq 0
\end{array}
$$

a) Dualisiere das LP.

b) Das primale LP hat die optimale Basislösung $x_1 = 27/5, x_2 = 32/5$. Leite mit Hilfe des komplementären Schlupfs eine optimale Lösung des dualen LPs her.

Präsenzaufgabe 3 (Zirkulation):
Betrachte folgendes LP.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq 0, & \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ & x_j & \geq 0, & \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

Zeige: Entweder ist $x_j = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ eine optimale Lösung, oder das LP ist unbeschränkt.