Technische Universität Braunschweig
Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund
Abteilung Algorithmik

Dr. Arne Schmidt

Wintersemester 2024/2025

Klausur
Mathematische Methoden der Algorithmik
14.03.2025

Nachname: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

☐ Bachelor ☐ Master ☐ Andere: ....

Hinweise:

- Bitte das Deckblatt in Druckschrift vollständig ausfüllen.
- Die Klausur besteht aus 12 Blättern, bitte auf Vollständigkeit überprüfen.
- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 120 Minuten.

- Erlaubte Hilfsmittel: keine
- Eigenes Papier ist nicht erlaubt.
- Die Rückseiten der Blätter dürfen beschrieben werden.
- Antworten, die *nicht* gewertet werden sollen, bitte deutlich durchstreichen.
- **Kein Tippex verwenden.**
- Werden mehrere Antworten gegeben, werten wir die mit der geringsten Punktzahl.
- Mit *Bleistift* oder in *Rot* geschriebene Klausurteile können nicht gewertet werden.
- Sofern nicht anders in der Aufgabe erwähnt, dürfe keine externen Klassen importiert oder über ihren expliziten Packagenamen genutzt werden.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Max	15	10	14	13	14	15	19	100
Erreicht								

Aufgabe 1: Kurzfragen **(2+2+1+1+1+1+3+2*2 Punkte)**

a) Gib die Definition eines LPs in Standardform und das dazugehörige duale LP an.

b) Beweise die schwache Dualität.

c) Was ist eine degenerierte Basislösung eines LPs?

d) Woran erkennt man im primalen Dictionary, dass eine optimale Lösung erreicht wurde?

e) Woran erkennt man in einem Dictionary Unbeschränktheit des LPs?

f) Was bedeutet es, wenn der Simplex-Algorithmus zykelt? Wann kann sowas nur auftreten?

g) Beschreibe eine Möglichkeit, wie die erste Phase des Zwei-Phasen-Simplex durchgeführt werden kann. Begründe außerdem, wie darüber Feasibility des LPs überprüft werden kann.

h) Kreuze an, welche Aussagen wahr sind. Es ist immer mindestens eine Aussage wahr. Nur vollständig korrekt angekreuzte Aufgaben bringen Punkte.

(i) Welche Aussagen zu Dictionaries sind korrekt?

- ☐ Das initiale, primale Dictionary ist feasible, wenn kein positiver Wert in der Zielfunktion existiert.
- ☐ Das duale Dictionary ist negativ-transponiert zum primalen Dictionary.
- ☐ Jedes initiale, zulässige Dictionary enthält nur positive Koeffizienten.

(ii) Welche Aussagen zu Branch-and-Cut sind korrekt? Betrachte dazu ein Maximierungsproblem.

- ☐ Das Verfahren ist eine Kombination aus Branch-and-Bound und der Cutting-Plane-Methode.
- ☐ Durch Cutting-Planes dürfen ganzzahlige Lösungen abgeschnitten werden.
- ☐ Das Hinzufügen eines Gomory-Cuts schneidet eine Basislösung der LP-Relaxierung ab.

Aufgabe 2: Dictionary **(3+6+1 Punkte)**

Betrachte folgendes LP.

$$
\begin{array}{rrrl}
\max & -\frac{1}{2}x_1 & -x_2 & \\
\text{s.t.} & +x_1 & & \leq 1 \\
 & -\frac{3}{2}x_1 & +x_2 & \leq -1 \\
 & +x_1 & -2x_2 & \leq -2 \\
 & x_1, & x_2, & \geq 0
\end{array}
$$

a) Stelle das initiale Dictionary zum LP auf.

b) Führe zwei Iterationen des dualen Simplex-Algorithmus aus. Kommen mehrere Basisvariablen zum Tausch in Frage, wähle diejenige mit der größten (negativen) Konstanten.

c) Was bedeutet das erhaltene Dictionary für das primale LP? (Ohne Begründung)

Aufgabe 3: Dualisieren **(5+3+6 Punkte)**

Betrachte folgendes LP.

$$\begin{array}{rrrrl} \max & 3x_1 & +2x_2 & +1x_3 & \\ \text{s.t.} & 1x_1 & +2x_2 & +1x_3 & \leq 10 \\ & 2x_1 & +1x_2 & +3x_3 & \leq 15 \\ & 1x_1 & & +1x_3 & \leq 6 \\ & & 1x_2 & +2x_3 & \leq 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

a) Gib das dazugehörige, duale LP an.

b) Was besagt der komplementäre Schlupf?

c) Zeige mit Hilfe des komplementären Schlupfes, dass die primale Lösung $x^* = (6, 2, 0)$ optimal ist.

Aufgabe 4: Allgemeine LPs **(3+6+2+2 Punkte)**

Betrachte folgendes, allgemeine LP.

$$\begin{array}{rrrrr} \max & & 3x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.t.} & 1 \leq & 1x_1 & +2x_2 & \leq 4 \\ & 0 \leq & 2x_1 & +1x_2 & \leq 8 \\ & 1 \leq & x_1 & & \leq 2 \\ & 0 \leq & & x_2 & \leq 4 \end{array}$$

a) Gib das initiale, allgemeine Dictionary an.

b) Führe zwei Iterationen des Simplex-Algorithmus aus. Benutze dabei die Größte-Koeffizienten-Regel zum Pivotisieren.

c) Ist das erhaltene Dictionary optimal? Begründe deine Antwort.

d) Ist das erhaltene Dictionary degeneriert? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 5: Min Cost Perfect Matching **(6+1+3+4 Punkte)**

Das Min-Cost-Perfect-Matching-Problem ist definiert wie folgt.

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{R}^+$.

Gesucht: Ein perfektes Matching M mit $\sum_{e \in M} c_e$ minimal.

Wir gehen dabei aus, dass G ein perfektes Matching besitzt.

a) Stelle das primale IP (inklusive Blossom Constraints) und das duale LP zum Minimum Cost Perfect Matching in allgemeinen Graphen auf.

b) Sei $e = u, v \in E$ eine Kante des Graphen. Welche über das duale LP abgeleitete Bedingung muss erfüllt sein, damit e im Matching benutzt werden darf?

c) Betrachte den gewicheteten bipartiten Graph aus Abbildung 1 (rechts). Gib ein gewichtsminimales, perfektes Matching und dazugehörige Dualwerte der Knoten zu diesem Graphen an. Ein Algorithmus muss dafür nicht benutzt werden. Zur Orientierung kann eine Zwischenlösung des primal-dual-Algorithmus aus Abbildung 1 herangezogen werden.

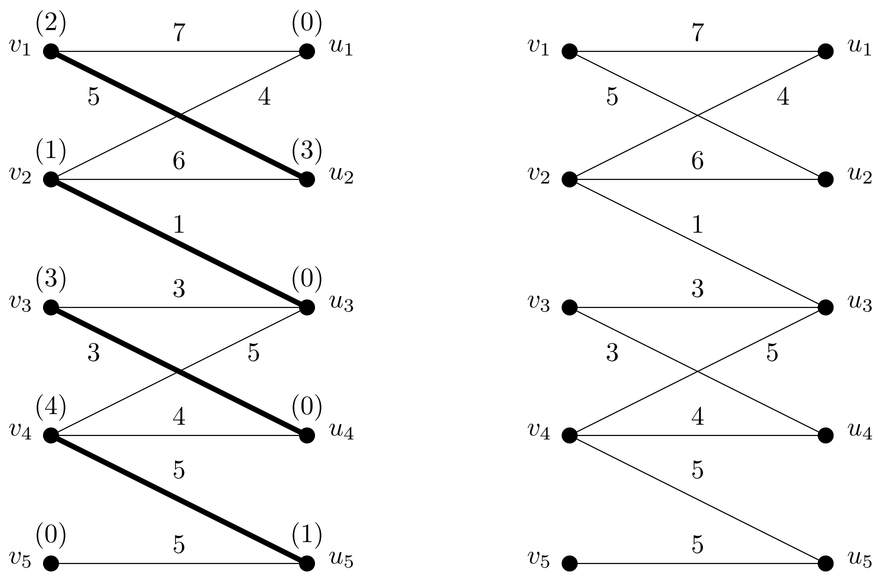


Abbildung 1: Ein gewichteter Graph mit einer Zwischenlösung des primal-dual-Algorithmus (links). In Klammern stehende Zahlen entsprechen den dualen Knotenwerten. Dicke Kanten sind aktuelle Matchingkanten.

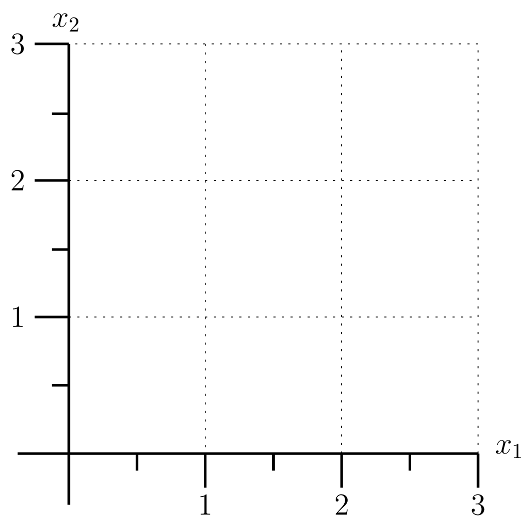
d) Erkläre kurz die Idee hinter Primal-Dualen-Algorithmen.

Aufgabe 6: Cutting Planes **(3+5+7 Punkte)**

Betrachte folgendes IP.

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{array}$$

a) Skizziere den LP-Lösungsraum in nachstehende Abbildung, indem die Constraints als **durchgezogene Linie** in das Diagramm eingefügt werden.



b) Leite aus den Constraints des ursprünglichen LP Cutting-Planes ab, sodass jede Basislösung des relaxierten Problems ganzzahlig wird. Zeichne zusätzlich die Cutting Planes in obiges Diagram als **gestrichelte Linien** ein und markiere die ganzzahligen Basislösungen.

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
& x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\
& x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{array}
$$

c) Das optimale Dictionary zur LP-Relaxierung des ursprünglichen Problems lautet folgendermaßen.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & \frac{9}{4} & - & \frac{1}{4}w_2 & - & \frac{1}{4}w_3 \\
w_1 & = & \frac{7}{4} & + & \frac{5}{4}w_2 & - & \frac{3}{4}w_3 \\
x_1 & = & \frac{3}{2} & + & \frac{1}{2}w_2 & - & \frac{1}{2}w_3 \\
x_2 & = & \frac{3}{4} & - & \frac{3}{4}w_2 & + & \frac{1}{4}w_3
\end{array}
$$

Füge dem Dictionary einen Gomory-Cut bzgl. x_1 hinzu und führe eine Iteration des Simplex-Algorithmus aus.

Aufgabe 7: Facility Location Problem **(12+7 Punkte)**

Ein Unternehmen besitzt die Möglichkeit an n verschiedenen Stellen Lagerhäuser zu errichten. Das Erstellen eines Lagerhauses an Stelle $i \in \{1, \ldots, n\}$ kostet $f_i \geq 0$. Alle m Kunden können dann von den errichteten Lagerhäusern beliefert werden. Dabei kostet es $c_{i,j} > 0$, wenn Kunde j von Lagerhaus i beliefert wird. Jeder Kunde muss von genau einem Lagerhaus beliefert werden. Ziel des Unternehmens ist es nun, Lagerhäuser nur an bestimmten Stellen zu errichten, sodass der Bau der Lagerhäuser plus die Transportkosten zu den Kunden möglichst minimal ist.

a) Modelliere das Problem als IP. Gib zusätzlich eine kurze Beschreibung an, was deine eingeführten Variablen und Nebenbedingungen bedeuten.

b) Gib das duale LP der LP-Relaxierung an.

Viel Erfolg ☺