Algorithmen und Datenstrukturen – Übung #4

Dynamische Datenstrukturen

Ramin und Chek-Manh

18.12.2025

Programm heute

Verkettete Listen

Ganz schnell Eulertouren finden

Binäre Suchbäume

Operationen auf binären Suchbäumen

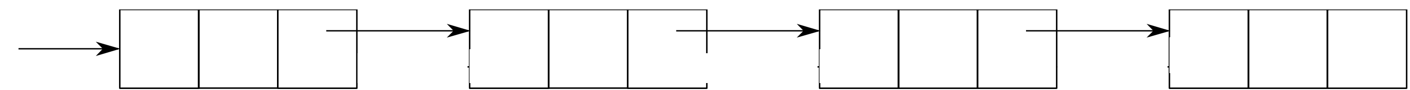
Binäre Suchbäume mergen

AVL-Bäume

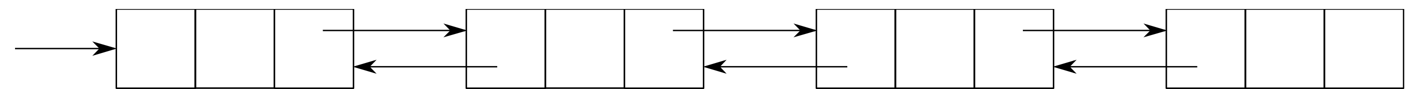
(Zyklisch) Verkettete Listen

Listen

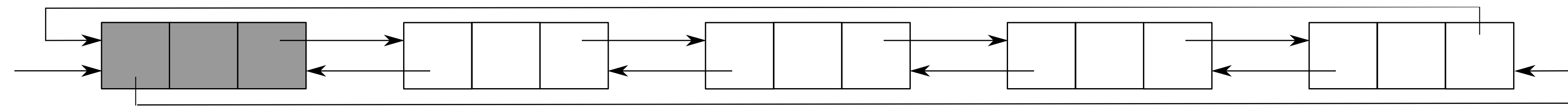
Einfach verkettet:



Doppelt verkettet:



Zyklisch doppelt verkettet (mit Wächter):

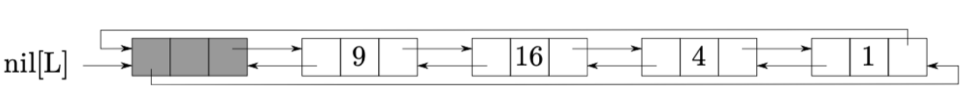


Wächter

1: **function** LISTE-DELETE(L, x)
2: **if** $\text{pred}[x] \neq$ NIL **then**
3: $\text{succ}[\text{pred}[x]] \leftarrow \text{succ}[x]$
4: **else**
5: $\text{head}[L] \leftarrow \text{succ}[x]$
6: **if** $\text{succ}[x] \neq$ NIL **then**
7: $\text{pred}[\text{succ}[x]] \leftarrow \text{pred}[x]$

pred key succ

head[L] / 9 16 4 1 /



1: **function** LIST-DELETE'(L, x)
2: $\text{succ}[\text{pred}[x]] \leftarrow \text{succ}[x]$
3: $\text{pred}[\text{succ}[x]] \leftarrow \text{pred}[x]$

Laufzeiten in Listen

Operation	Einfach	Doppelt	Zyklisch
Suchen	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Einfügen	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
Löschen	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
Merge*	$O(1)**$	$O(1)**$	$O(1)$

*: Verschmelze zwei Listen der Größe n und m.
**: Sofern Adresse des letzten Elements bekannt. Andernfalls $O(\min(n, m))$.

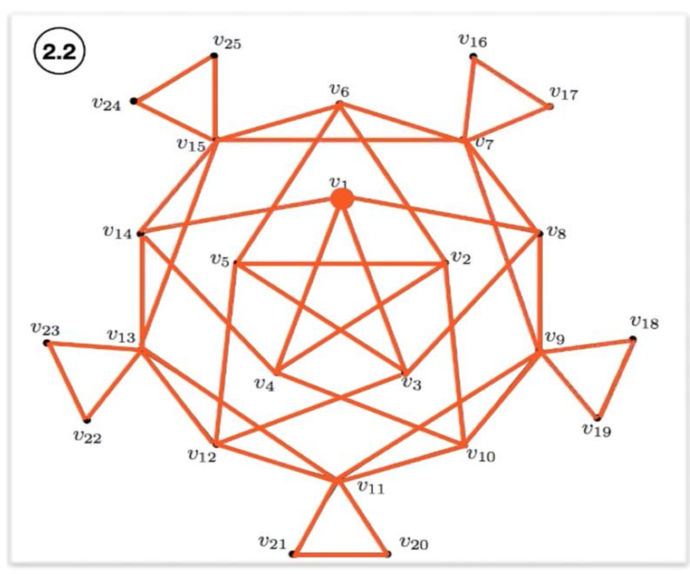
Technische Universität Braunschweig

Eulertouren

Zwei Algorithmen zum Finden von Eulertouren

Fleury
- Laufe Kanten ab, sodass stets der Zusammenhang erhalten bleibt
- Finde Weg auf einmal, ohne Stift abzusetzen
- Bekannt aus den Hausaufgaben :)

Eulertouren

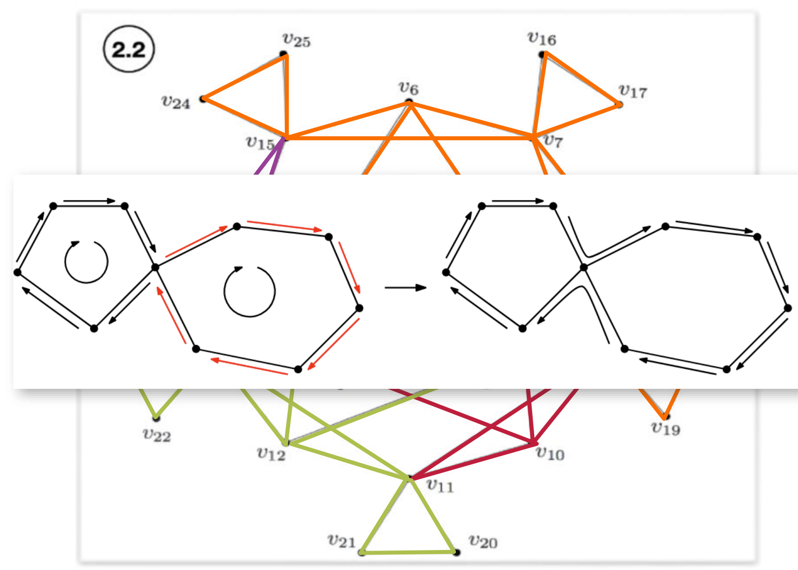


Zwei Algorithmen zum Finden von Eulertouren

Fleury

- Laufe Kanten ab, sodass stets der Zusammenhang erhalten bleibt
- Finde Weg auf einmal, ohne Stift abzusetzen
- Bekannt aus den Hausaufgaben :)

Eulertouren



Zwei Algorithmen zum Finden von Eulertouren

Fleury

- Laufe Kanten ab, sodass stets der Zusammenhang erhalten bleibt
- Finde Weg auf einmal, ohne Stift abzusetzen
- Bekannt aus den Hausaufgaben :)

Hierholzer

- Finde immer wieder Wege in der Menge der noch nicht benutzten Kanten
- Merge diese neuen Wege mit dem schon existierenden Weg, bis alle Kanten genutzt sind

Laufzeiten

Algorithmus

Laufzeit

1. https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/335305.335345

Laufzeiten

Algorithmus	Fleury	Fleury (mit Optimierungen)[1]	Hierholzer
Laufzeit	$O(m^2)$	$O(m(\log m)^3 \log\log m)$	$O(m)$

1. https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/335305.335345

Laufzeiten

Laufzeiten

Algorithmus	Fleury	Fleury (mit Optimierungen)[1]	Hierholzer
Laufzeit	$O(m^2)$	$O(m(\log m)^3 \log\log m)$	$O(m)$

Wie genau soll das gehn?

→ Dafür müssen wir etwas an den Details feilen …
und schlau Datenstrukturen nutzen

1. https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/335305.335345

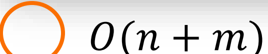
Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Eingabe: Zusammenhängender Graph G mit höchstens 2 ungeraden Knoten

Ausgabe: Ein Eulerweg, bzw. eine Eulertour in G

1: starte in einem Knoten v
   (wenn einer mit ungeradem Grad existiert, dort, sonst beliebig)
2: verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W von v aus zu bestimmen
3: **while** es existieren unbenutzte Kanten **do**
4: wähle einen Knoten w aus W mit positivem Grad im Restgraphen
5: verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W' von w aus zu bestimmen
6: verschmelze W und W'

Algorithmus 2.8: Hierholzers Algorithmus zum Finden eines Eulerweges oder einer Eulertour



$O(n+m)$?

$O(|W|+|W'|)$?

Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Eingabe: Graph G

Algo: Einen Weg finden in einem Graphen

Ausgabe: Ein Weg in G

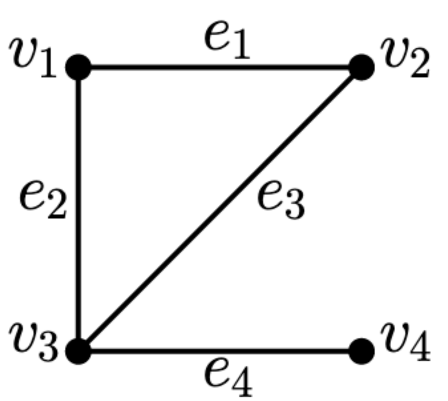
1: starte in einem Knoten v_0
   (wenn einer mit ungeradem Grad existiert, dort, sonst beliebig)
2: $i \leftarrow 0$
3: **while** es gibt eine zu v_i inzidente, unbenutzte Kante **do**
4: wähle eine zu v_i inzidente, unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$
5: laufe zum Nachbarknoten v_j
6: lösche $\{v_i, v_j\}$ aus der Menge der unbenutzten Kanten
7: $v_{i+1} \leftarrow v_j$
8: $i \leftarrow i + 1$

Algorithmus 2.7: Algorithmus zum Finden eines Weges in einem Graphen

Können wir einen Weg W in $O(|W|)$ Zeit bestimmen? Ideen?

Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Benutze Adjazenzliste und doppelt verkettete Listen.



v_1: v_2, v_3

v_2: v_3, v_1

v_3: v_1, v_2, v_4

v_4: v_3

Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Benutze Adjazenzliste und doppelt verkettete Listen.

Verwende zusätzliche Pointer für gleiche Kanten.

v_1: v_2, v_3

v_2: v_3, v_1

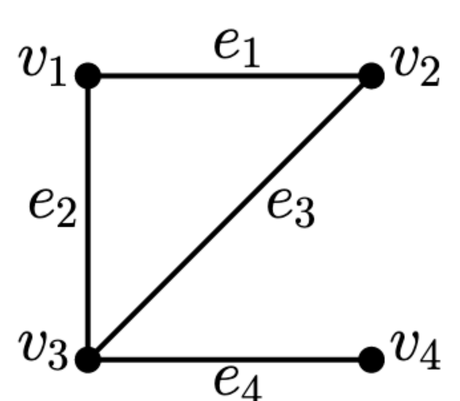
v_3: v_1, v_2, v_4

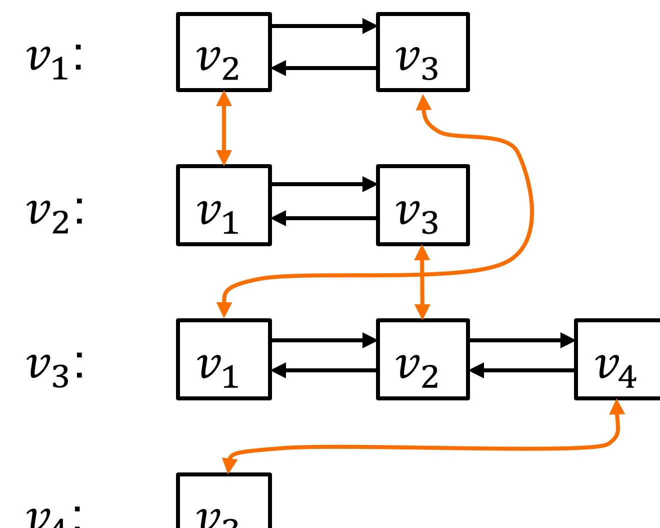
v_4: v_3

Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Benutze Adjazenzliste und doppelt verkettete Listen.

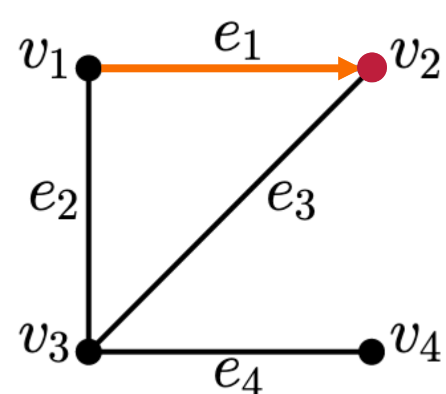
Verwende zusätzliche Pointer für gleiche Kanten.

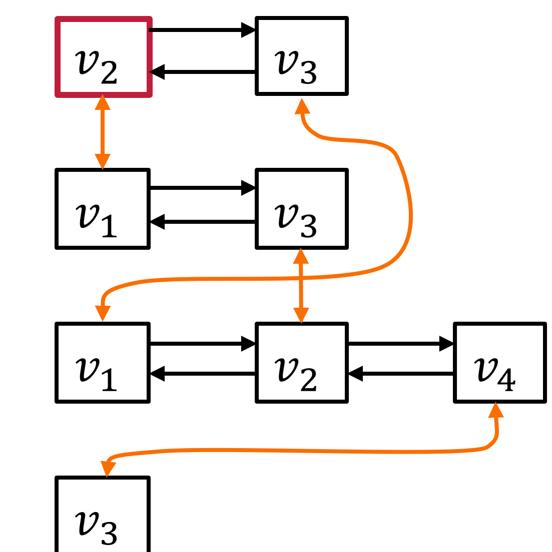




Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

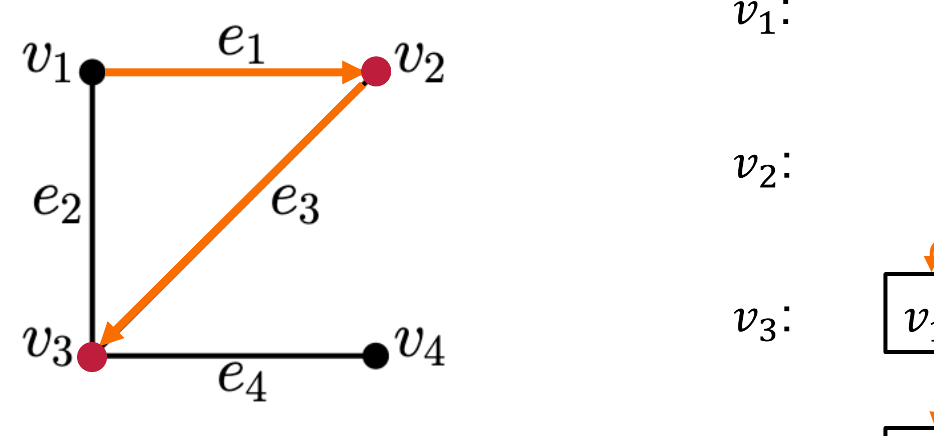
Starte bei v_1 und gehe zum nächsten Knoten.
Lösche die Kante aus der Adjazenzliste.
Alle Operationen kosten $O(1)$ Zeit.





Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Starte bei v_1 und gehe zum nächsten Knoten.
Lösche die Kante aus der Adjazenzliste.
Alle Operationen kosten $O(1)$ Zeit.



v_3

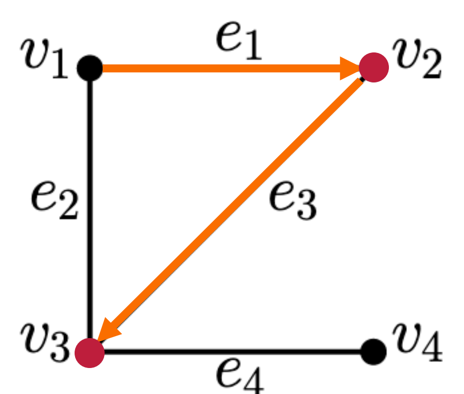
v_3

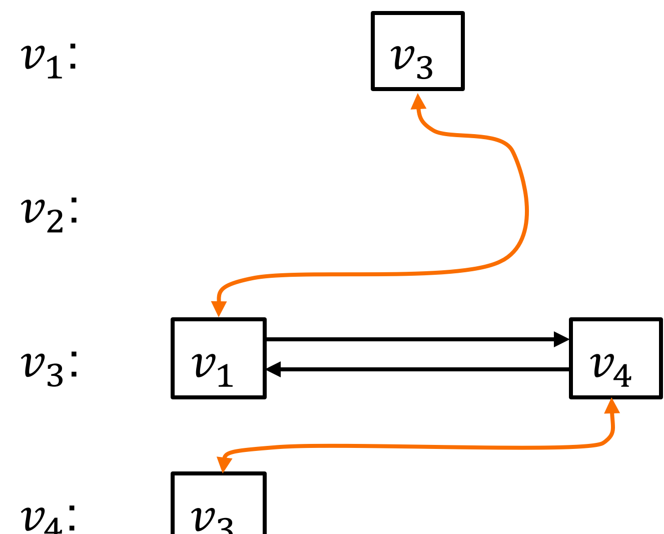
v_1 v_2 v_4

v_3

Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Starte bei v_1 und gehe zum nächsten Knoten.
Lösche die Kante aus der Adjazenzliste.
Alle Operationen kosten $O(1)$ Zeit.





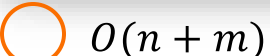
Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

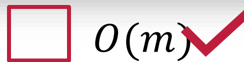
Eingabe: Zusammenhängender Graph G mit höchstens 2 ungeraden Knoten

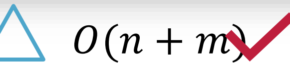
Ausgabe: Ein Eulerweg, bzw. eine Eulertour in G

1: starte in einem Knoten v
   (wenn einer mit ungeradem Grad existiert, dort, sonst beliebig)
2: verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W von v aus zu bestimmen
3: **while** es existieren unbenutzte Kanten **do**
4:     wähle einen Knoten w aus W mit positivem Grad im Restgraphen
5:     verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W' von w aus zu bestimmen
6:     verschmelze W und W'

Algorithmus 2.8: Hierholzers Algorithmus zum Finden eines Eulerweges oder einer Eulertour







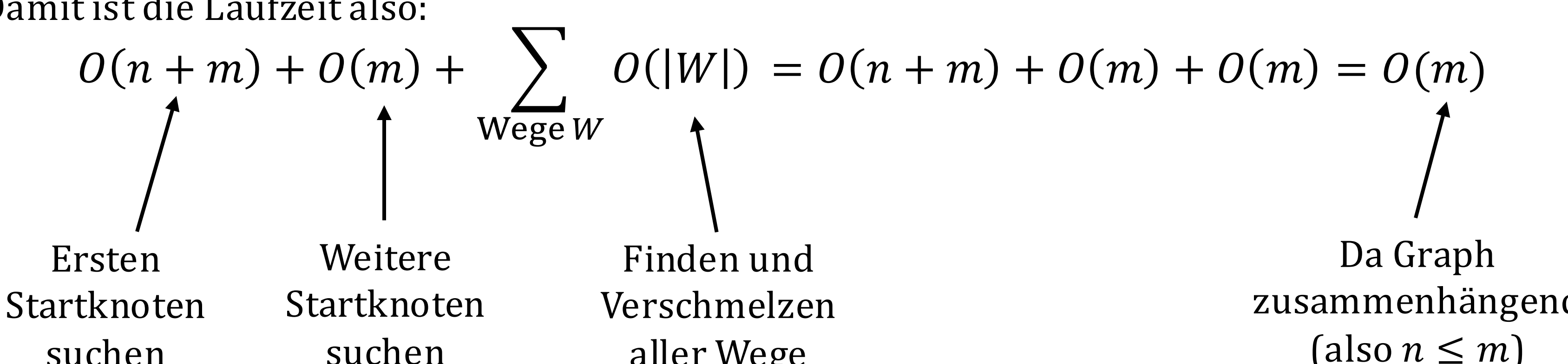
Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Nutze für die Eulertour/den Eulerweg eine zyklische, doppelt verkettete Liste.

Damit:

- Kosten für das Verschmelzen: $O(1)$
- Nächsten Startknoten suchen: $O(m)$ über alle Iterationen

Damit ist die Laufzeit also:



SELBSTVERSTÄNDLICH

$\sum_{\text{wege } W} O(|W|)$

LÄUFT HIERHOLZER IN LINEARZEIT

O(m)

Datenstrukturen

Algorithmen

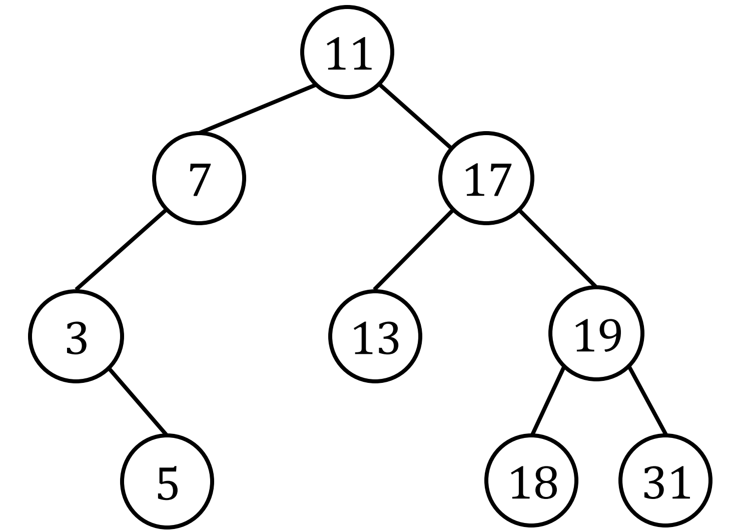
imgflip.com

Binäre Suchbäume

Bin. Suchbäume

Anstatt einen Nachfolger (Liste), benutze zwei:

- Ein linkes Kind ($l[v]$)
- Ein rechtes Kind ($r[v]$)



Verwalte zudem eine Totalordnung der Elemente:

- Schlüssel im linken Teilbaum sind kleiner
- Schlüssel im rechten Teilbaum sind größer

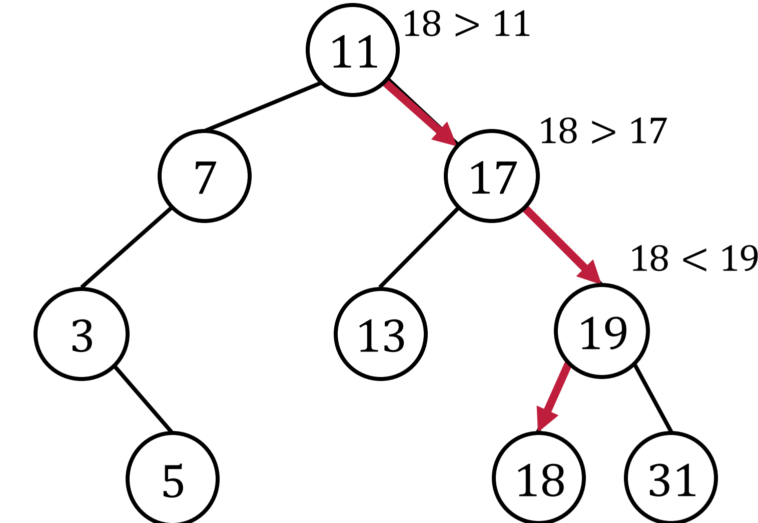
Beispiel:

Füge folgende Sequenz von Zahlen in einen bin. Suchbaum ein:

11, 17, 13, 19, 7, 3, 31, 18, 5

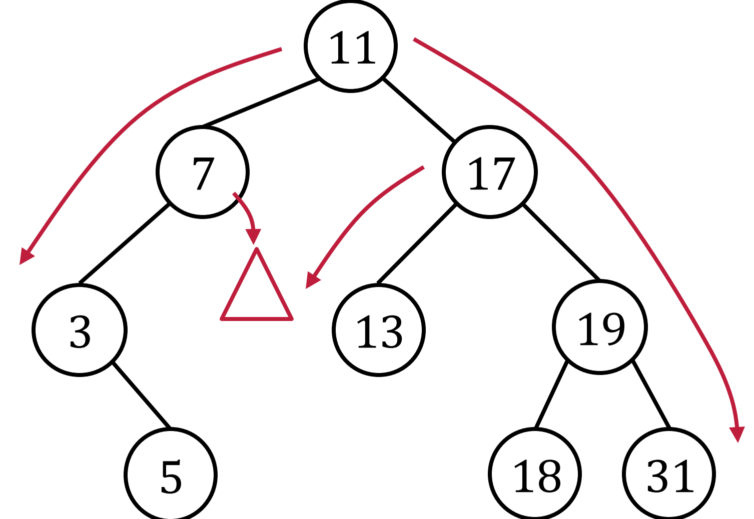
Operationen

- Insert
- Search
  - search(18)



Operationen

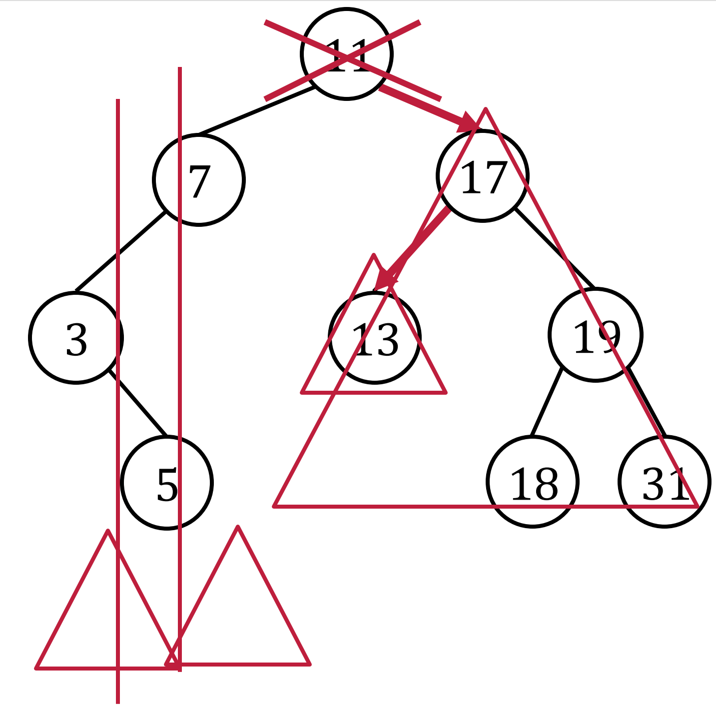
- Insert (eben gesehen)
- Search
  - search(18)
- Minimum und Maximum
  - $\max(11)^* = 31$
  - $\min(11)^* = 3$
    - *Teilbäume sind auch wieder Bäume!*
  - $\min(17)^* = 13$
  - $\max(7)^* = 7$



*in slight abuse of notation. Korrekterweise übergibt man natürlich den *Pointer* zu dem entsprechenden (Teil)-Baum und nicht einfach den Schlüssel, der dort gespeichert ist. Diese Schreibweise dient hier nur Anschauungszwecken :)

Operationen

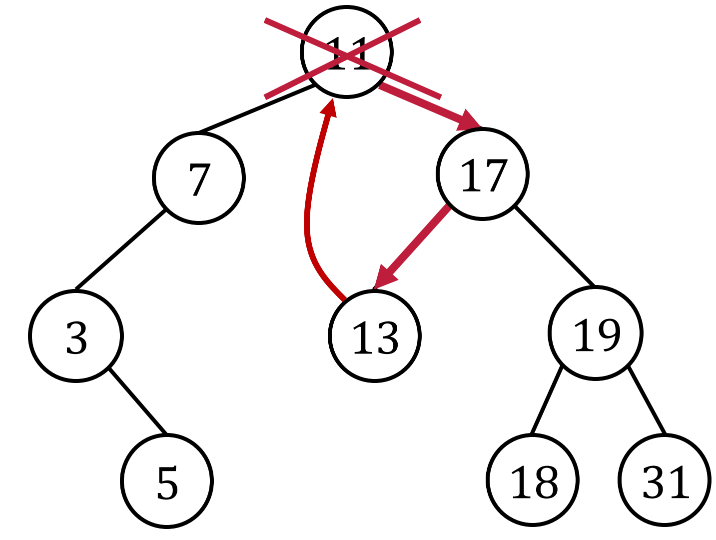
- Insert (eben gesehen)
- Search
  - search(18)
- Vorgänger (pred)/Nachfolger (succ)
  - succ(11)* =
  - pred(17)* =
  - pred(5)* =
  - succ(5)* =
- Delete
  - Delete*(11)



*in slight abuse of notation. Korrekterweise übergibt man natürlich den *Pointer* zu dem entsprechenden (Teil)-Baum und nicht einfach den Schlüssel, der dort gespeichert ist. Diese Schreibweise dient hier nur Anschauungszwecken :)

Operationen

- Insert (eben gesehen)
- Search
  - search(18)
- Vorgänger (pred)/Nachfolger (succ)
  - $\text{succ}(11)^* = 13$
  - $\text{pred}(17)^* = 13$
  - $\text{pred}(5)^* = 3$
  - $\text{succ}(5)^* = 7$
- Delete
  - $\text{Delete}^*(11)$



*in slight abuse of notation. Korrekterweise übergibt man natürlich den *Pointer* zu dem entsprechenden (Teil)-Baum und nicht einfach den Schlüssel, der dort gespeichert ist. Diese Schreibweise dient hier nur Anschauungszwecken :)

Traversierung

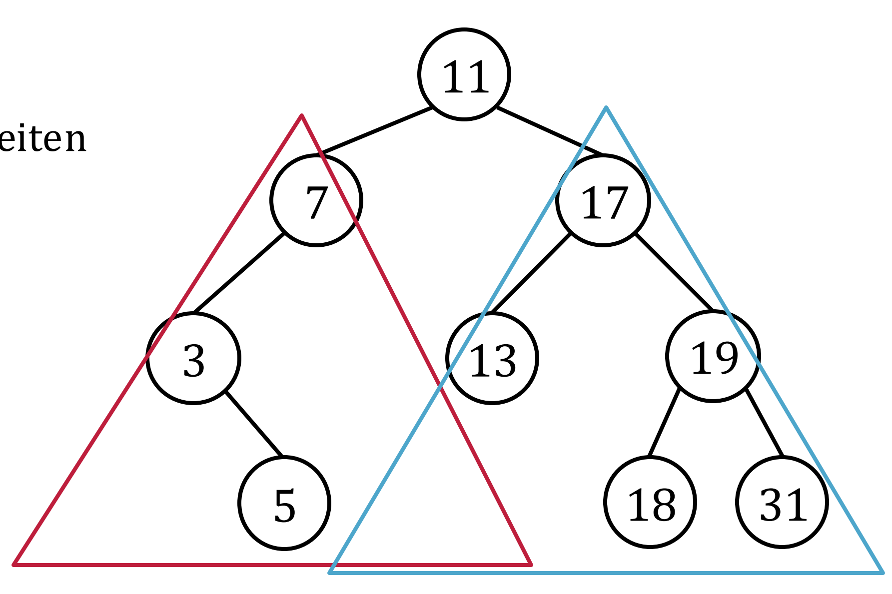
Wie durchläuft man einen binären Suchbaum?

Man unterscheidet unter anderem drei Möglichkeiten

- **Inorder** (Links, Wurzel, Rechts)
  - 3, 5, 7, 11, 13, 17, 18, 19, 31
- **Preorder** (Wurzel, Links, Rechts)
  - 11, 7, 3, 5, 17, 13, 19, 18, 31
- **Postorder** (Links, Rechts, Wurzel)
  - 5, 3, 7, 13, 18, 31, 19, 17, 11

$h(v) = \max\big(h(l[v]), h(r[v])\big) + 1$

$h(\text{NIL}) = 0$



Traversierung

Dank der Baumstruktur kann man das ganz einfach als Algorithmus aufschreiben.

Inorder	Postorder	Preorder

function INORDER(v)
  if $(v \neq \text{NIL})$
    INORDER$(l(v))$
    print S(v)
    INORDER$(r(v))$
	function POSTORDER(v)
	  if $(v \neq \text{NIL})$
	    POSTORDER$(l(v))$
	    POSTORDER$(r(v))$
	    print S(v)
		function PREORDER(v)
		  if $(v \neq \text{NIL})$
		    print S(v)
		    PREORDER$(l(v))$
		    PREORDER$(r(v))$

Verschmelzen von binären Suchbäumen

Merge – Das Problem

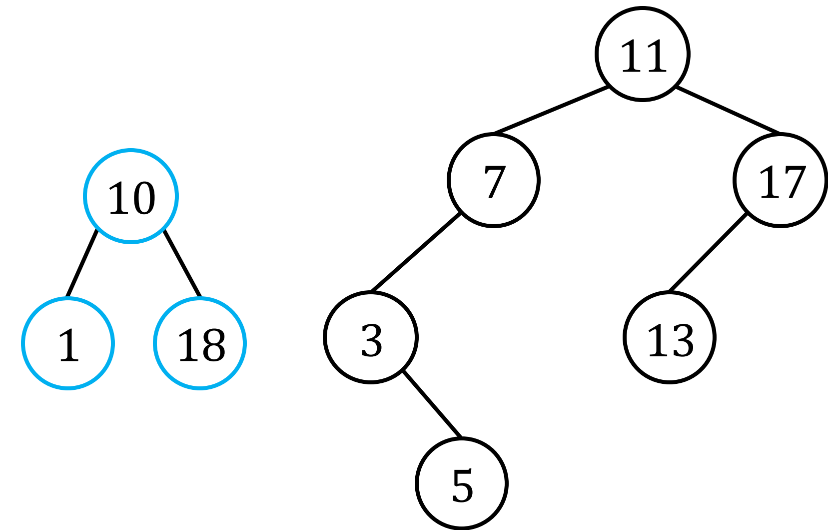
Gegeben: Zwei binäre Suchbäume mit n bzw. m Elementen.
Aufgabe: Konstruiere daraus einen Suchbaum mit $n + m$ Elementen.

Wie (schnell) geht das?

10
1
18
+
11
7
17
3
13
5
→
11
7
17
3
10
13
18
1
5

Merge – Ideen und Schranken

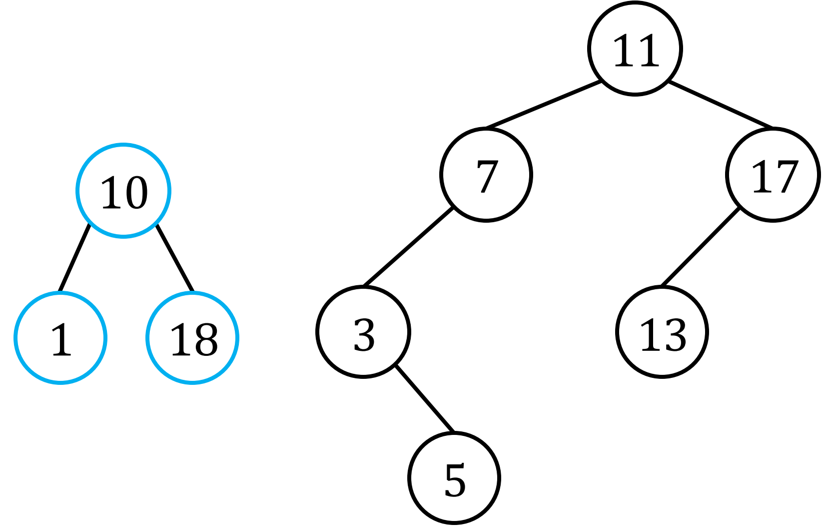
Idee



Merge – Ideen und Schranken

Idee

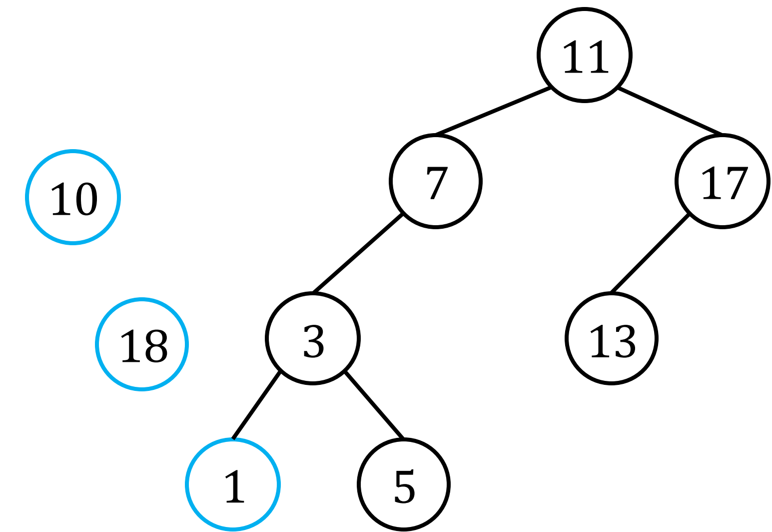
Für jeden Schlüssel S im ersten Suchbaum: Füge S in den zweiten Suchbaum ein.



Merge – Ideen und Schranken

Idee

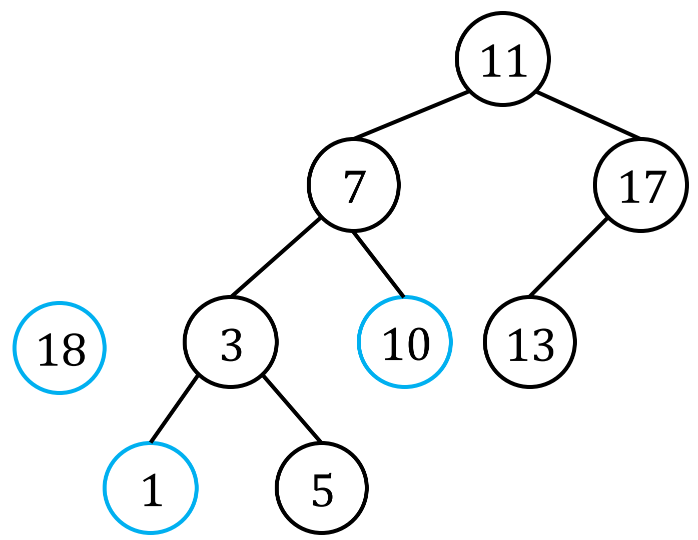
Für jeden Schlüssel S im ersten Suchbaum: Füge S in den zweiten Suchbaum ein.



Merge – Ideen und Schranken

Idee

Für jeden Schlüssel S im ersten Suchbaum: Füge S in den zweiten Suchbaum ein.



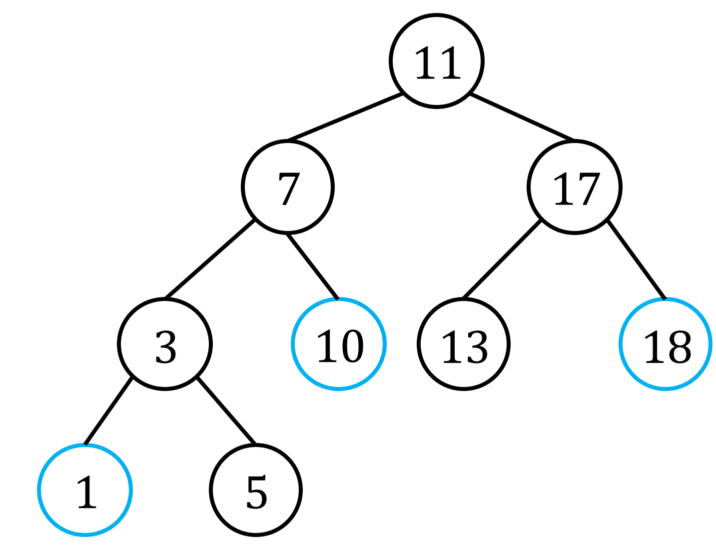
Merge – Ideen und Schranken

Idee

Für jeden Schlüssel S im ersten Suchbaum: Füge S in den zweiten Suchbaum ein.

Laufzeit

Jeder Schlüssel n muss in den zweiten Suchbaum der Höhe h_m eingefügt werden.
Entsprechend erhalten wir $O(n \cdot h_m)$, sowie $O(n \cdot m)$ im Worst-Case.



Ist das eine gute Laufzeit?

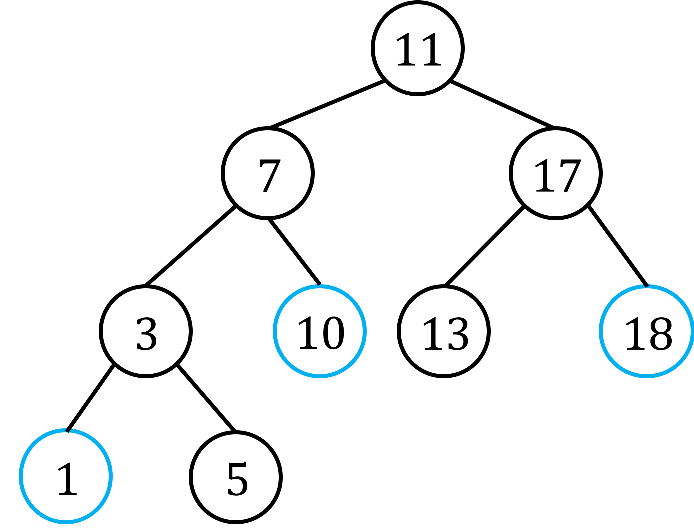
Merge – Ideen und Schranken

Idee

Für jeden Schlüssel S im ersten Suchbaum: Füge S in den zweiten Suchbaum ein.

Laufzeit

Jeder Schlüssel n muss in den zweiten Suchbaum der Höhe h_m eingefügt werden.
Entsprechend erhalten wir $O(n \cdot h_m)$, sowie $O(n \cdot m)$ im Worst-Case.



Wie lange braucht man mindestens?
Jeder Schlüssel muss mindestens einmal betrachtet werden.
$\rightarrow \Omega(n + m)$

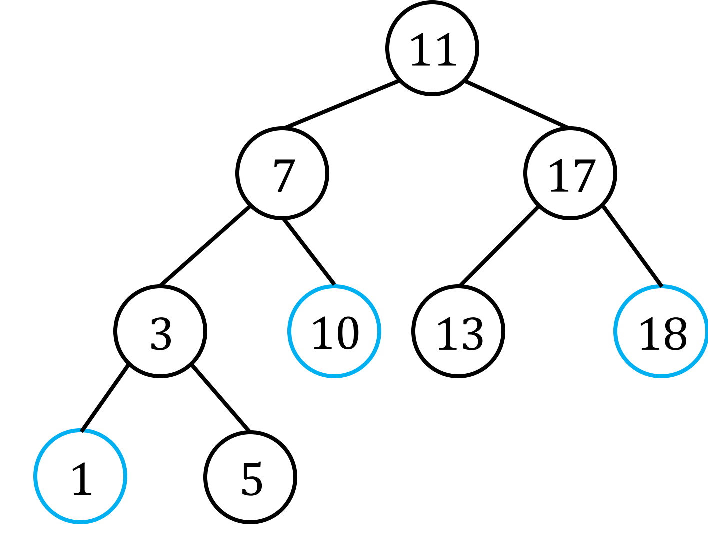
Merge – Ideen und Schranken

Idee

Für jeden Schlüssel S im ersten Suchbaum: Füge S in den zweiten Suchbaum ein.

Laufzeit

Jeder Schlüssel n muss in den zweiten Suchbaum der Höhe h_m eingefügt werden.
Entsprechend erhalten wir $O(n \cdot h_m)$, sowie $O(n \cdot m)$ im Worst-Case.



Ideen für einen schnelleren Algo?

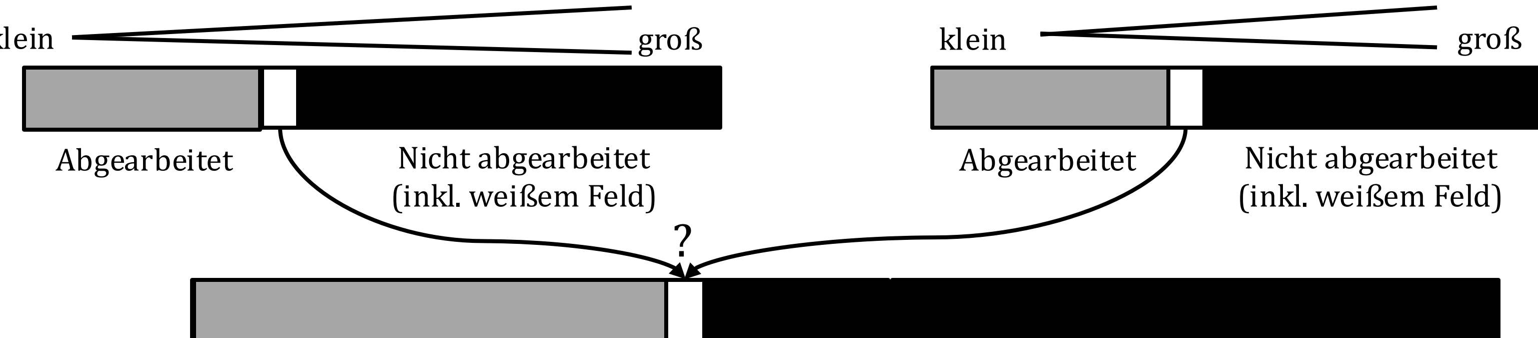
Merge – Alternative

Probieren wir folgende Strategie:

1. Transformiere beide Suchbäume in sortierte Arrays (durch *inorder* Traversierung).
2. Verschmelze beide Arrays in ein sortiertes Array.
3. Konstruiere aus dem sortierten Array einen Suchbaum.

Punkt 1 benötigt offensichtlich $O(n+m)$ Zeit.

Für Punkt 2 benötigen wir $O(n+m)$ Zeit:

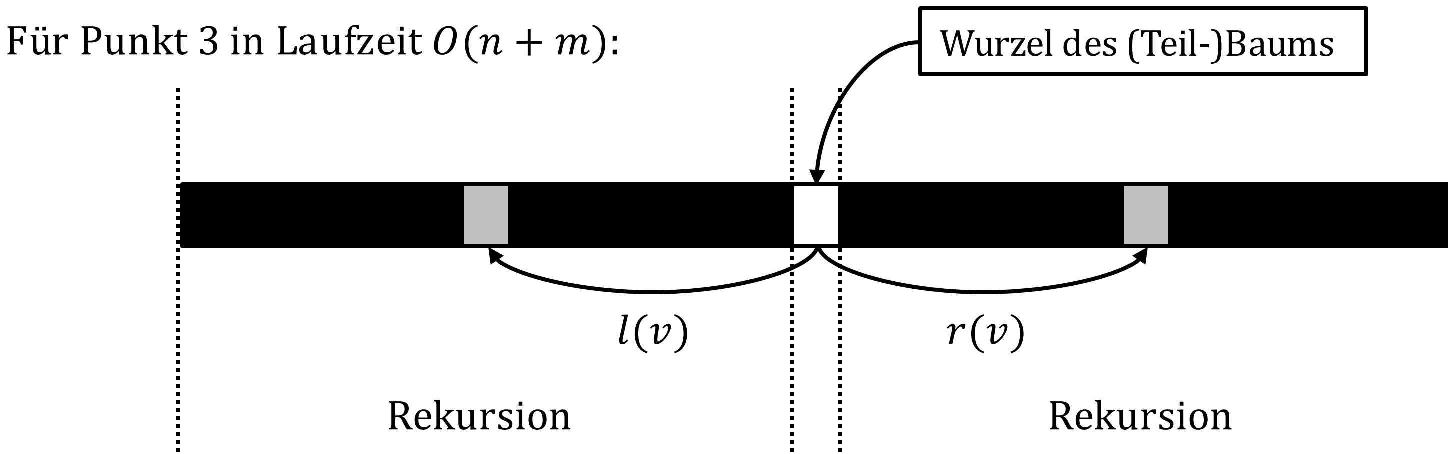


Merge – Alternative

Probieren wir folgende Strategie:

1. Transformiere beide Suchbäume in sortierte Arrays (durch *inorder* Traversierung).
2. Verschmelze beide Arrays in ein sortiertes Array.
3. Konstruiere aus dem sortierten Array einen Suchbaum.

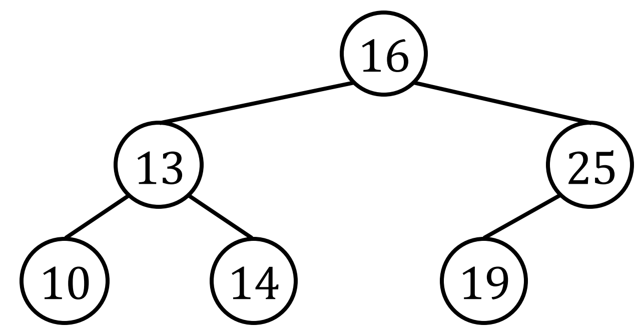
Für Punkt 3 in Laufzeit $O(n+m)$:



Einen binären Baum aus einem Array bauen

function BUILD_FROM_ARRAY(A, p, r)
  if $(p > r)$
    return NIL
  $q = \left\lceil \frac{p+r}{2} \right\rceil$
  $root$ = Tree$(A(q))$
  $l[root] =$ BUILD_FROM_ARRAY$(A, p, q-1)$
  $r[root] =$ BUILD_FROM_ARRAY$(A, q+1, r)$
  return $root$

$A = \{10, 13, 14, 16, 19, 25\}$



Merge - Beispiel

3	5	7	11	13	17

,

1	10	18

⇒

1	3	5	7	10	11	13	17	18

Zusammenfassung: Laufzeiten in binären Suchbäumen

Zusammenfassung: Laufzeiten in binären Suchbäumen

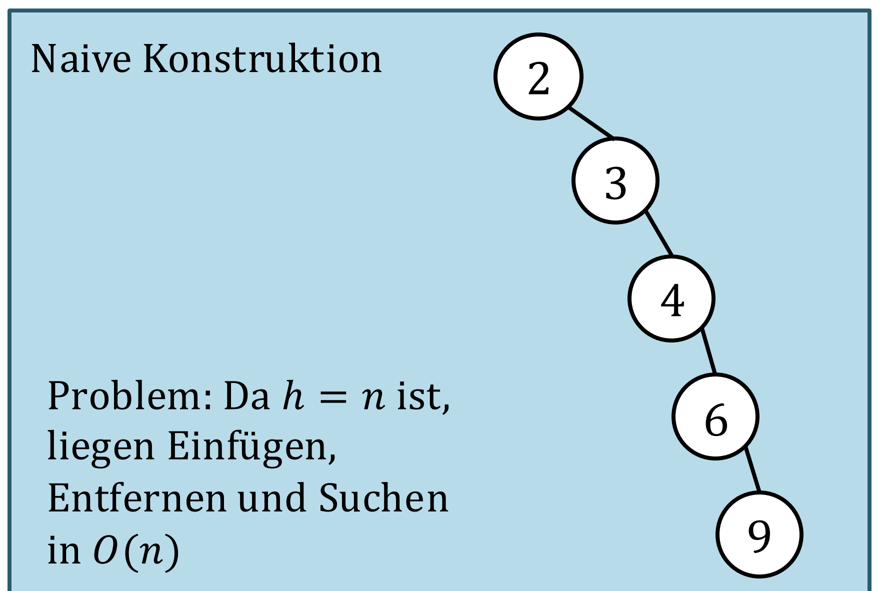
Operation	Laufzeit
Suchen	$O(h)$
Einfügen	$O(h)$
Löschen	$O(h)$
Traversierung	$O(n)$
Merge	$O(n+m)$

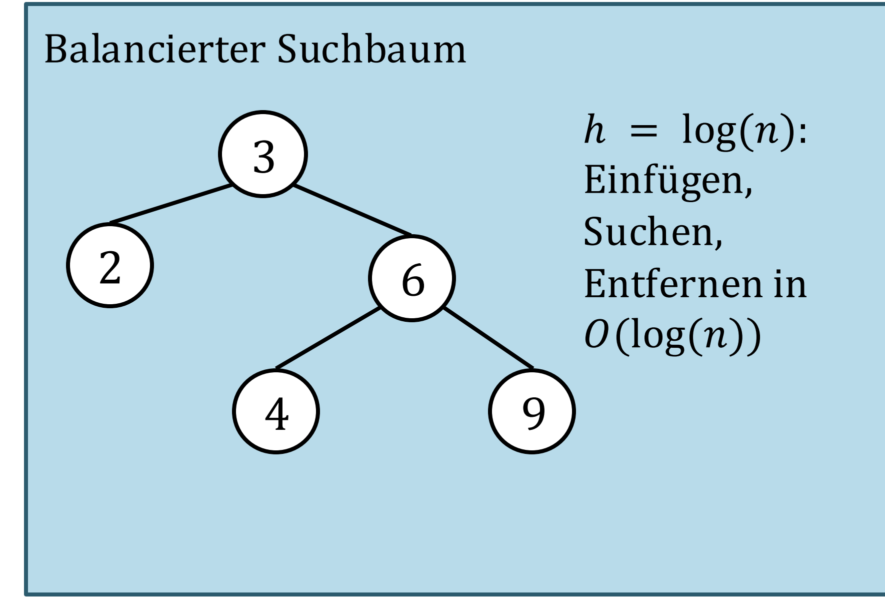
AVL-Bäume

Balancierte Suchbäume - Motivation

Wir wissen: Einfügen, Entfernen und Suchen in binären Suchbäumen geht in $O(h)$.

Konstruiere den folgenden Suchbaum durch Einfügen von 2, 3, 4, 6, 9:





AVL-Bäume – Definition

Ein AVL-Baum besitzt folgenden Eigenschaften:

- Er ist ein binärer Suchbaum.
- Höhe des linken und rechten Teilbaums jeden Knotens unterscheidet sich um maximal 1.

INSERT $(T, 10)$

AVL-Bäume – Operationen

Operationen für binäre Suchbäume funktionieren auch für AVL-Bäume, d.h. wir können:

- Insert
- Delete
- Minimum/Maximum
- Predecessor/Successor
- …

ausführen.

Um die Balancierung zu erhalten, müssen nur Operationen verändert werden, die die Struktur des Baumes verändern.
Das sind *Insert* und *Delete.*

AVL-Bäume

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

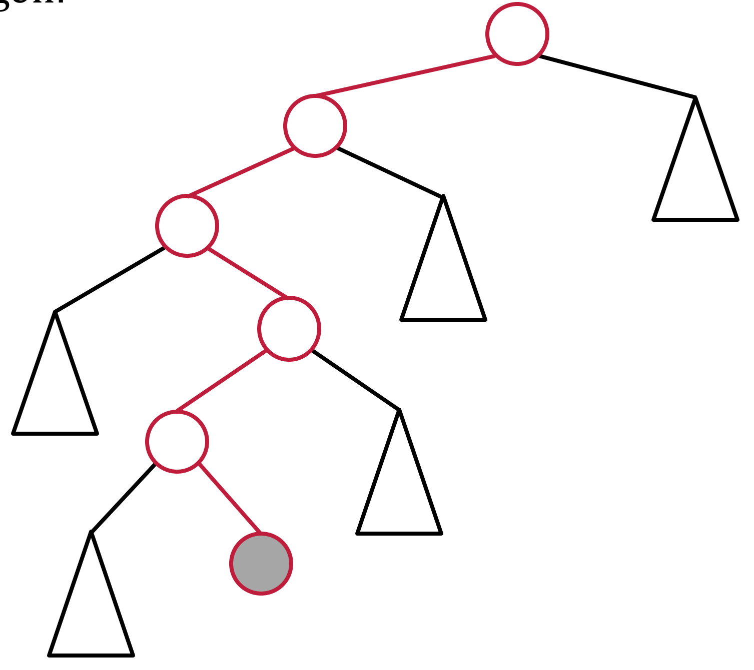
1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

AVL-Bäume

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Nur Knoten, die auf dem Pfad von der Wurzel zum eingefügten/gelöschten Knoten liegen, können unbalanciert werden.

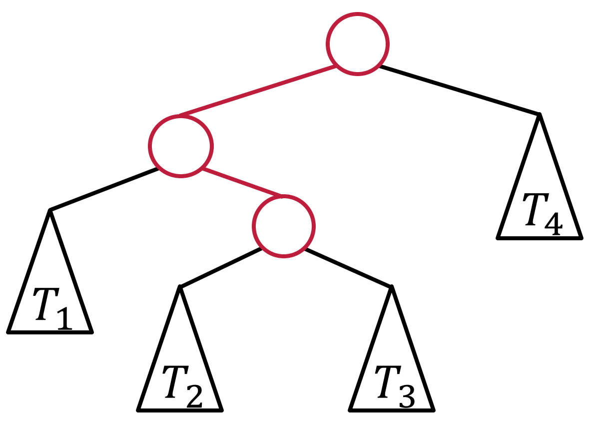


AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Betrachte den unbalancierten Knoten z,
sein Kind y und dessen Kind x.



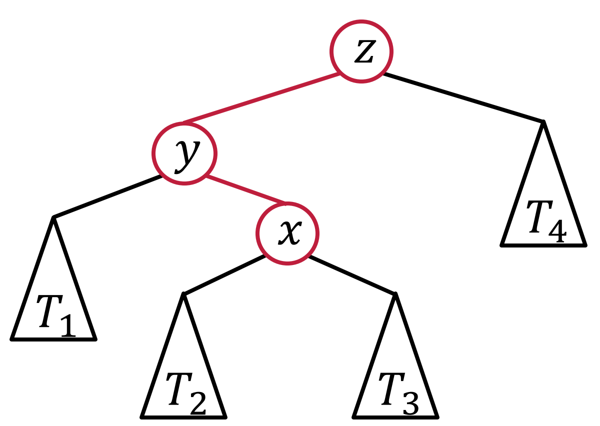
AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Betrachte den unbalancierten Knoten z,
sein Kind y und dessen Kind x.

Sortiere Elemente aufsteigend und rotiere entsprechend.



AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

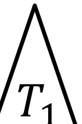
Betrachte den unbalancierten Knoten z,
sein Kind y und dessen Kind x.

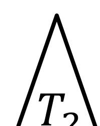
Sortiere Elemente aufsteigend und rotiere entsprechend.

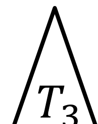
Mittleres Element

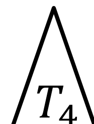
Kleinstes Element

Größtes Element









AVL-Bäume – Restructure

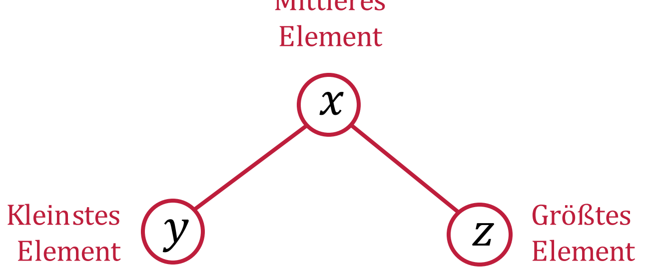
Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

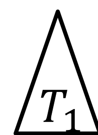
1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

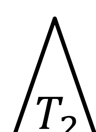
Betrachte den unbalancierten Knoten z,
sein Kind y und dessen Kind x.

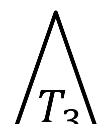
Sortiere Elemente aufsteigend und rotiere entsprechend.

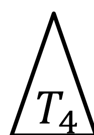
Die Teilbäume $T_1, \dots T_4$ werden wieder an den neuen, rotierten Baum angehängt.











AVL-Bäume – Restructure

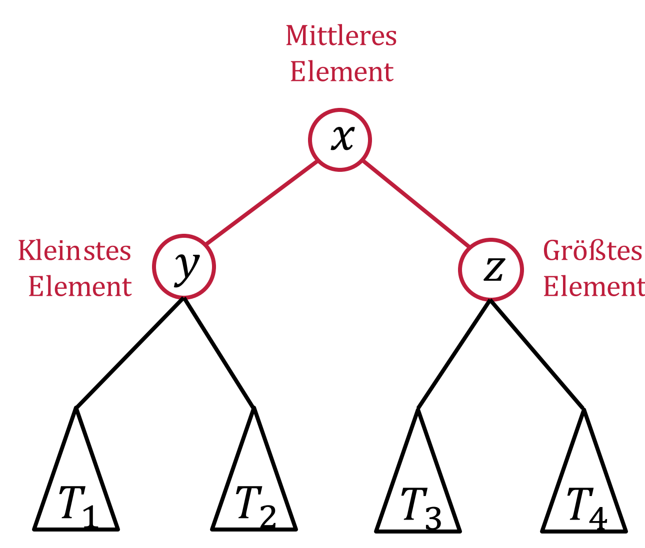
Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Betrachte den unbalancierten Knoten z,
sein Kind y und dessen Kind x.

Sortiere Elemente aufsteigend und rotiere entsprechend.

Die Teilbäume $T_1, \ldots T_4$ werden wieder an den neuen, rotierten Baum angehängt.

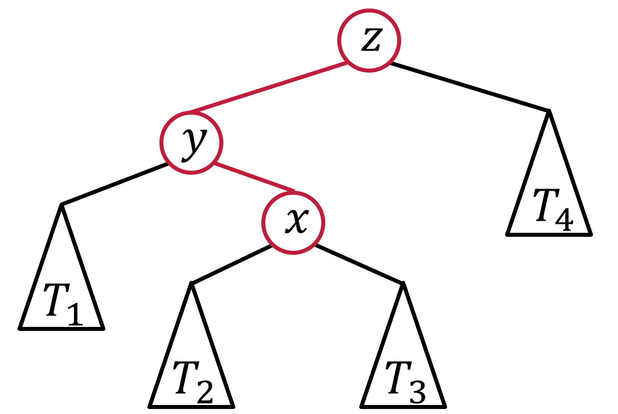


AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

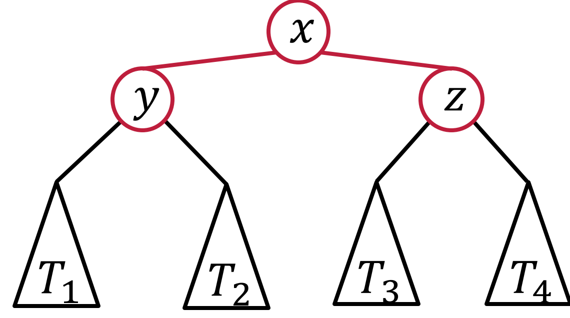
1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Betrachte den unbalancierten Knoten z,
sein Kind y und dessen Kind x.



Sortiere Elemente aufsteigend und rotiere entsprechend.

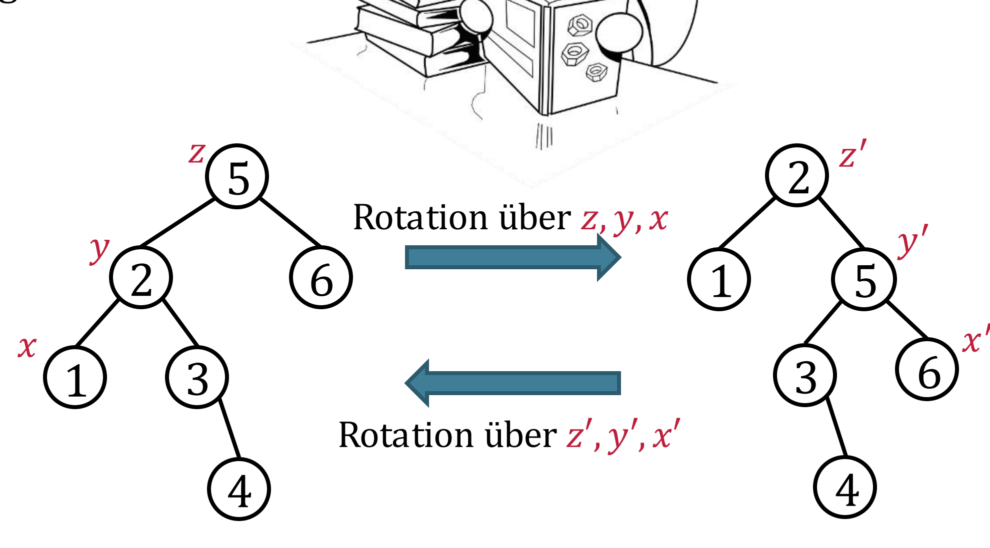
Die Teilbäume $T_1, \ldots T_4$ werden wieder an den neuen,
rotierten Baum angehängt.



AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

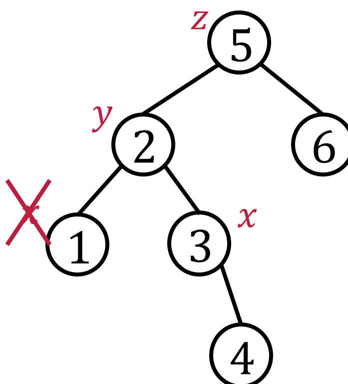


AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

1. Starte bei tiefstem unbalancierten Knoten: Das ist z.
2. Wähle Kinder (x, y) nach deren Höhe aus.



AVL-Bäume – Beispiele

DELETE$(T, 11)$

AVL-Bäume – Beispiele

INSERT$(T, 19)$

AVL-Bäume – Beispiele

$\text{INSERT}(T, 19)$

13 4
10 1
25 3 z
16 2 y
19 1 x

RESTRUCTURE →

13 3
10 1
19 2
16 1
25 1

AVL Restructure - Zusammenfassung

Merkblatt! ★

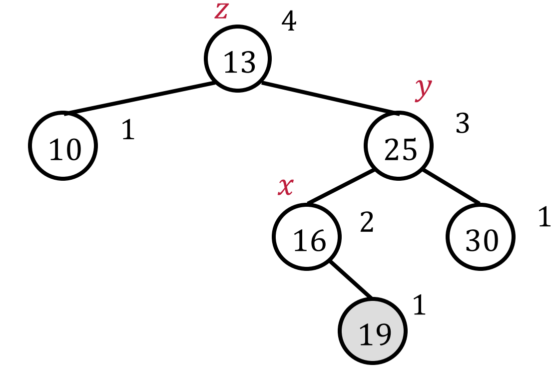
Ist nach INSERT oder DELETE die AVL-Eigenschaft verletzt, kann diese mit RESTRUCTURE wiederhergestellt werden.

Nach INSERT reicht *ein* RESTRUCTURE-Aufruf, um die Höhenbalanciertheit wiederherzustellen.

Nach DELETE können *mehrere* (genauer gesagt $O(\log n)$ viele) Aufrufe von RESTRUCTURE nötig sein.

RESTRUCTURE verlangt drei Knoten x, y und z als Argumente:

- Starte beim tiefsten unbalancierten Knoten: Das ist z.
- Das Kind von z mit größerer Höhe ist y.
- Das Kind von y mit größerer Höhe ist x.



Fragen?

Das Master-Theorem

Satz: Sei $T: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Form

$$T(n) := \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}$ und $0 < \alpha_i < 1$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.
Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k), & \text{falls } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n), & \text{falls } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k \dots \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1, & \text{falls } \sum_{i=1}^{m} \dots \end{cases}$$

Technische Universität Braunschweig | Arne Schmidt | Mergesort, Master-Theorem, Heapsort | Seite 13

Build-Max-Heap

```
1:  function MAX-HEAPIFY(A, i)
2:    ℓ := links(i), r := rechts(i)
3:    if ℓ ≤ heap-größe[A] und A[ℓ] > A[i] then
4:      max := ℓ
5:    else
6:      max := i
7:    if r ≤ heap-größe[A] und A[r] > A[max] then
8:      max := r
9:    if max ≠ i then
10:     Vertausche A[max] und A[i]
11:     MAX-HEAPIFY(A, max)
```

$j-1$ — 12, 10, 11, 9, 6, 8, 1, 4, 7, 2, 5, 3

Für Knoten auf Ebene $h - j$ benötigen wir maximal $O(j)$ Durchgänge.

Jeder Durchgang kostet $O(1)$

Technische Universität Braunschweig | Arne Schmidt | Mergesort, Master-Theorem, Heapsort | Seite 28

Technische Universität Braunschweig

Algorithmen und Datenstrukturen – Übung #5

Mergesort, Master-Theorem, Heapsort

Ramin & Chek-Manh