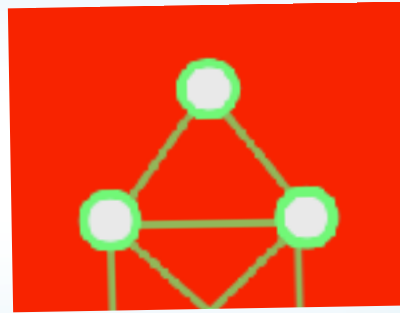
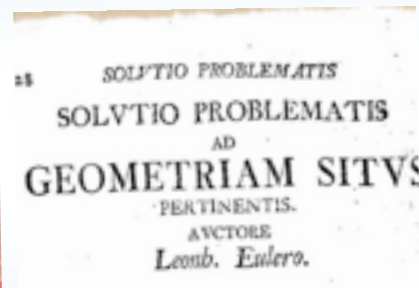




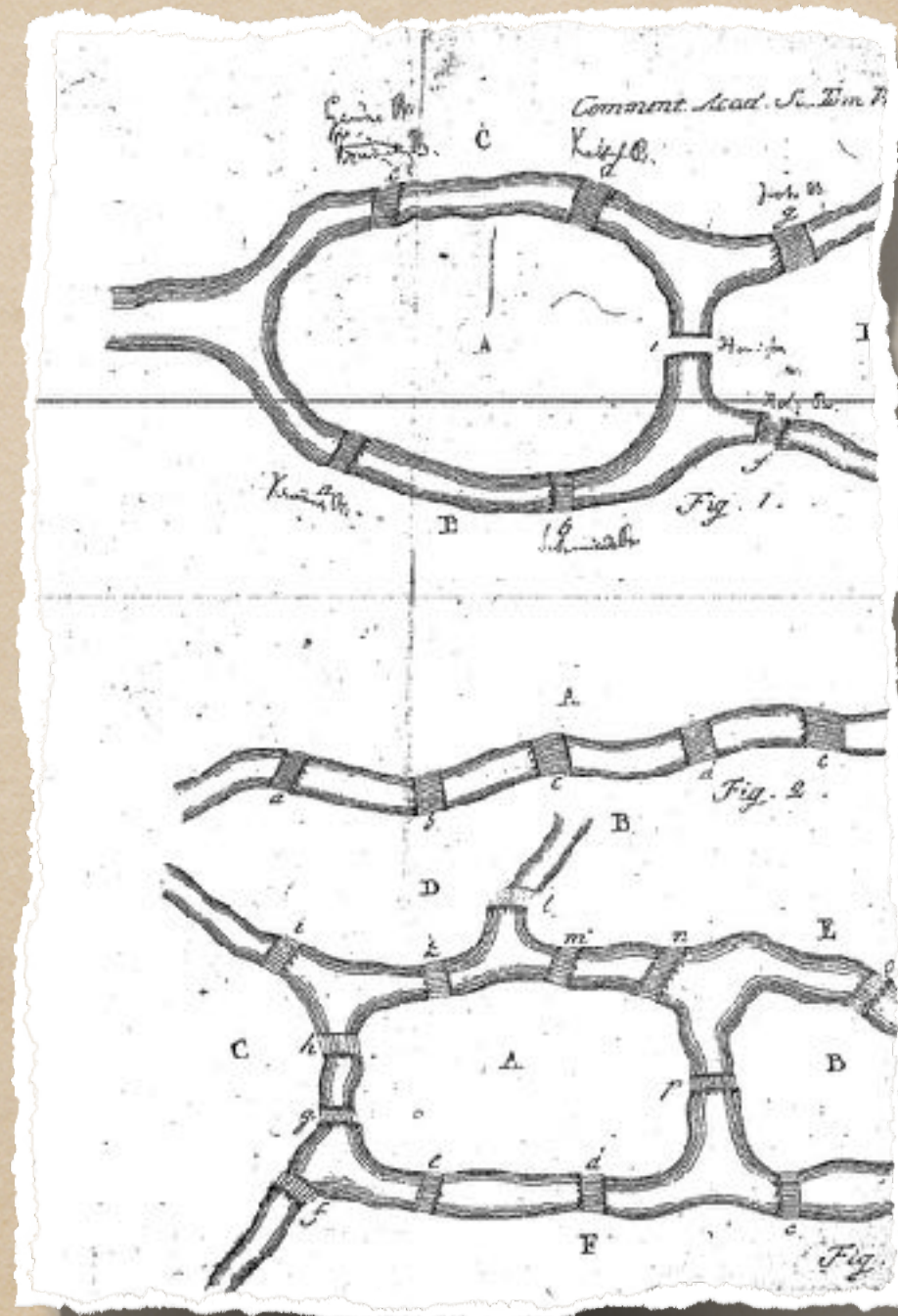
Kapitel 2.3: Eulerwege

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2025/26

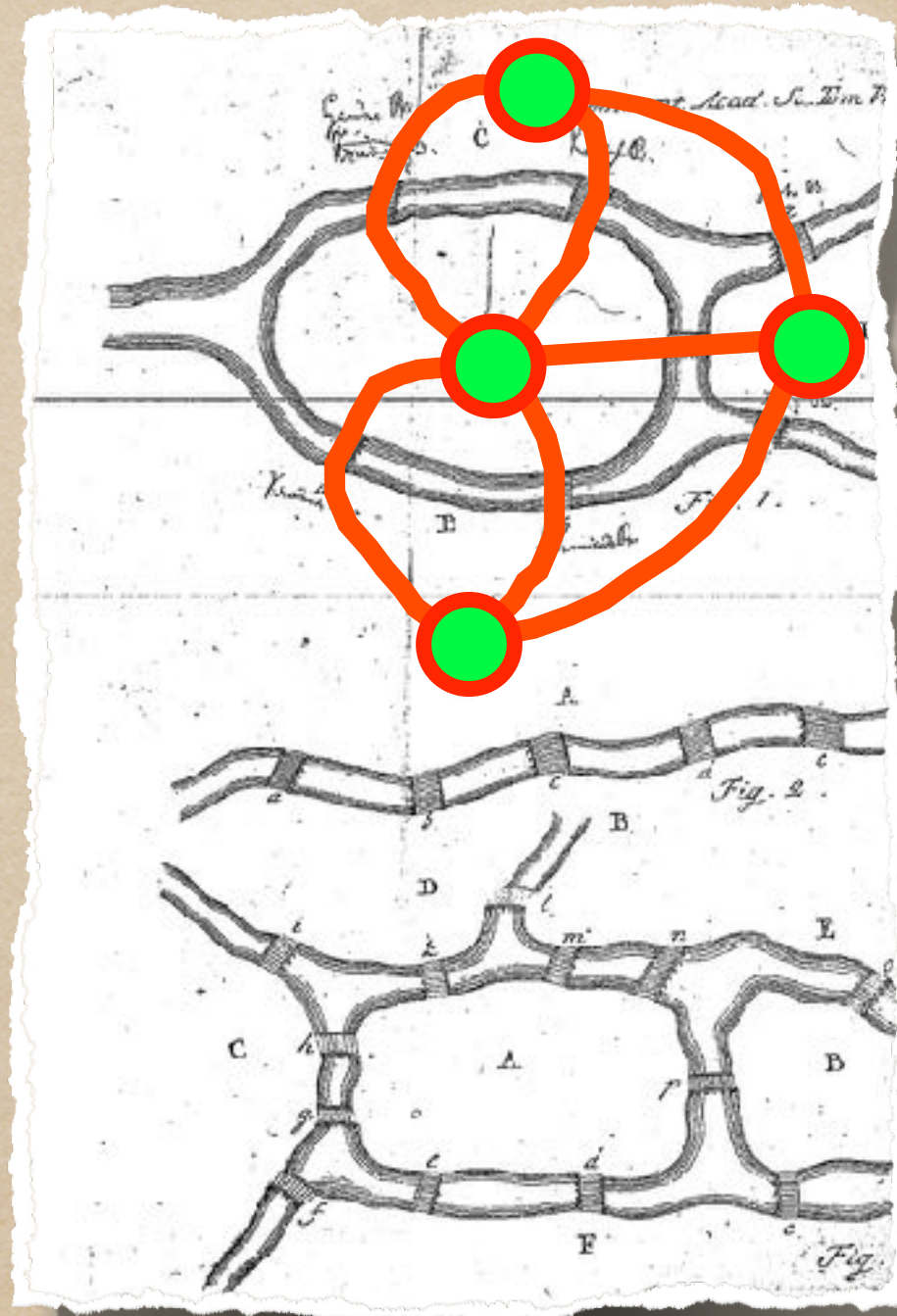
Prof. Dr. Sándor Fekete

2.1 História

2.1 História



2.1 História



2.1 Historie



- Alle Knoten sind ungerade?!

2.1 Historie



- Alle Knoten sind ungerade?!
- Man müsste an allen anfangen oder aufhören!

2.1 Historie



- Alle Knoten sind ungerade?!
- Man müsste an allen anfangen oder aufhören!
- Das geht nicht an einem Stück!

2.1 Historie

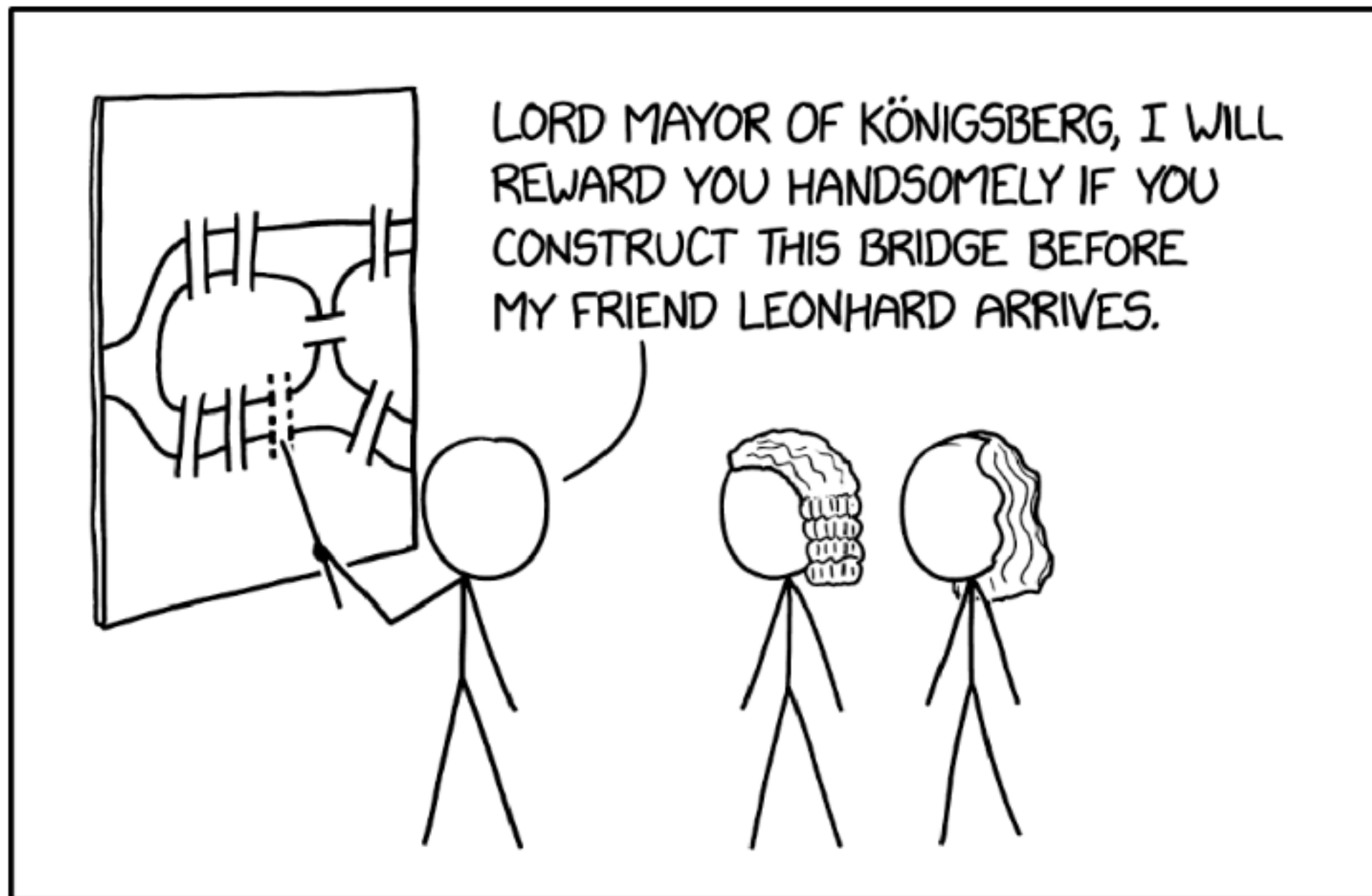


- Alle Knoten sind ungerade?!
- Man müsste an allen anfangen oder aufhören!
- Das geht nicht an einem Stück!

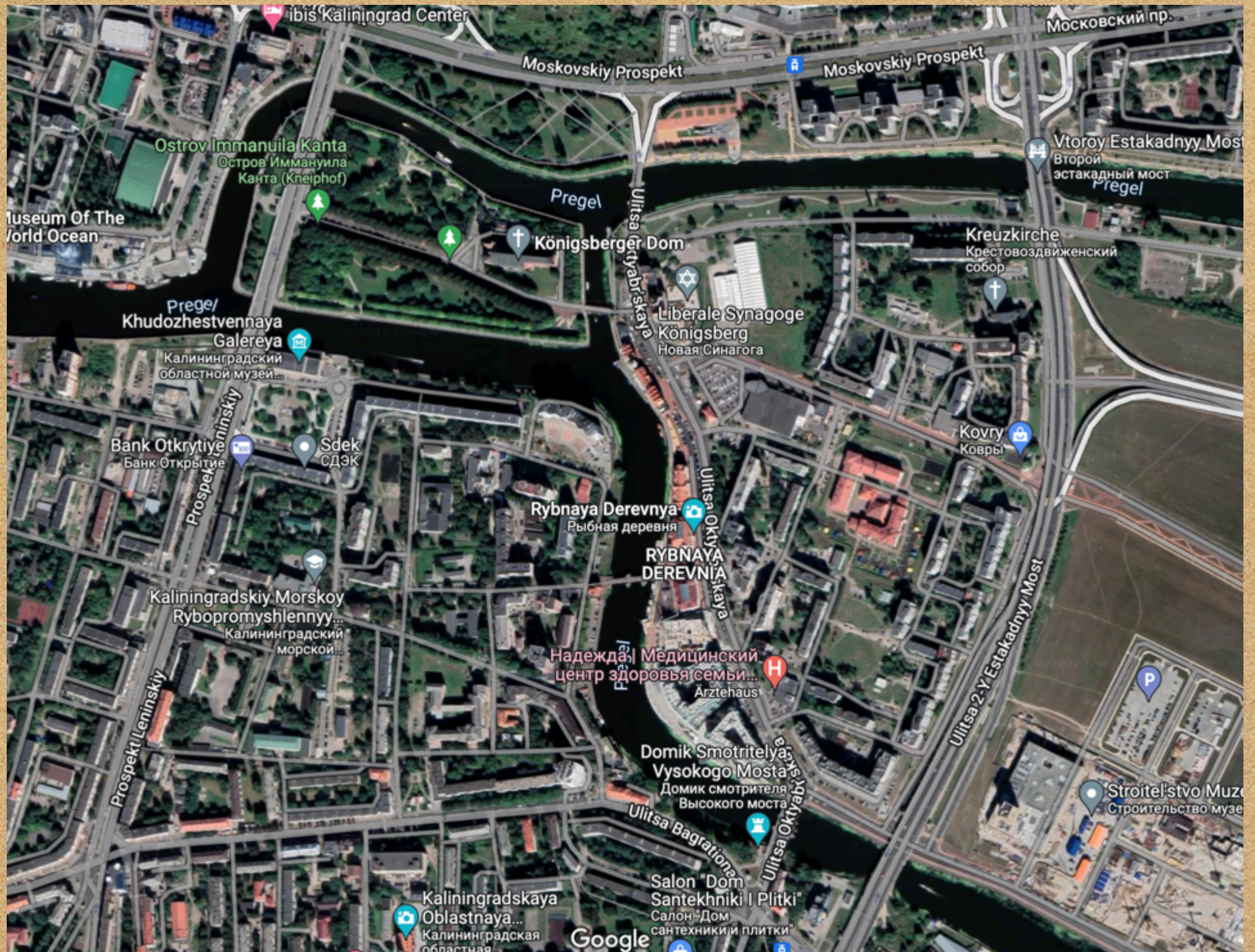
Euler: (1) Das gilt für jede beliebige Instanz: Mit mehr als zwei ungeraden Knoten gibt es keinen solchen Weg.

(2) Man kann auch charakterisieren, unter welchen Bedingungen es einen Weg tatsächlich gibt.

2.1 Historie



I TRIED TO USE A TIME MACHINE TO CHEAT ON MY ALGORITHMS FINAL BY PREVENTING GRAPH THEORY FROM BEING INVENTED.



ibis Kaliningrad Center

Moskovskiy Prospekt

Moskovskiy Prospekt

Московский пр.

Ostrov Immanuila Kanta
Остров Иммануила
Канта (Kneiphof)

Museum Of The
World Ocean

Pregel

Königsberger Dom

Ulitsa Oktyabr'skaya

Liberala Synagoge
Königsberg
Новая Синагога

Kreuzkirche
Крестовоздвиженский
собор

Vtoroy Estakadnyy Most
Второй
эстакадный мост

Pregel/
Khudozhestvennaya
Galereya

Калининградский
областной музей...

Bank Otkrytiye
Банк Открытие

Sdek
СДЭК

Ковры
Ковры

Rybnaya Derevnnya
Рыбная деревня

RYBNAYA
DEREVNIA

Ulitsa Oktyabr'skaya

Kaliningradskiy Morskoy
Rybpromyshlennyy...
Калининградский
морской...

Надежда | Медицинский
центр здоровья семьи...
Ärztel'noy

Domik Smotritelya
Vysokogo Mosta
Домик смотрителя
Высокого моста

Ulitsa Bagrationa
Ulitsa Oktyabr'skaya

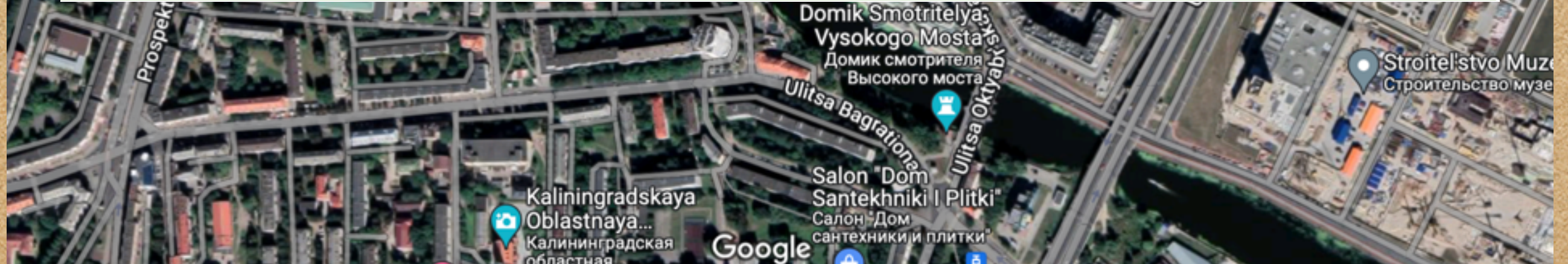
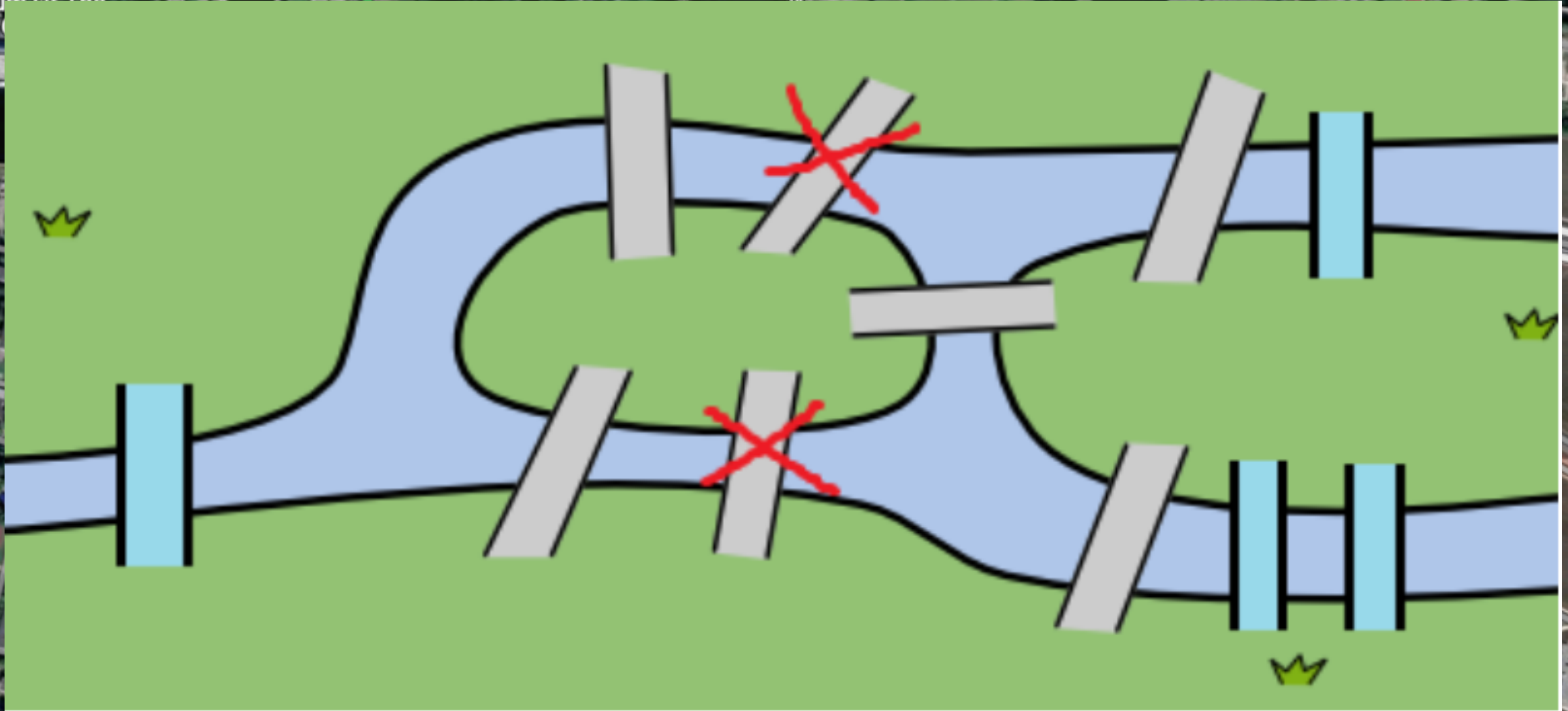
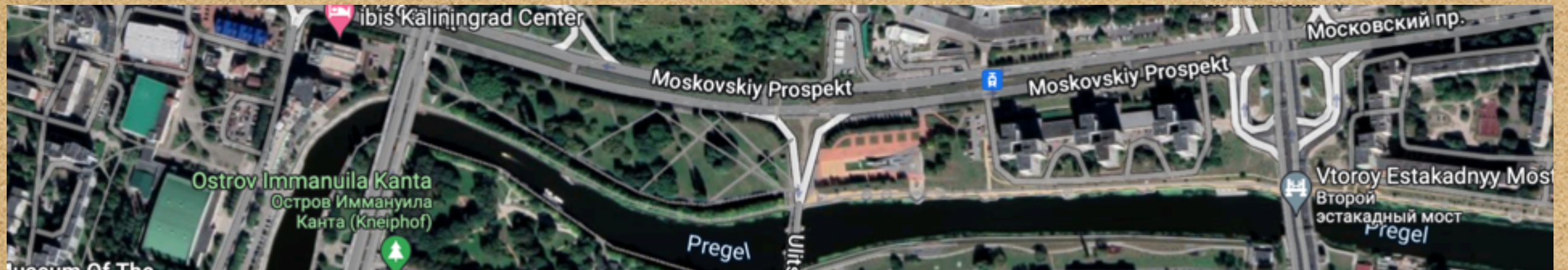
Salon "Dom
Santekhniki I Plitki"
Салон "Дом
сантехники и плитки"

Kaliningradsкая
Oblastnaya...
Калининградская
областная...

Google

Ulitsa 2-Y Estakadnyy Most

Stroitel'stvo Muze
Строительство музе



2.3 Eulerwege

2.3 Eulerwege

Problem 2.3 (*Eulerweg*)

2.3 Eulerwege

Problem 2.3 (*Eulerweg*)

Gegeben: Ein Graph $G=(V,E)$

2.3 Eulerwege

Problem 2.3 (*Eulerweg*)

Gegeben: Ein Graph $G=(V,E)$

Gesucht: Ein Eulerweg W in G - oder ein Argument, dass kein Eulerweg existiert

2.3 Eulerwege

2.3 Eulerwege

Satz 2.4 (Euler)

2.3 Eulerwege

Satz 2.4 (Euler)

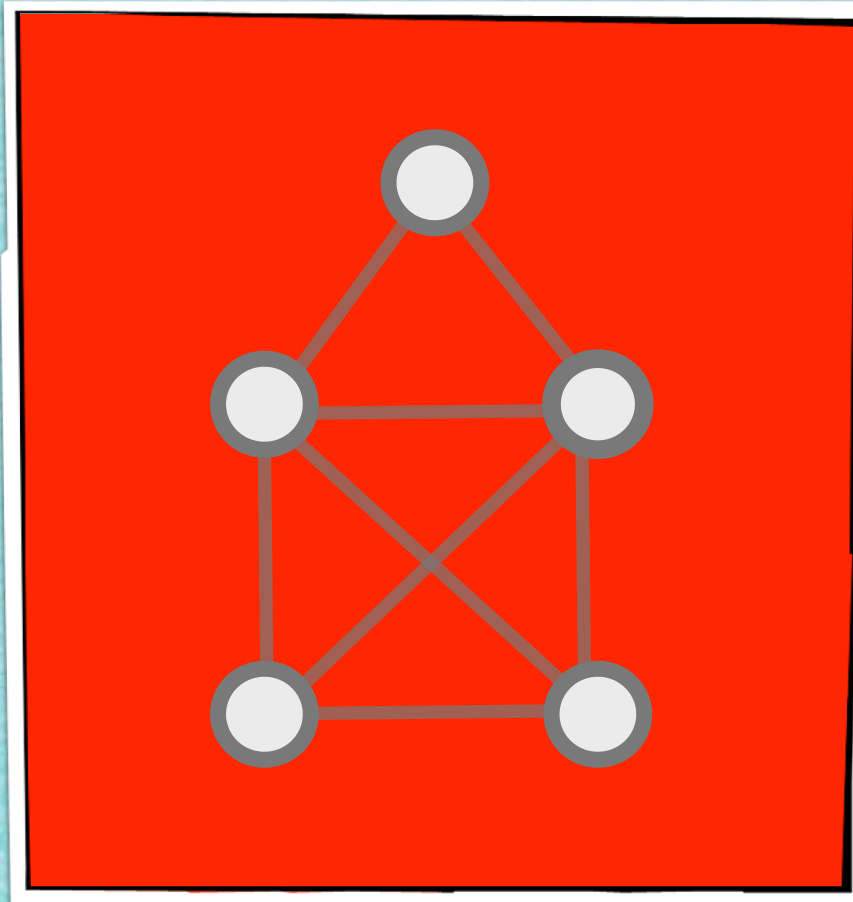
- (1) Ein Graph $G=(V,E)$ kann nur dann einen Eulerweg haben, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.**

2.3 Eulerwege

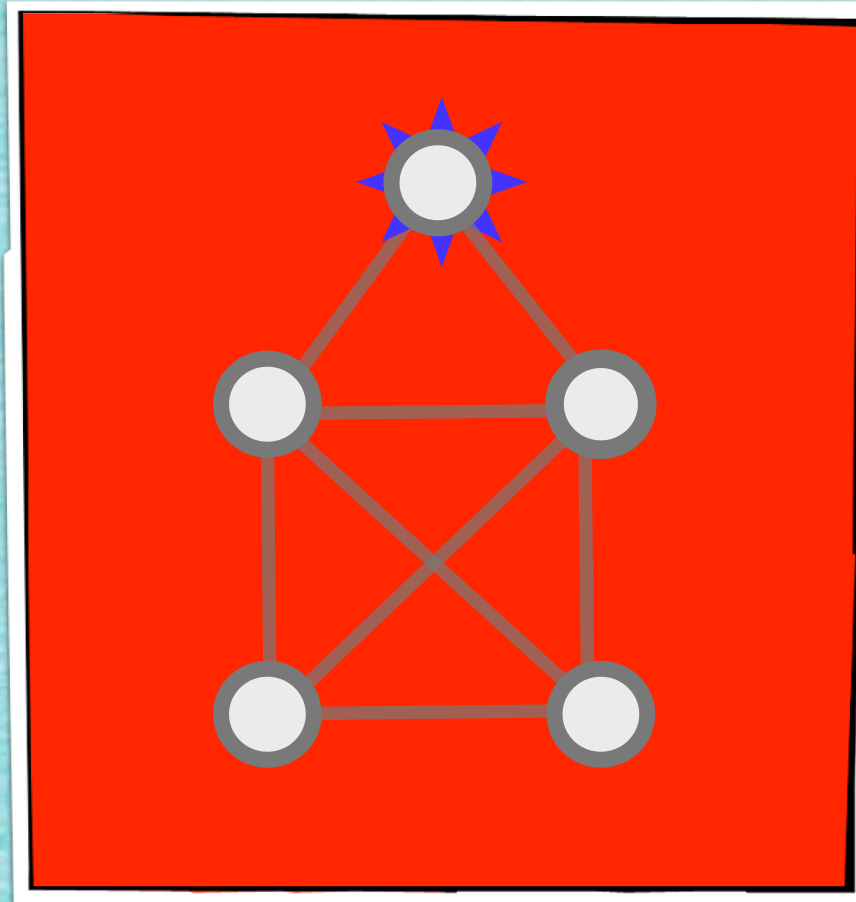
Satz 2.4 (Euler)

- (1) Ein Graph $G=(V,E)$ kann nur dann einen Eulerweg haben, wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.**
- (2) Ein Graph $G=(V,E)$ kann nur dann einen geschlossenen Eulerweg haben, wenn alle Knoten geraden Grad haben.**

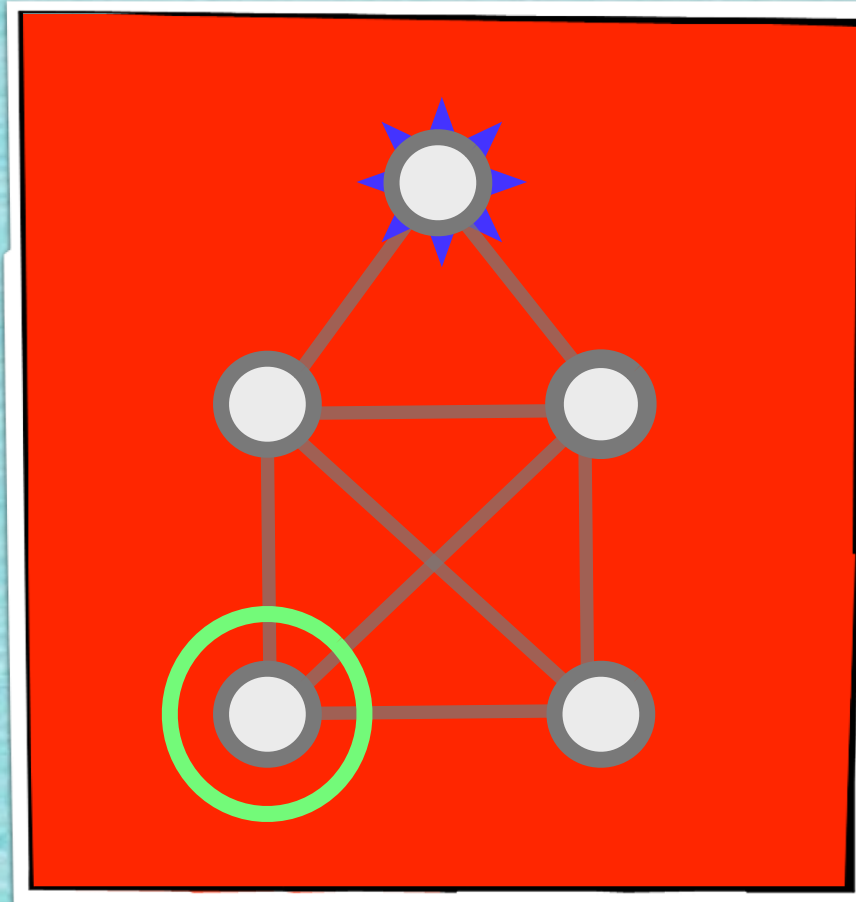
Das Haus des Nikolaus



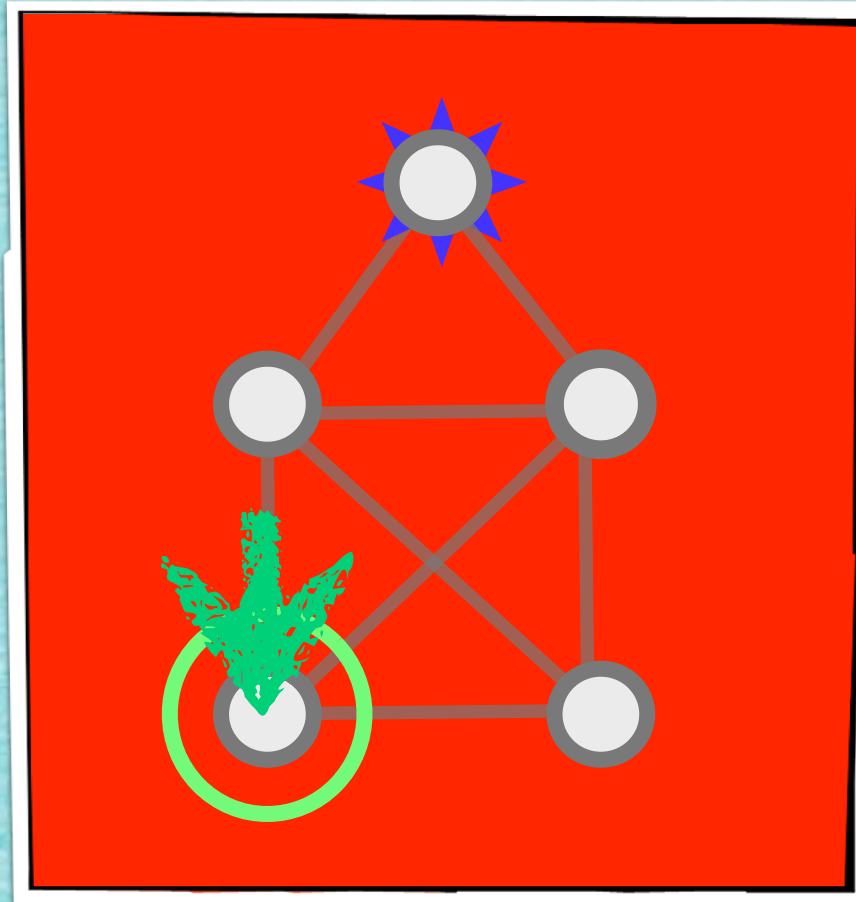
Das Haus des Nikolaus



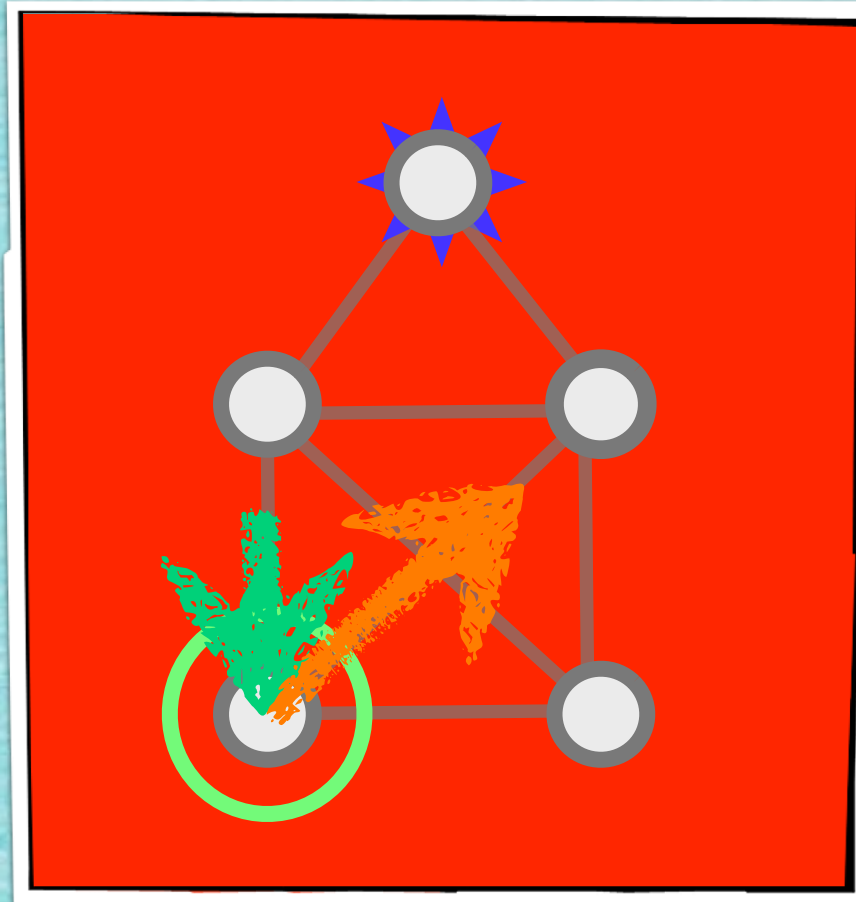
Das Haus des Nikolaus



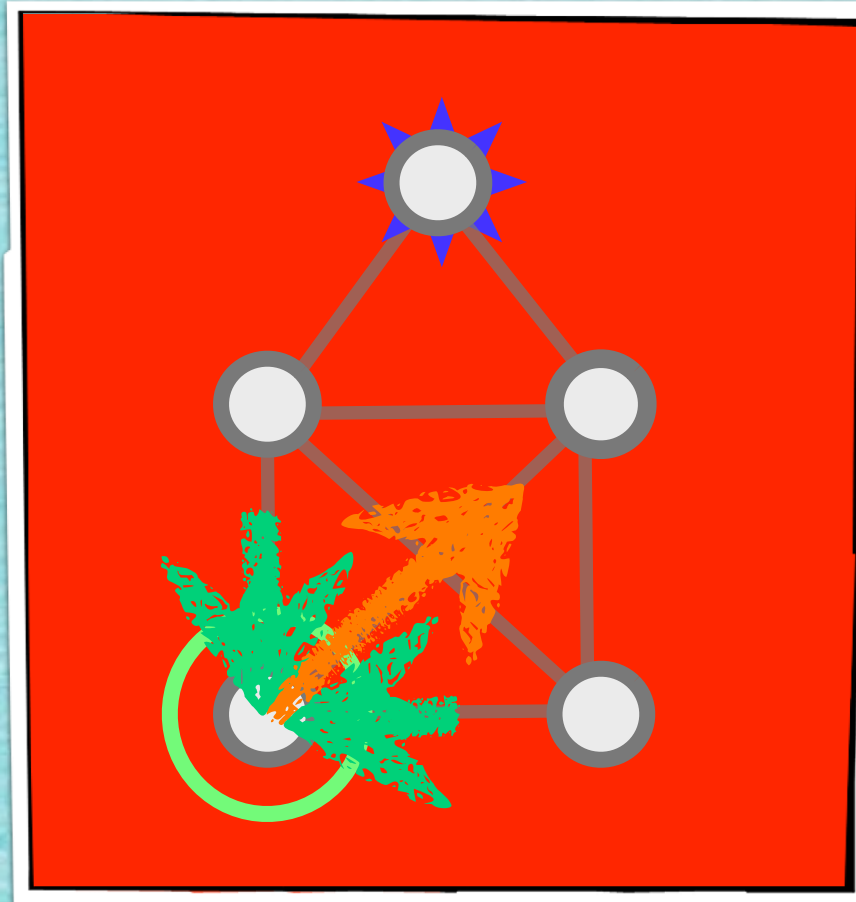
Das Haus des Nikolaus



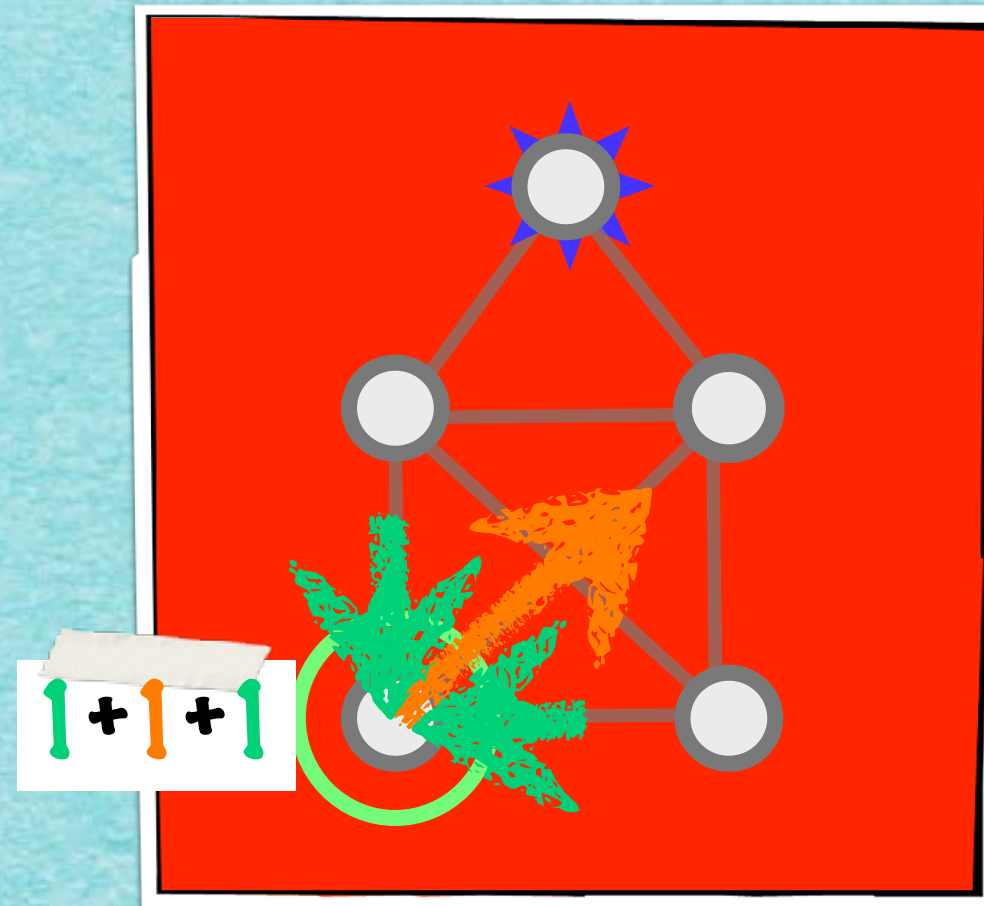
Das Haus des Nikolaus



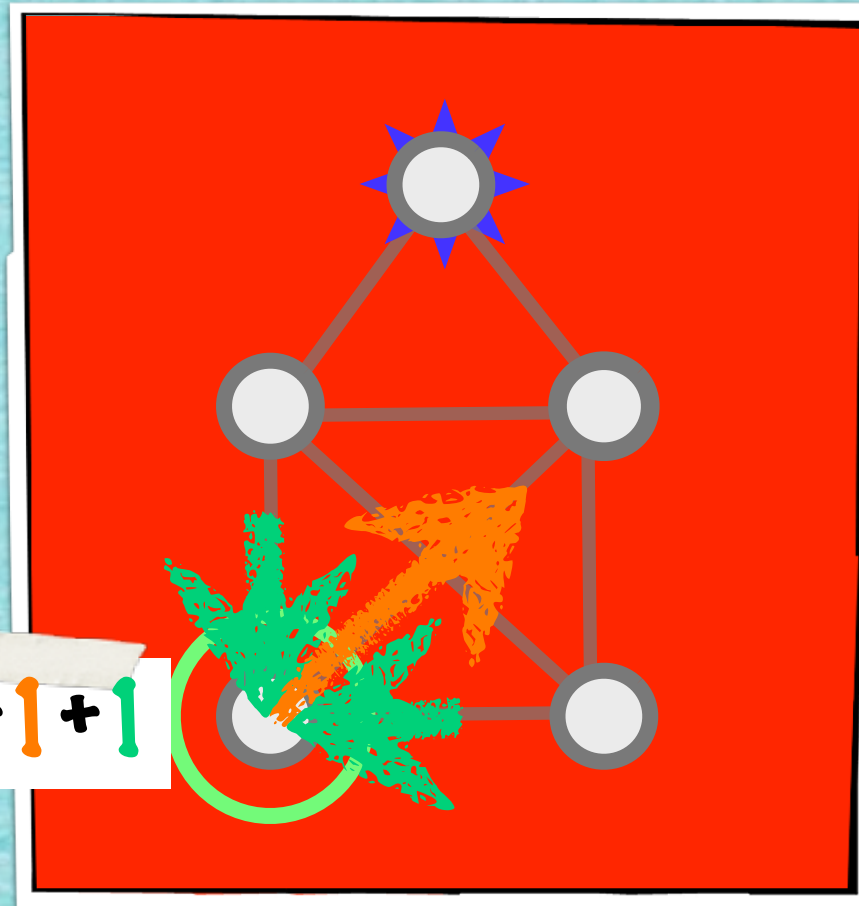
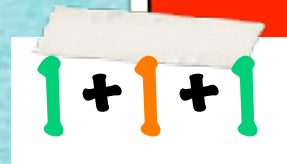
Das Haus des Nikolaus



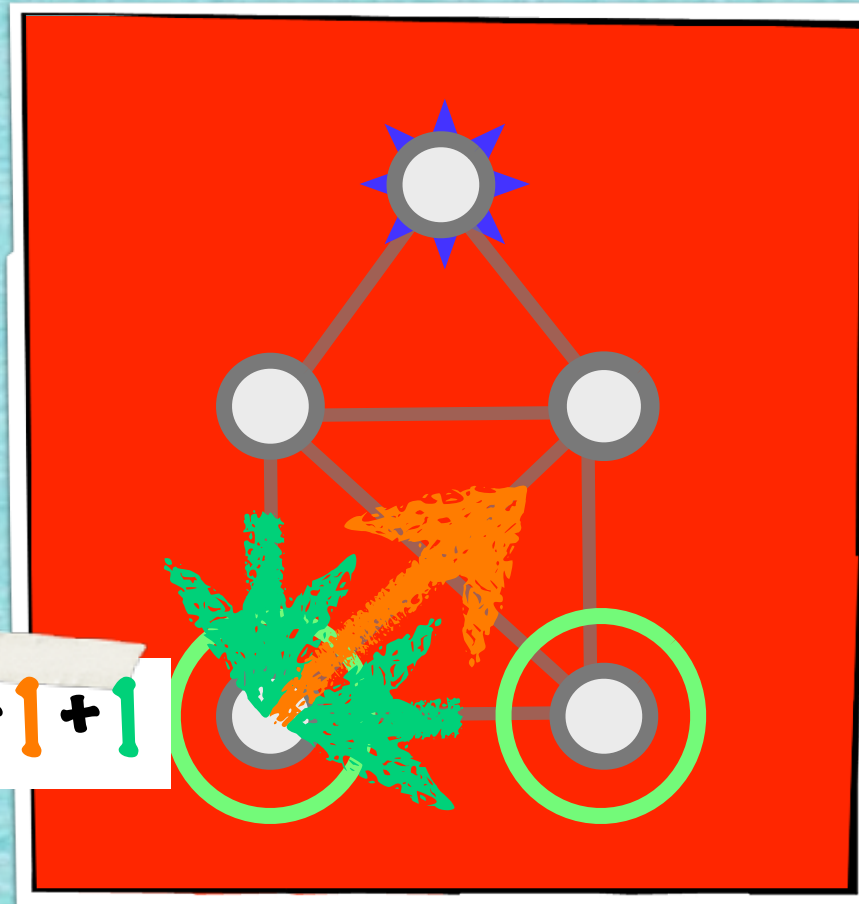
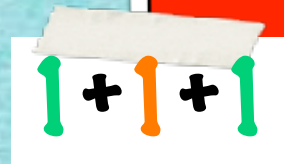
Das Haus des Nikolaus



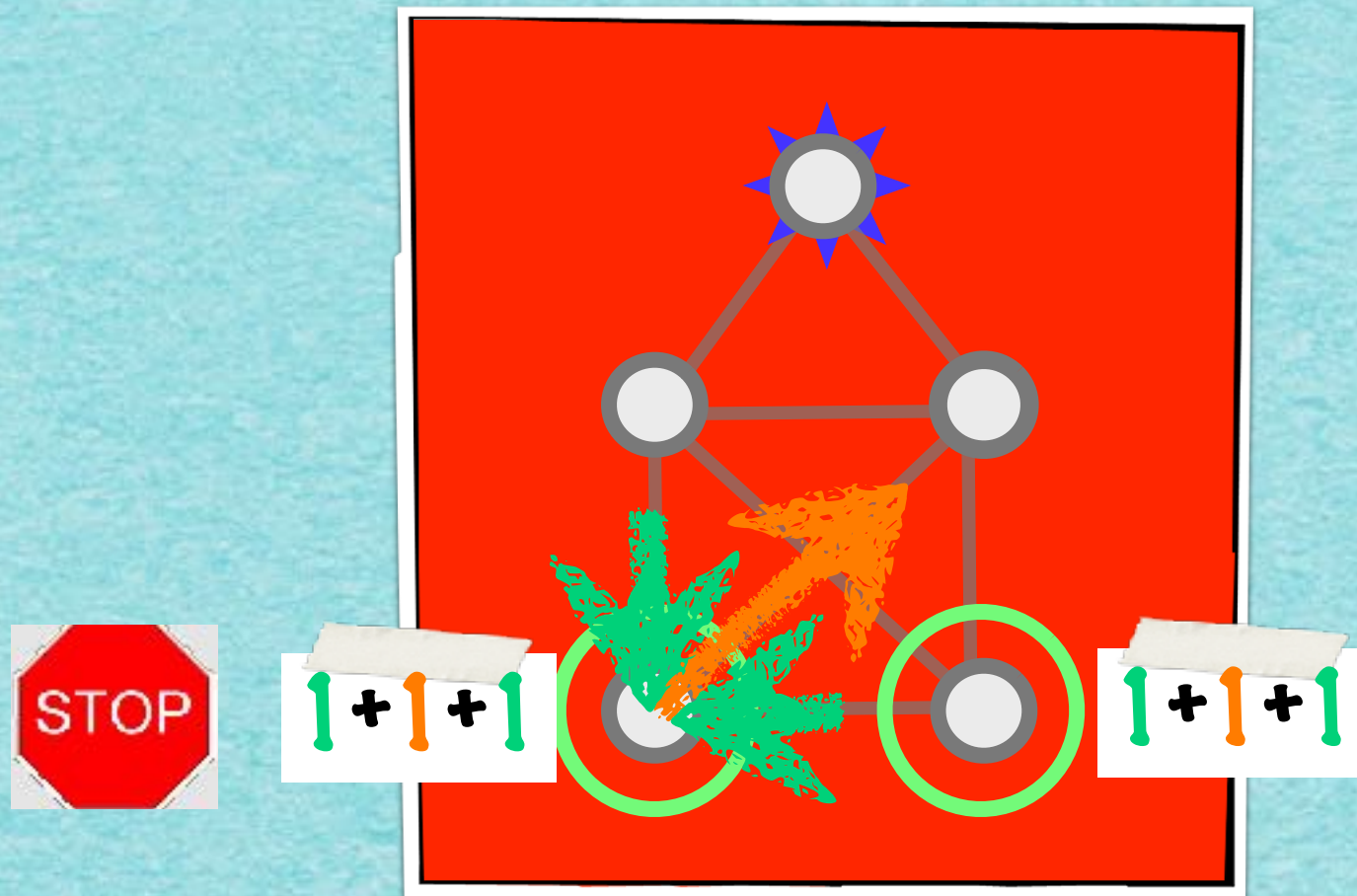
Das Haus des Nikolaus



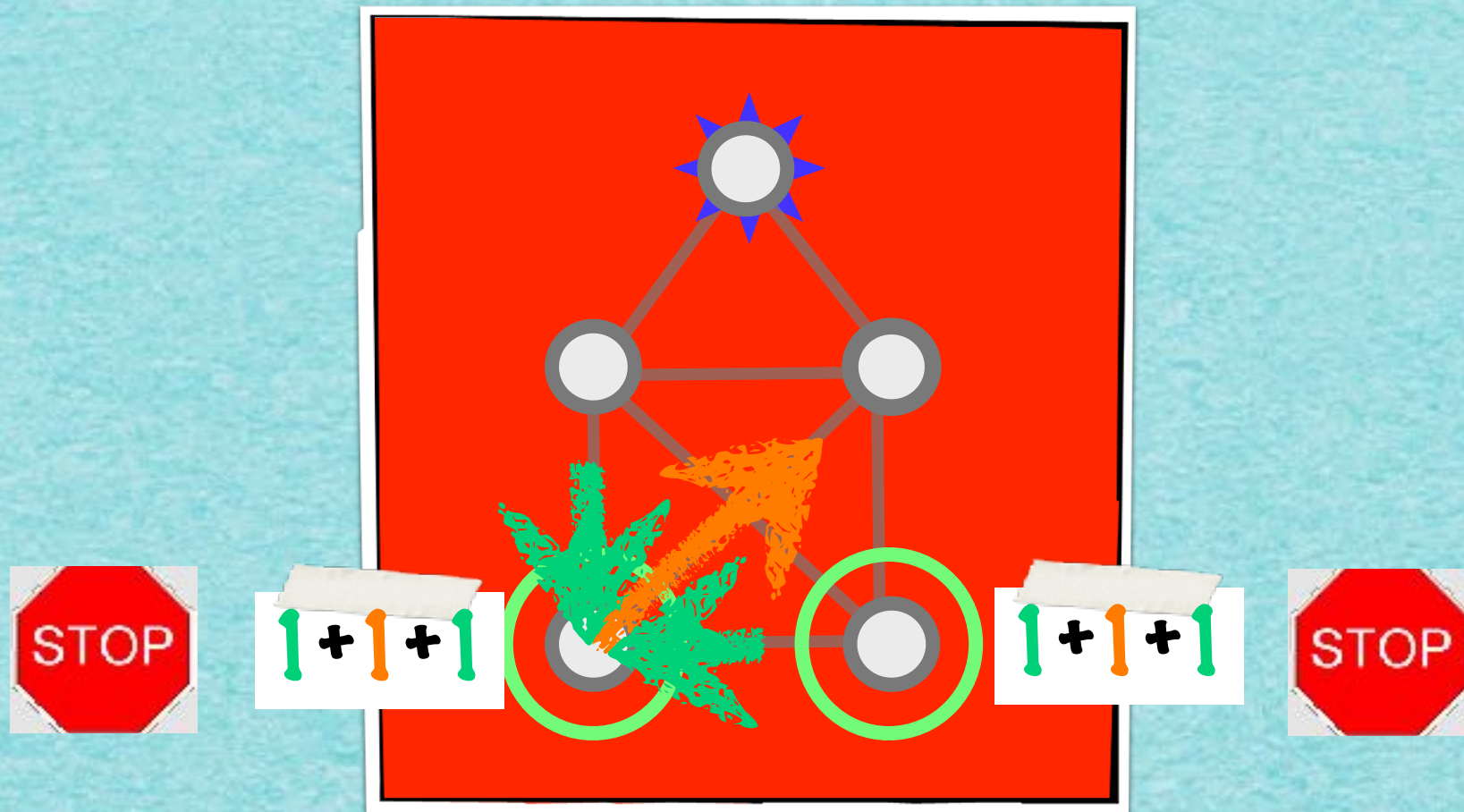
Das Haus des Nikolaus



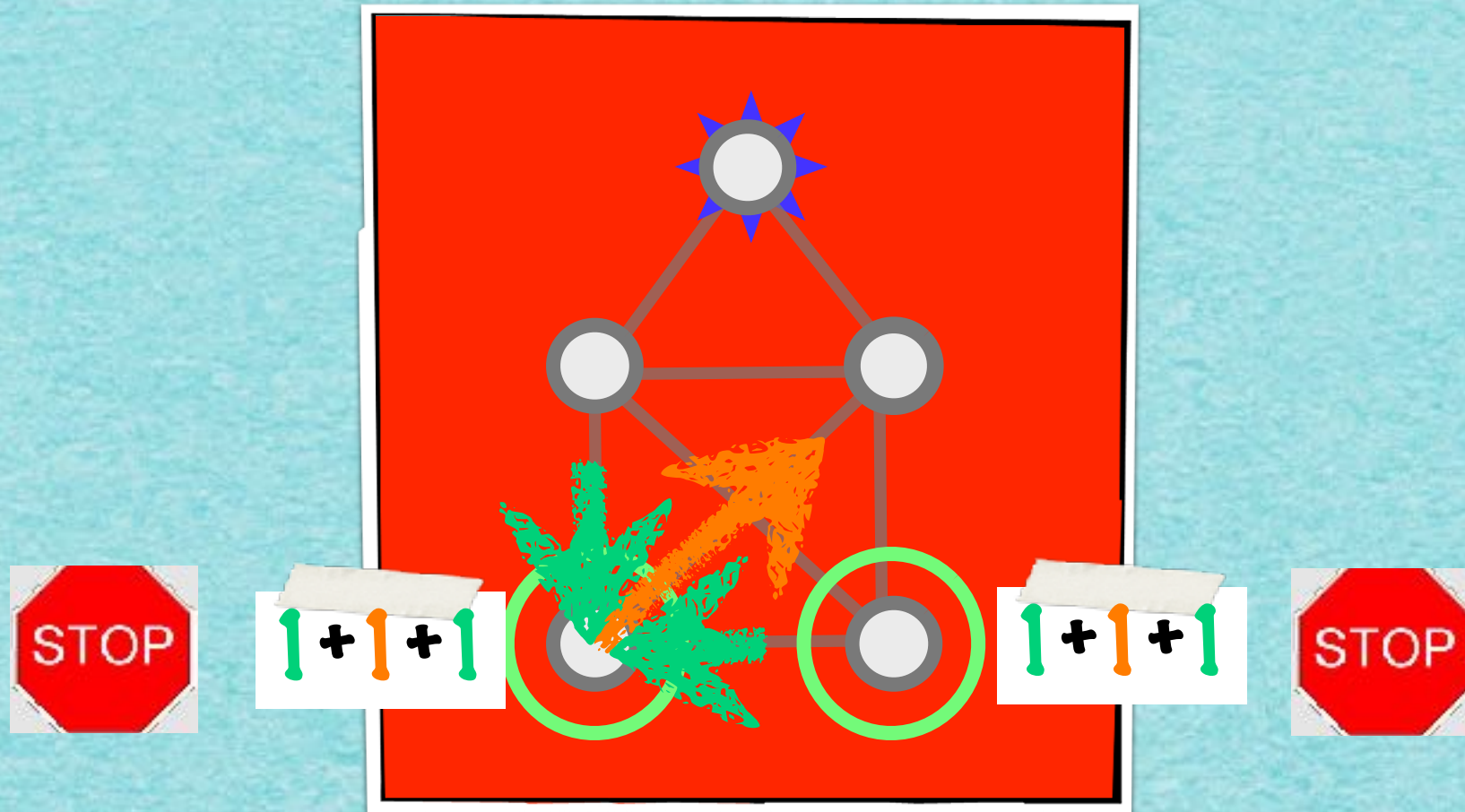
Das Haus des Nikolaus



Das Haus des Nikolaus



Das Haus des Nikolaus



Beweis. Seien $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$ ein Knoten mit ungeradem Grad $\delta(v)$. Dann kann die Zahl der in einem Eulerweg W zu v hinführenden Kanten nicht gleich der von v wegführenden Kanten sein. Also muss W in v beginnen oder enden. Damit:

- (1) Es gibt in einem Eulerweg nur einen Start- und Endknoten.
- (2) Bei einem geschlossenen Eulerweg gibt es für den Start- und Endknoten w gleich viele hin- und wegführende Kanten. Also ist auch $\delta(w)$ gerade. $\square$

2.3 Eulerwege

2.3 Eulerwege

Fragen:

2.3 Eulerwege

Fragen:

- (I) Was ist mit Graphen, in denen nur ein Knoten ungeraden Grad hat?

2.3 Eulerwege

Fragen:

- (I) Was ist mit Graphen, in denen nur ein Knoten ungeraden Grad hat?
- (II) Die Bedingungen oben sind *notwendig*, d.h. sie müssen auf jeden Fall erfüllt werden, wenn es eine Chance auf einen Eulerweg geben soll. Sind sie auch *hinreichend*, d.h. gibt es bei Erfüllung auch wirklich einen Eulerweg?

2.3 Eulerwege

Fragen:

- (I) Was ist mit Graphen, in denen nur ein Knoten ungeraden Grad hat?
- (II) Die Bedingungen oben sind *notwendig*, d.h. sie müssen auf jeden Fall erfüllt werden, wenn es eine Chance auf einen Eulerweg geben soll. Sind sie auch *hinreichend*, d.h. gibt es bei Erfüllung auch wirklich einen Eulerweg?
- (III) Wie findet man einen Eulerweg?

2.3 Eulerwege

Fragen:

- (I) Was ist mit Graphen, in denen nur ein Knoten ungeraden Grad hat?
- (II) Die Bedingungen oben sind *notwendig*, d.h. sie müssen auf jeden Fall erfüllt werden, wenn es eine Chance auf einen Eulerweg geben soll. Sind sie auch *hinreichend*, d.h. gibt es bei Erfüllung auch wirklich einen Eulerweg?
- (III) Wie findet man einen Eulerweg?
- (III') Wie sieht ein Algorithmus dafür aus?

2.3 Eulerwege

2.3 Eulerwege

Zu (I):

2.3 Eulerwege

Zu (I):

Satz 2.5 (*Handshake-Lemma*)

2.3 Eulerwege

Zu (I):

Satz 2.5 (*Handshake-Lemma*)

Für jeden einfachen Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeradem Grad eine gerade Zahl.

2.3 Eulerwege

2.3 Eulerwege

Zu (II):

2.3 Eulerwege

Zu (II):

Gegeben ein Graph G

2.3 Eulerwege

Zu (II):

Gegeben ein Graph G

- mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?

2.3 Eulerwege

Zu (II):

Gegeben ein Graph G

- mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?
- mit nur geraden Knoten. Hat er eine Eulertour?

2.3 Eulerwege

Zu (II):

Gegeben ein Graph G

- mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?
- mit nur geraden Knoten. Hat er eine Eulertour?

Nein!

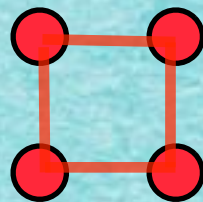
2.3 Eulerwege

Zu (II):

Gegeben ein Graph G

- mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?
- mit nur geraden Knoten. Hat er eine Eulertour?

Nein!



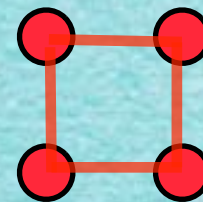
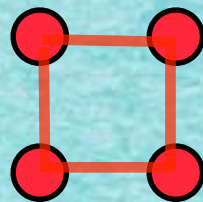
2.3 Eulerwege

Zu (II):

Gegeben ein Graph G

- mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?
- mit nur geraden Knoten. Hat er eine Eulertour?

Nein!



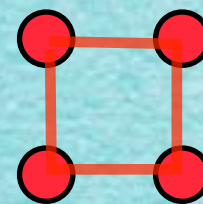
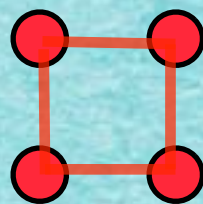
2.3 Eulerwege

Zu (II):

Gegeben ein Graph G

- mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?
- mit nur geraden Knoten. Hat er eine Eulertour?

Nein!



Der Graph muss zusammenhängend sein!

2.3 Eulerwege

2.3 Eulerwege

Zu (II):

Gegeben ein ***zusammenhängender*** Graph G

- mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?
- mit nur geraden Knoten. Hat er eine Eulertour?

2.3 Eulerwege

Zu (II):

Gegeben ein ***zusammenhängender*** Graph G

- mit nur zwei ungeraden Knoten. Hat er einen Eulerweg?
- mit nur geraden Knoten. Hat er eine Eulertour?

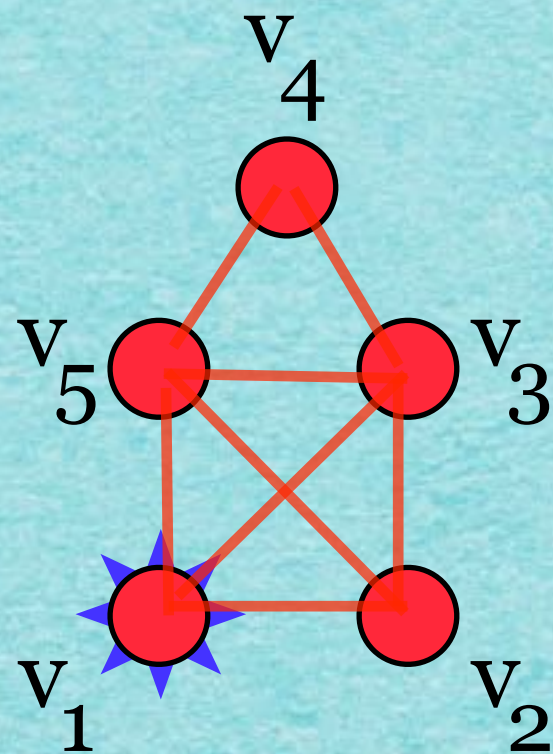
Grundtechnik:

Um zu sehen, wo man etwas richtig machen muss, überlegt man sich, wo man etwas falsch machen kann!

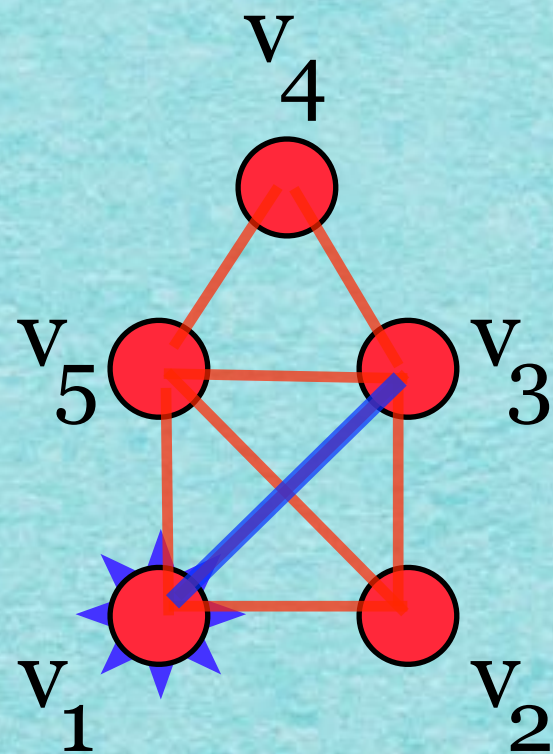
2.3 Eulerwege



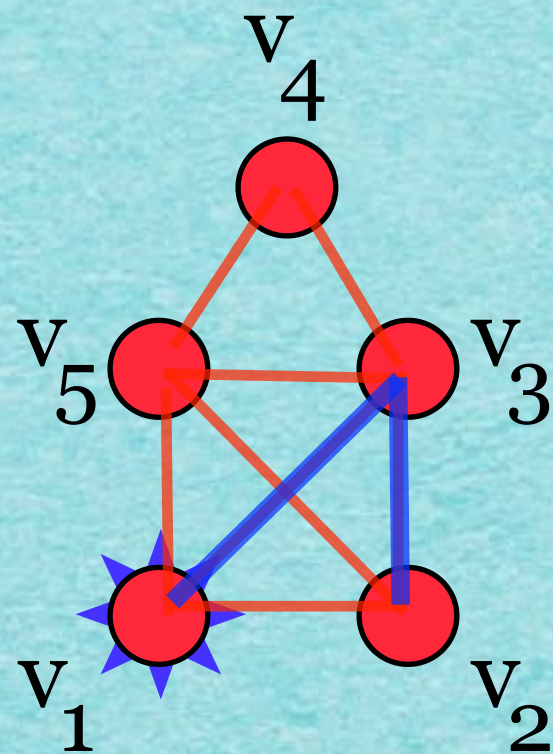
2.3 Eulerwege



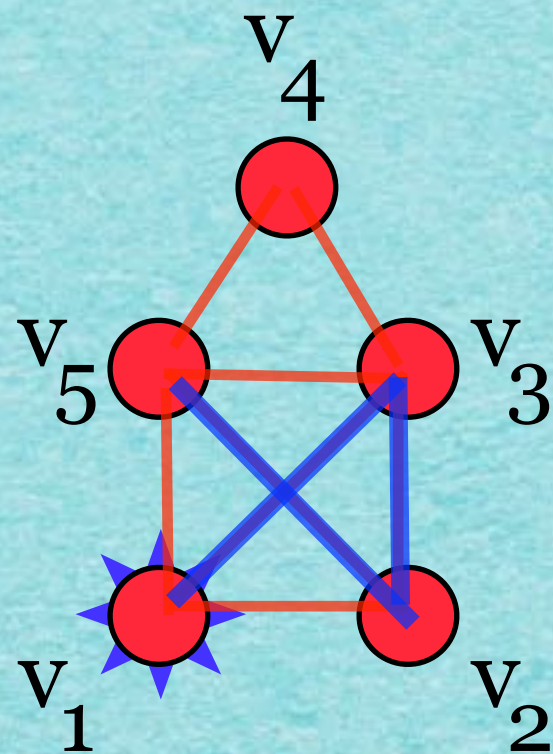
2.3 Eulerwege



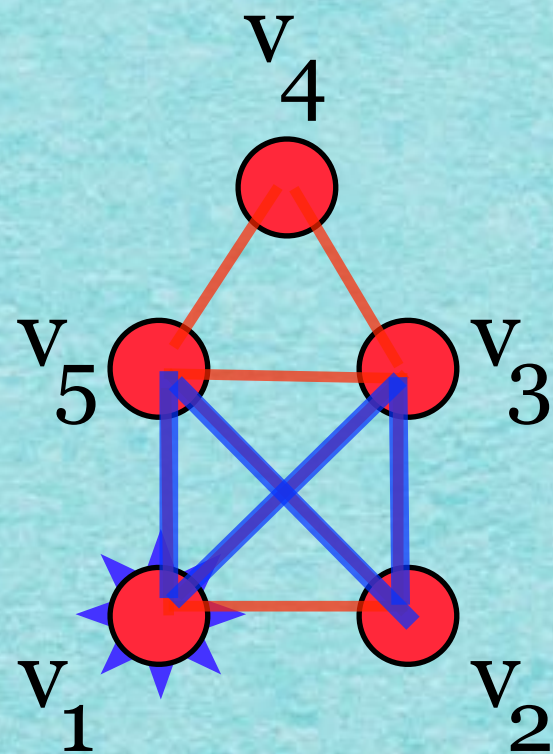
2.3 Eulerwege



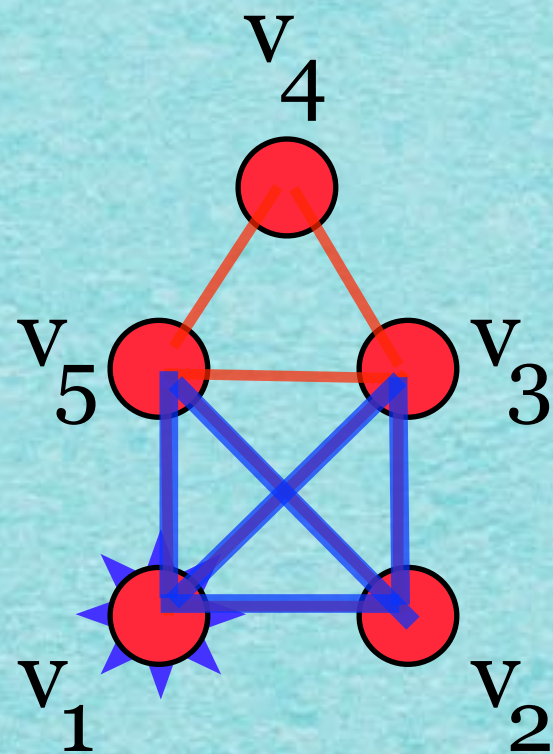
2.3 Eulerwege



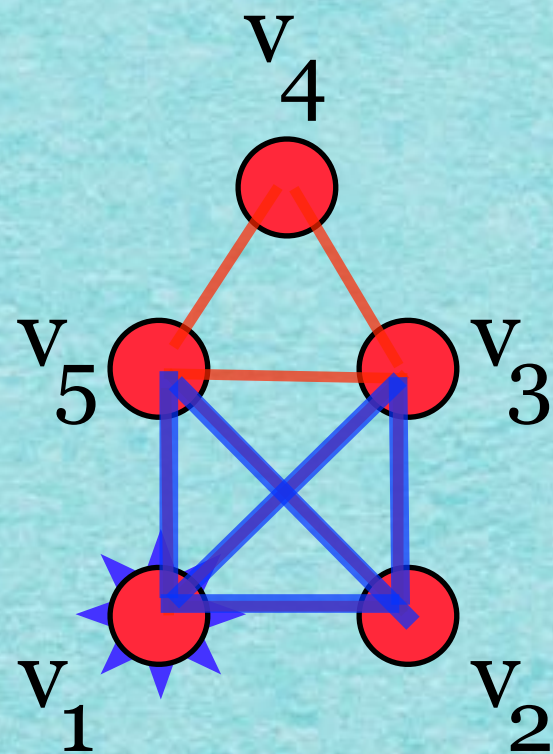
2.3 Eulerwege



2.3 Eulerwege



2.3 Eulerwege



Wir hinterlassen Kanten?!

Fortsetzung folgt...

s.fekete@tu-bs.de