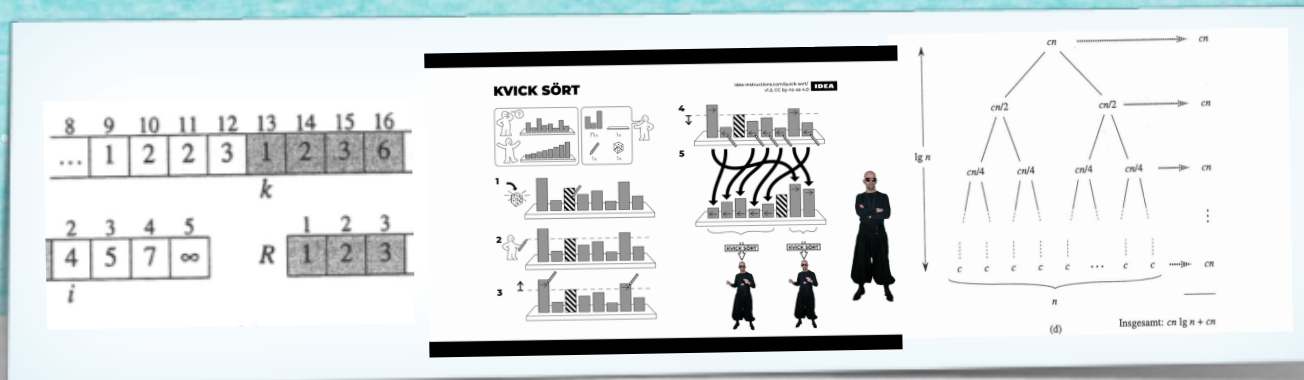




Kapitel 5.4: *Nichtlineare Rekursionen* *Algorithmen und Datenstrukturen* *WS 2025/26*

Prof. Dr. Sándor Fekete

5.3.3 Master-Theorem: Lineare Rekursionen



Sei $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^m T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

Wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{R}$ sind. Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log(n)) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^m \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

5.3.3 Master-Theorem: Beispiele

Sei $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^m T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

Wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{R}$ sind. Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log(n)) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^m \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

$U(n)$ mit $U(1) = 1$ und $U(n) = 8U\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$.

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_8 = \frac{1}{3}, m = 8, k = 2.$$

$U(3)$	$=$	$8 + 9$	$=$	17
$U(9)$	$=$	$8 \cdot 17 + 81$	$=$	217
$U(27)$	$=$	$8 \cdot 217 + 27^2$	$=$	2465
$U(81)$	$=$	$8 \cdot 2465 + 81^2$	$=$	26281
$U(243)$	$=$	$8 \cdot 26281 + 243^2$	$=$	269297

$$\sum_{i=1}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1,$$

$$U(n) \in \Theta(n^2)$$

5.3.3 Master-Theorem: Beispiele

Sei $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^m T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

Wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{R}$ sind. Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log(n)) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^m \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

$$V(1) = 1 \text{ und } V(n) = 9U\left(\frac{n}{3}\right) + n^2.$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_9 = \frac{1}{3}, m = 9, k = 2.$$

$$\begin{array}{llll} V(1) & = & 1 & = 1 \cdot 3^0 \\ V(3) & = & 9 \cdot 1 + 3^2 & = 2 \cdot 3^2 \\ V(9) & = & 9 \cdot (2 \cdot 3^2) + 9^2 & = 3 \cdot 3^4 \\ V(27) & = & 9 \cdot (3 \cdot 9^2) + 27^2 & = 4 \cdot 3^6 \\ V(81) & = & 9 \cdot (4 \cdot 27^2) + 81^2 & = 5 \cdot 3^8 \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^9 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$V(n) \in \Theta(n^2 \log(n))$$

5.3.3 Master-Theorem: Beispiele

Sei $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^m T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

Wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{R}$ sind. Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log(n)) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^m \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

$$W(1) = 1 \text{ und } W(n) = 10U\left(\frac{n}{3}\right) + n^2.$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{10} = \frac{1}{3}, m = 10, k = 2$$

$W(1)$	$=$	1	
$W(3)$	$=$	$10 \cdot 1 + 3^2$	$= 19$
$W(9)$	$=$	$10 \cdot 19 + 9^2$	$= 271$
$W(27)$	$=$	$10 \cdot 271 + 27^2$	$= 3439$
$W(81)$	$=$	$10 \cdot 3439 + 81^2$	$= 40951$
$W(243)$	$=$	$10 \cdot 40951 + 243^2$	$= 468559$

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 1,$$

$$c \text{ mit } \sum_{i=1}^{10} \alpha_i^c = 1$$

$$\begin{aligned} 10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^c &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^c &= \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow c &= \log_3(10) \approx 2,096. \end{aligned}$$

$$W(n) \in \Theta(n^{2,096\dots})$$

QUIZ!

▶ [menti.com](https://www.menti.com)

▶ 4919 2957



5.4 Nichtlineare Rekursionen

5.4.1 Logistische Rekursion

Wachstum proportional zu einer Größe:

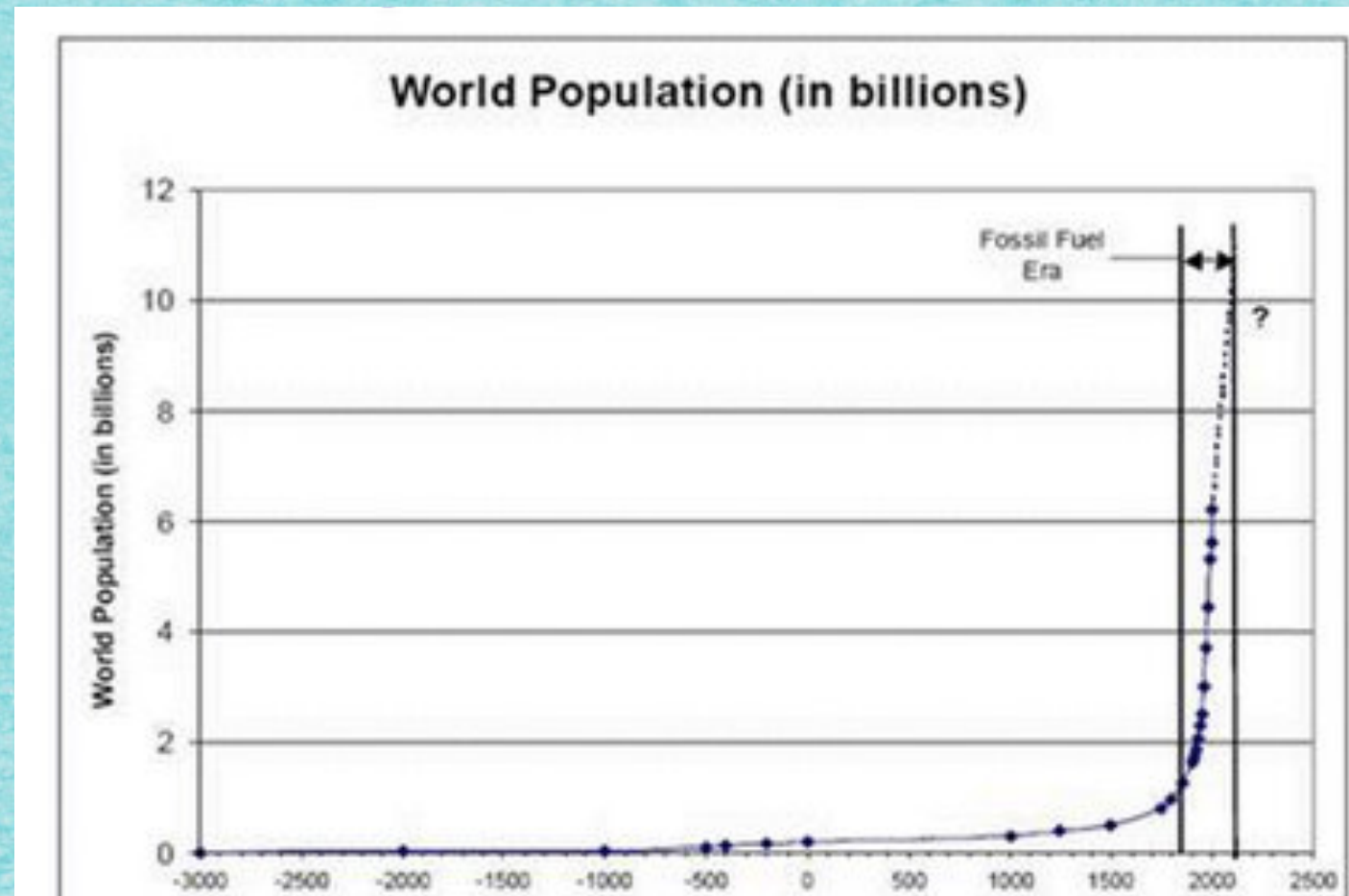
$$x_{n+1} = (1 + q)x_n$$

Ergebnis:

$$x_n = (1 + q)^n x_0$$

5.4.1 Logistische Rekursion

Exponentielles Wachstum:



Das geht nicht beliebig lange weiter!

5.4.1 Logistische Rekursion



Pierre-François Verhulst
(1804-1849)

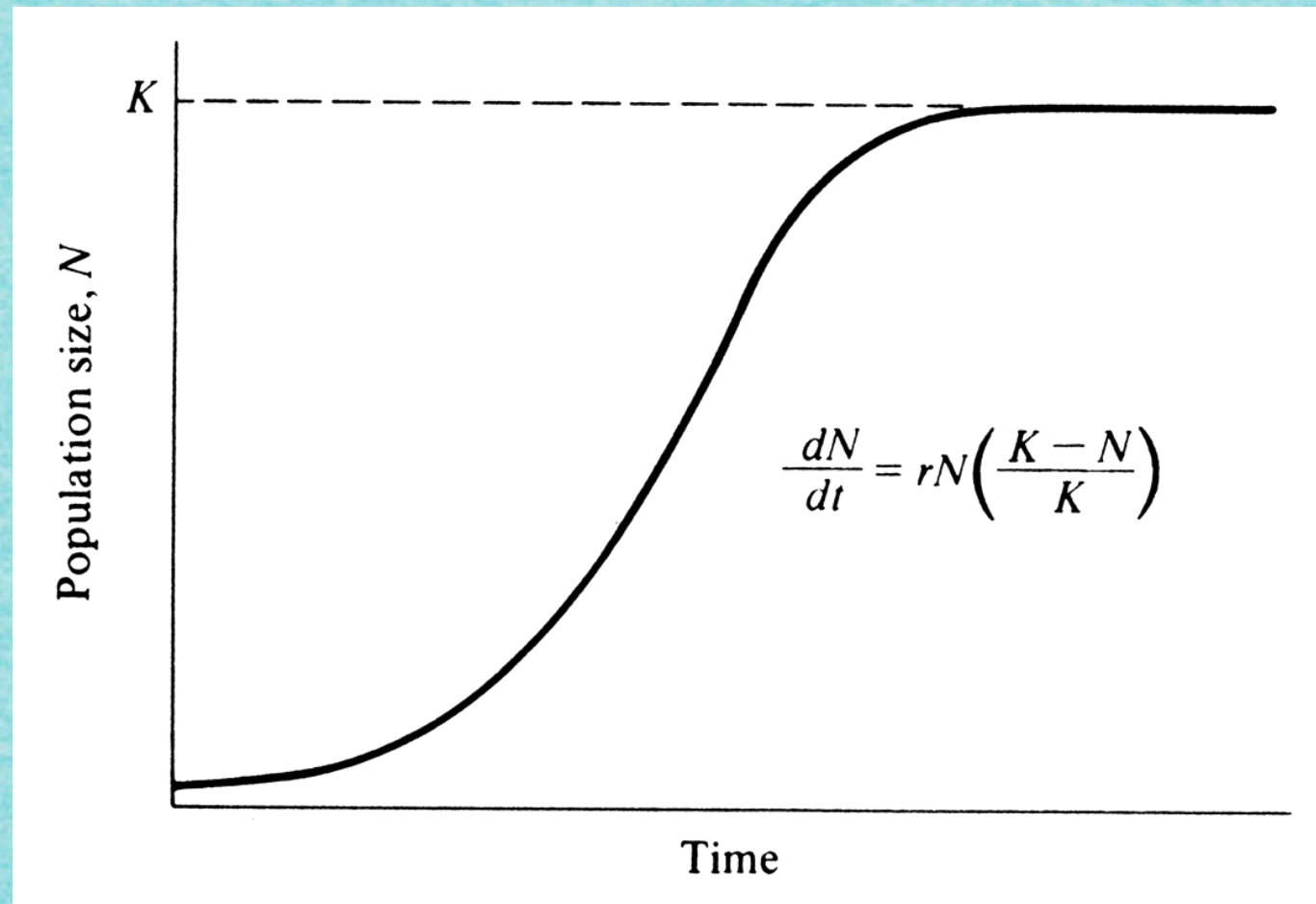
*Notice sur la loi que la population
poursuit dans son accroissement.*

In: *Corresp. Math. Phys.* 10, 1838, S. 113–121

*“Notiz über das Gesetz,
das die Bevölkerung bei ihrem
Wachstum befolgt.”*

5.4.1 Logistische Rekursion

Verhulst ursprünglich: Stetiger Prozess!



**In Populationsdynamik beobachtet:
Diskreter Prozess!**

5.4.1 Logistische Rekursion

Zuwachs durch Fruchtbarkeit:

$$x_{n+1} = q_f x_n$$

Schwund durch Verhungern (etc.):

$$x_{n+1} = q_f (G - x_n)$$

Zusammen:

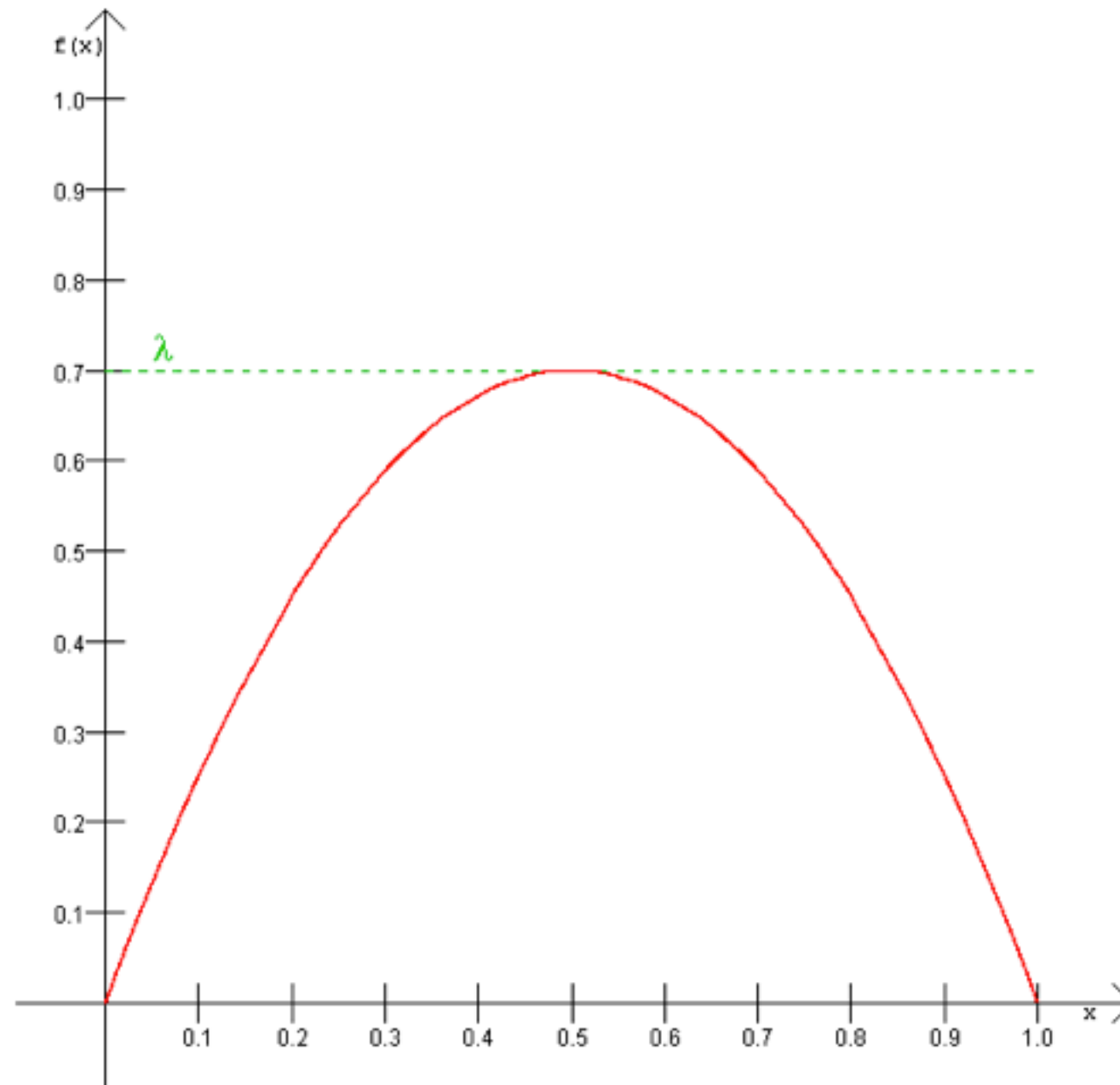
$$x_{n+1} = q_f q_v x_n (G - x_n)$$

Normiert:

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$$

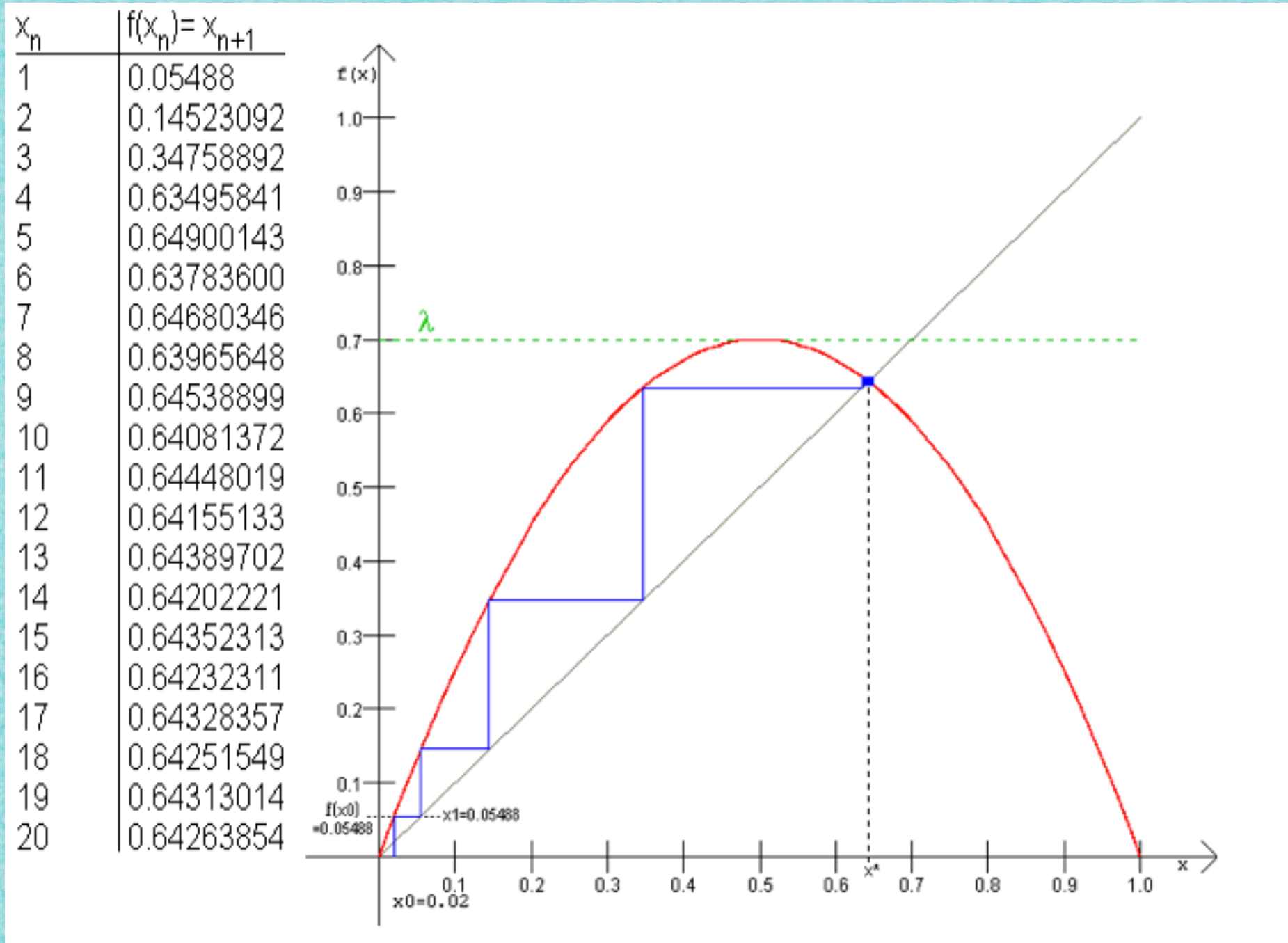
5.4.1 Logistische Rekursion

Bildlich:



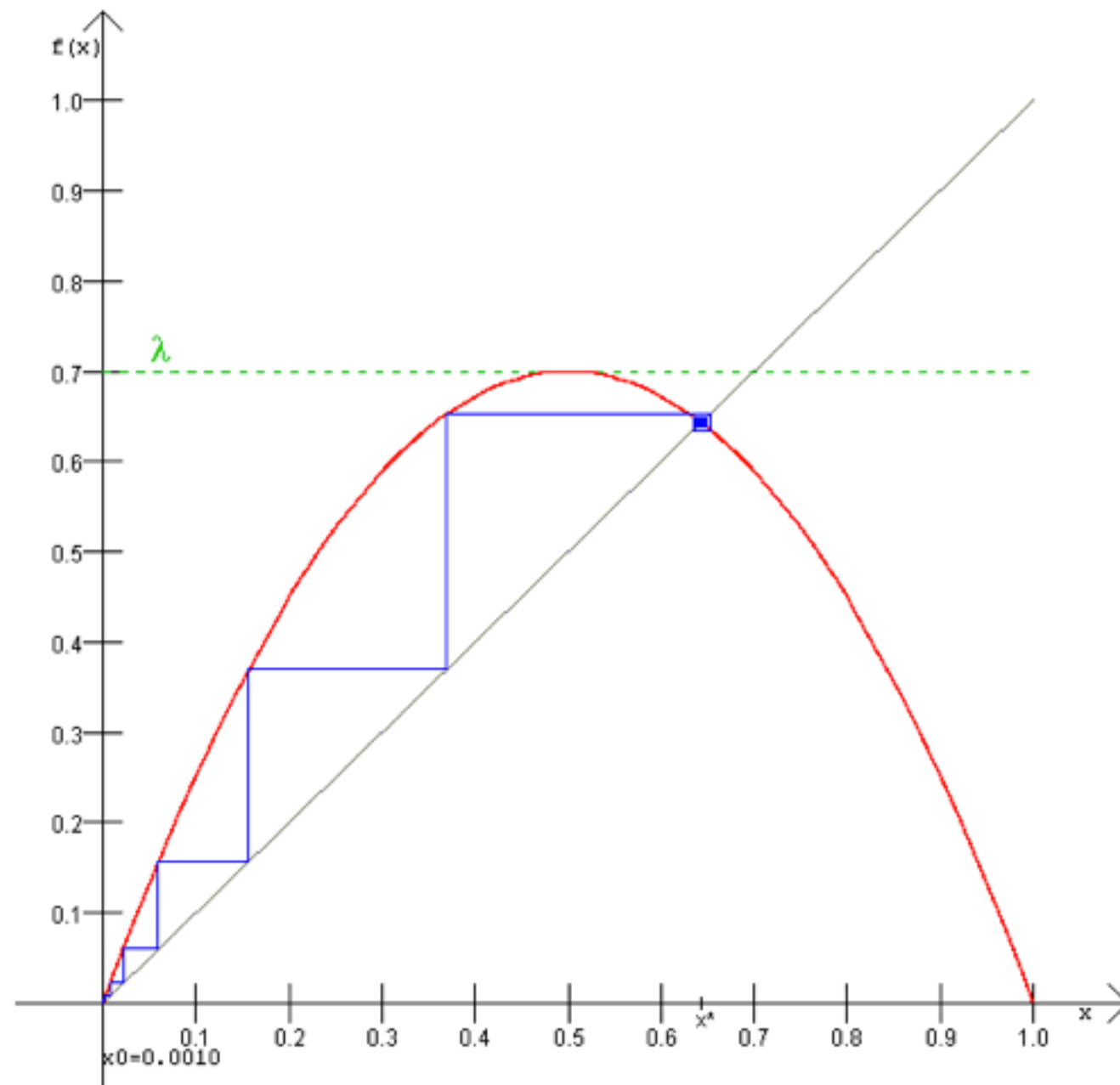
5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion:



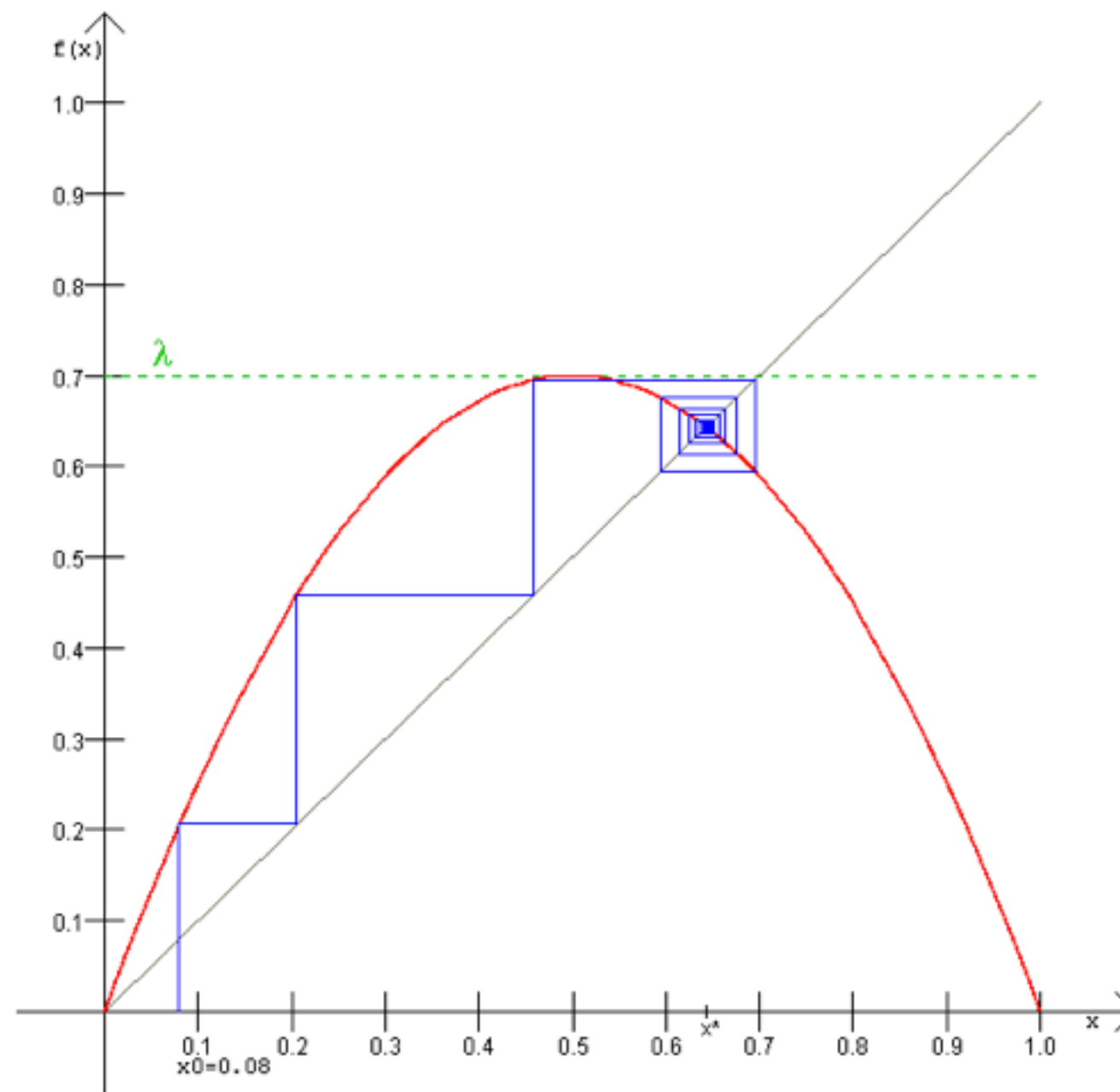
5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



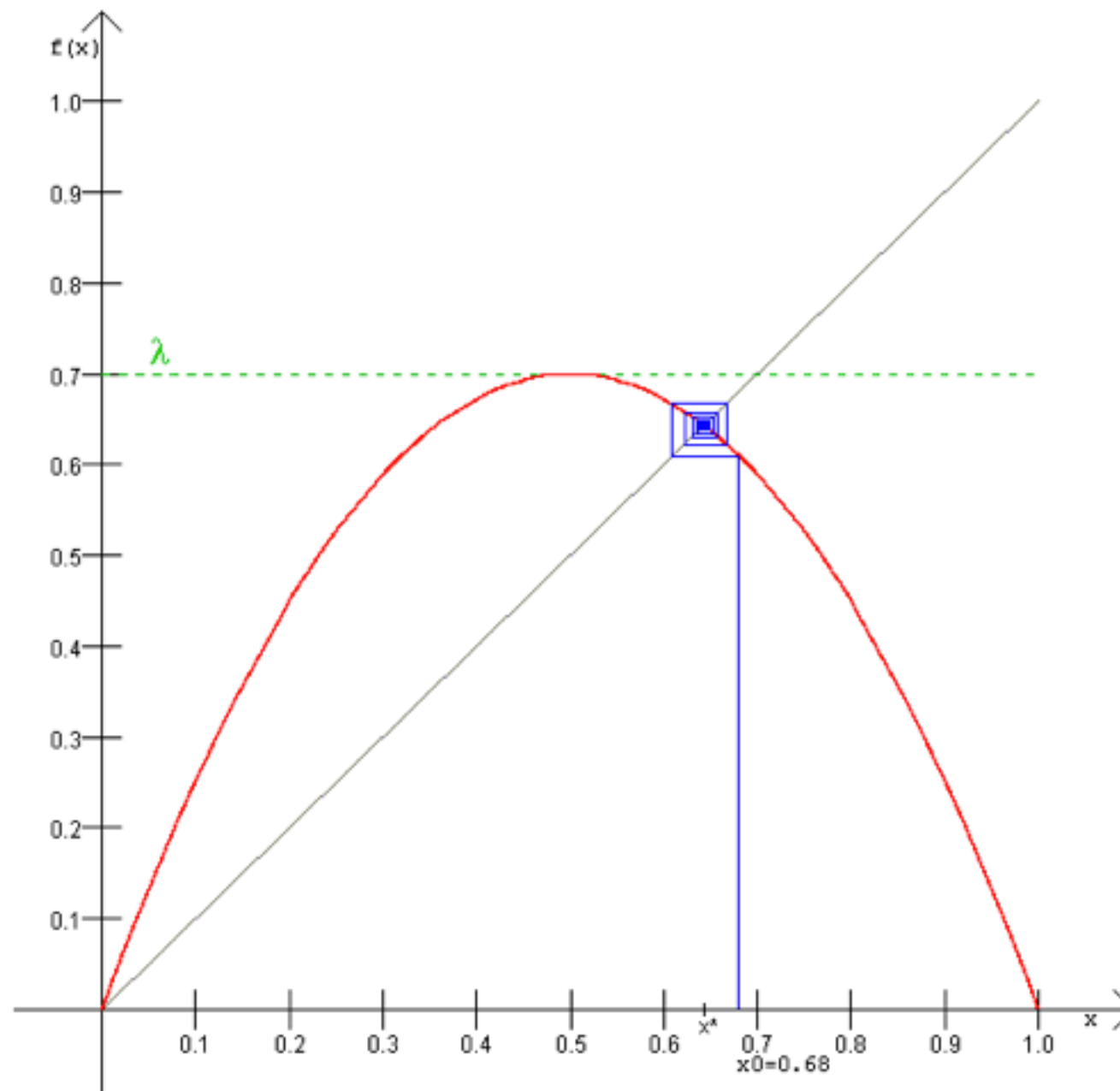
5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



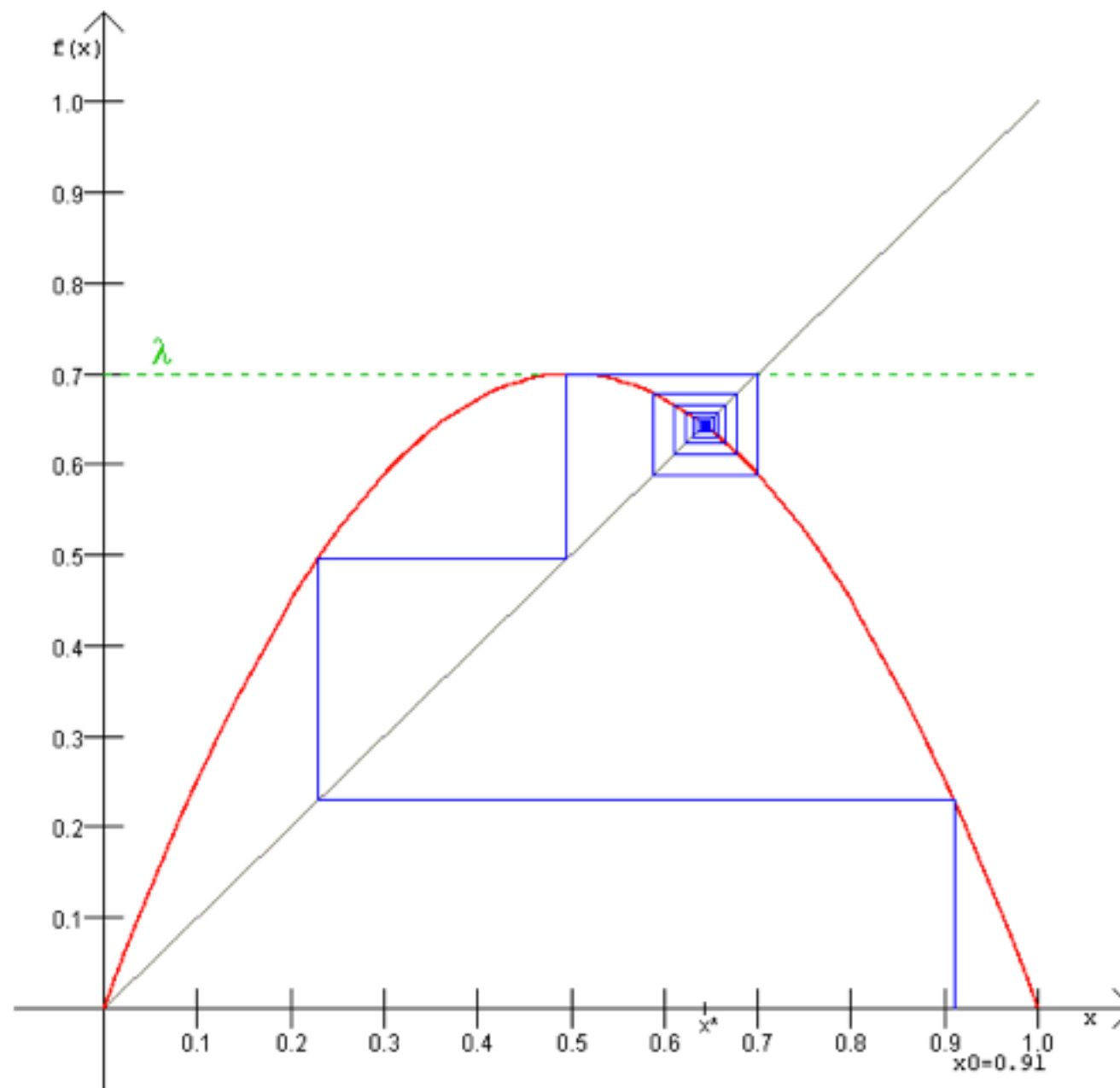
5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



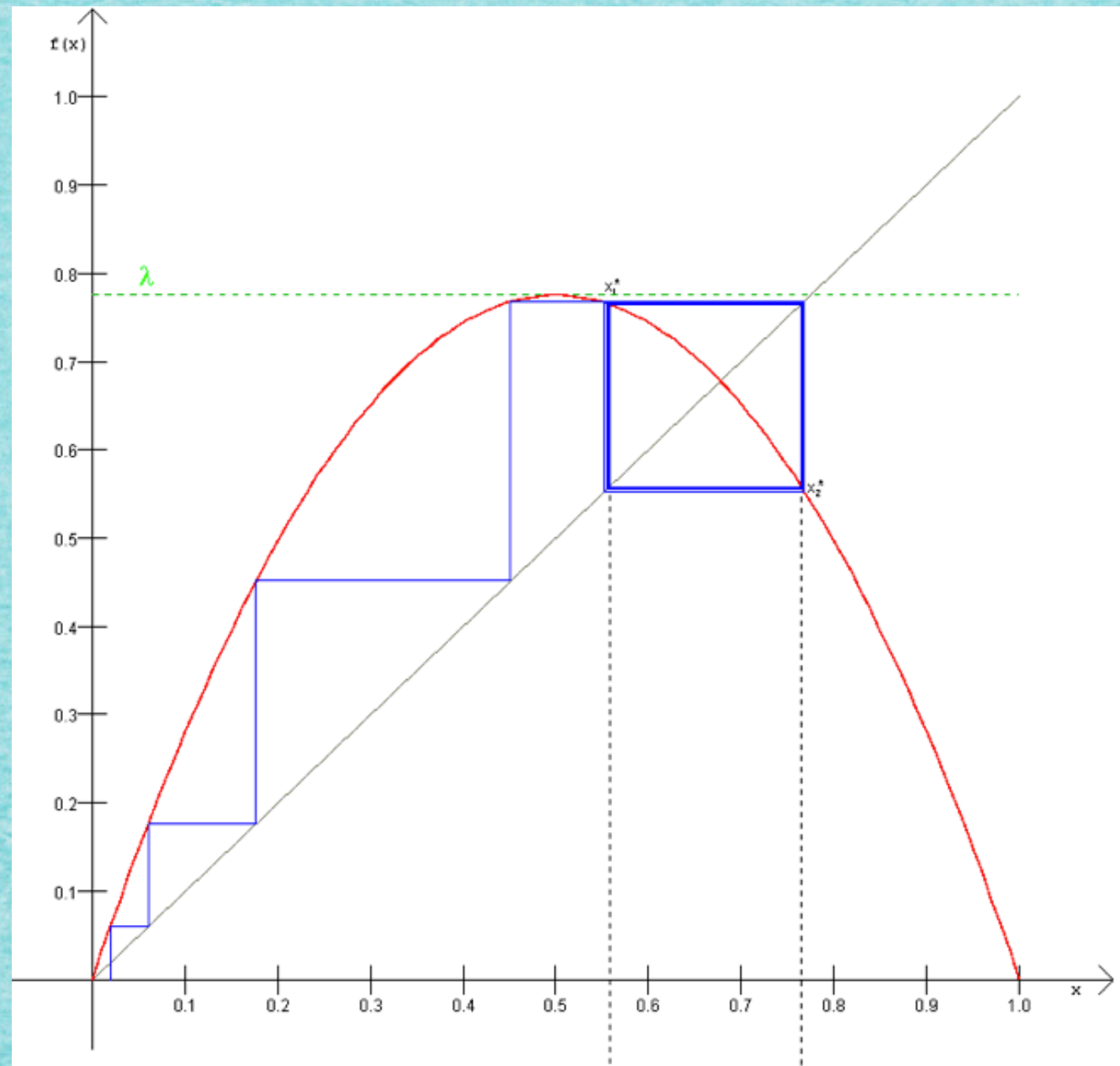
5.4.1 Logistische Rekursion

Rekursion strebt gegen Fixpunkt:



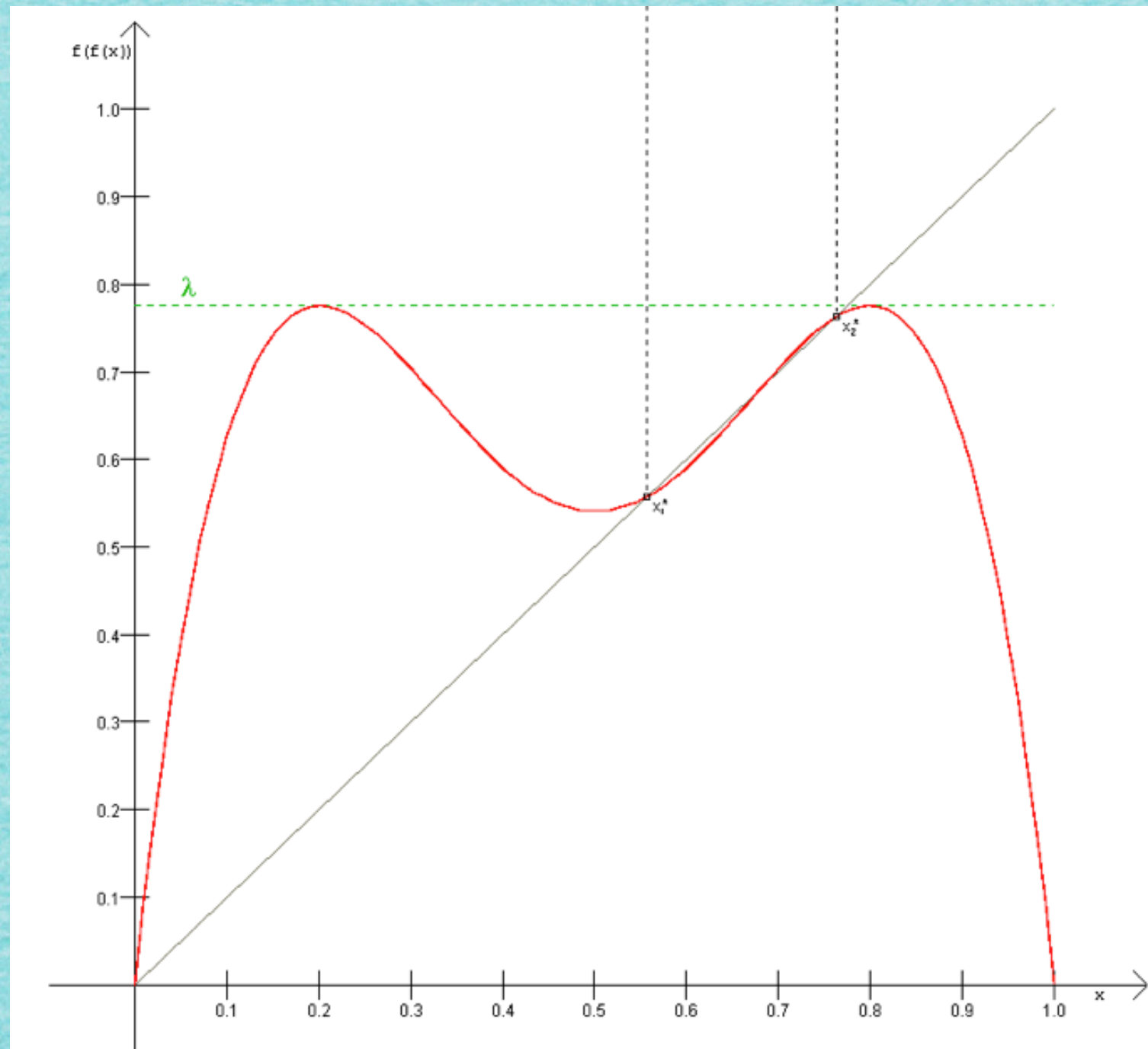
5.4.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!



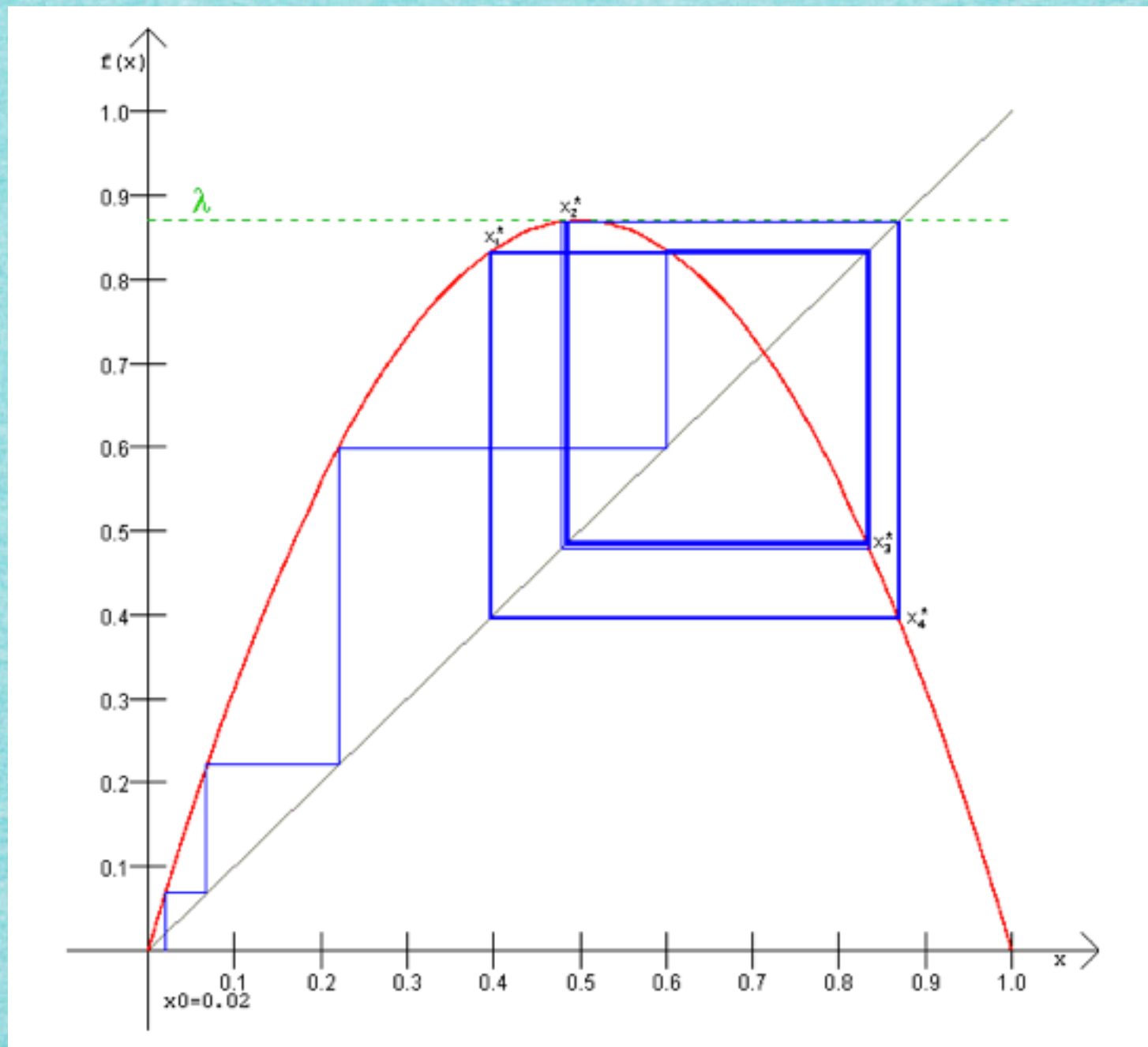
5.4.1 Logistische Rekursion

Zwei Fixpunkte!



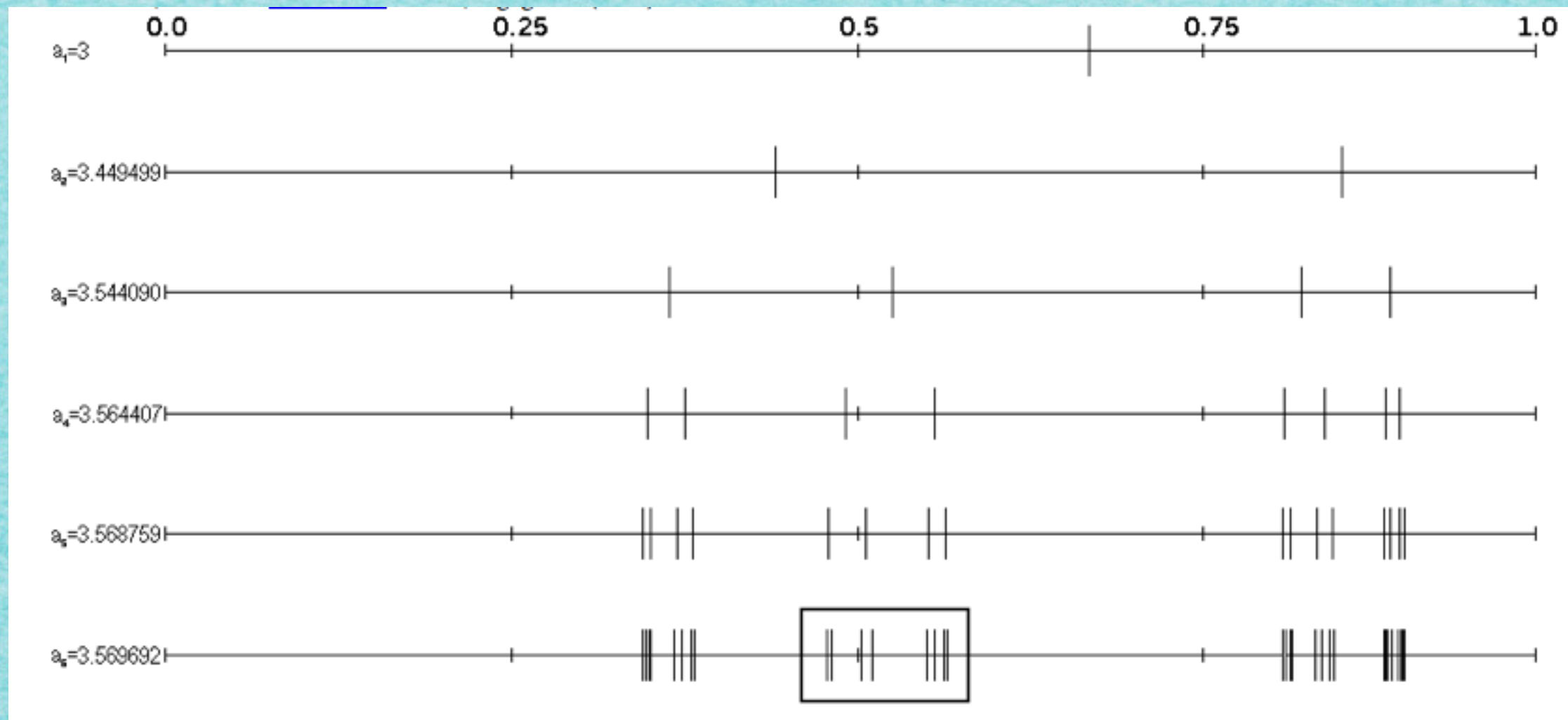
5.4.1 Logistische Rekursion

Vier Fixpunkte!



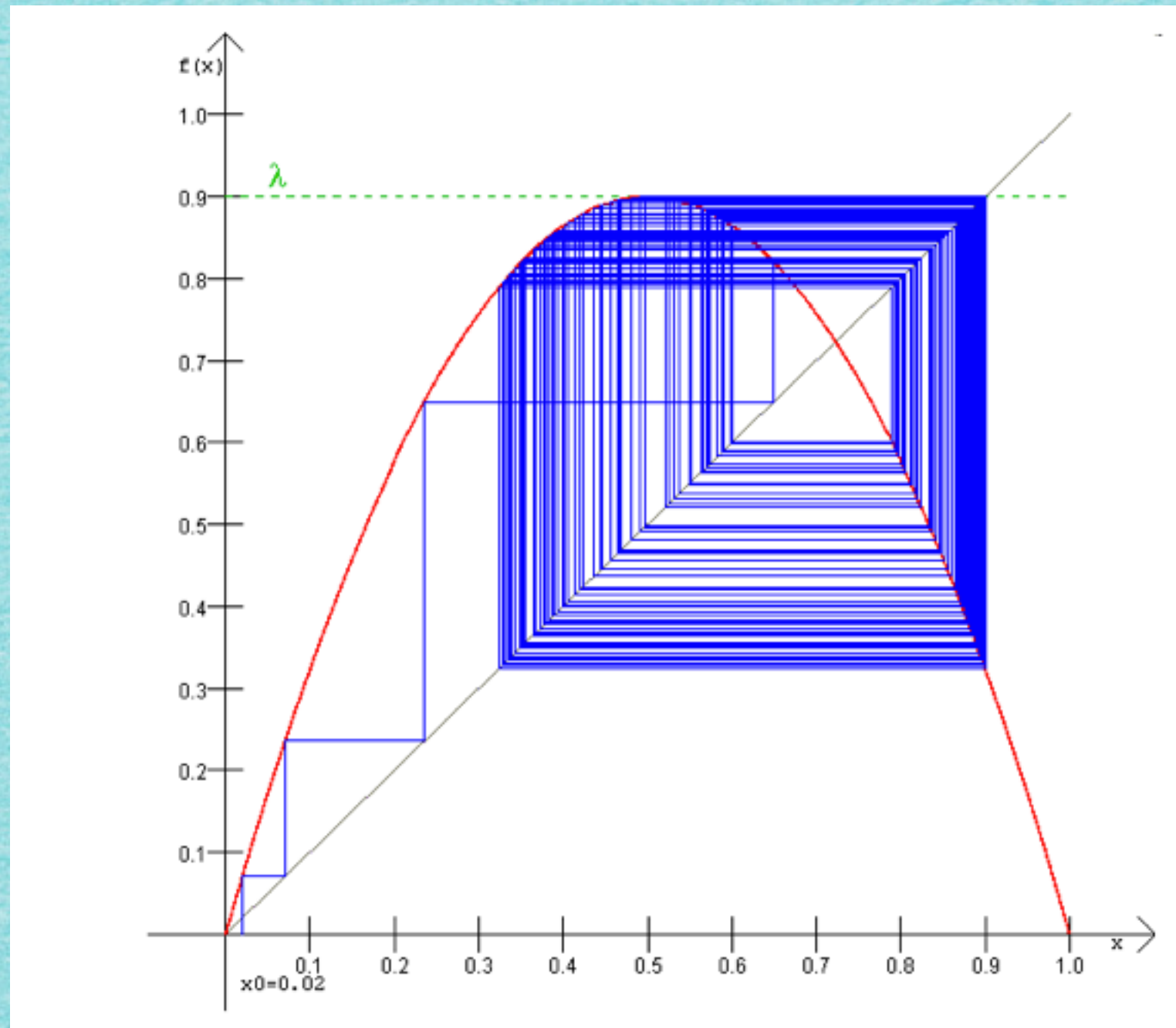
5.4.1 Logistische Rekursion

Entwicklung der Fixpunkte:



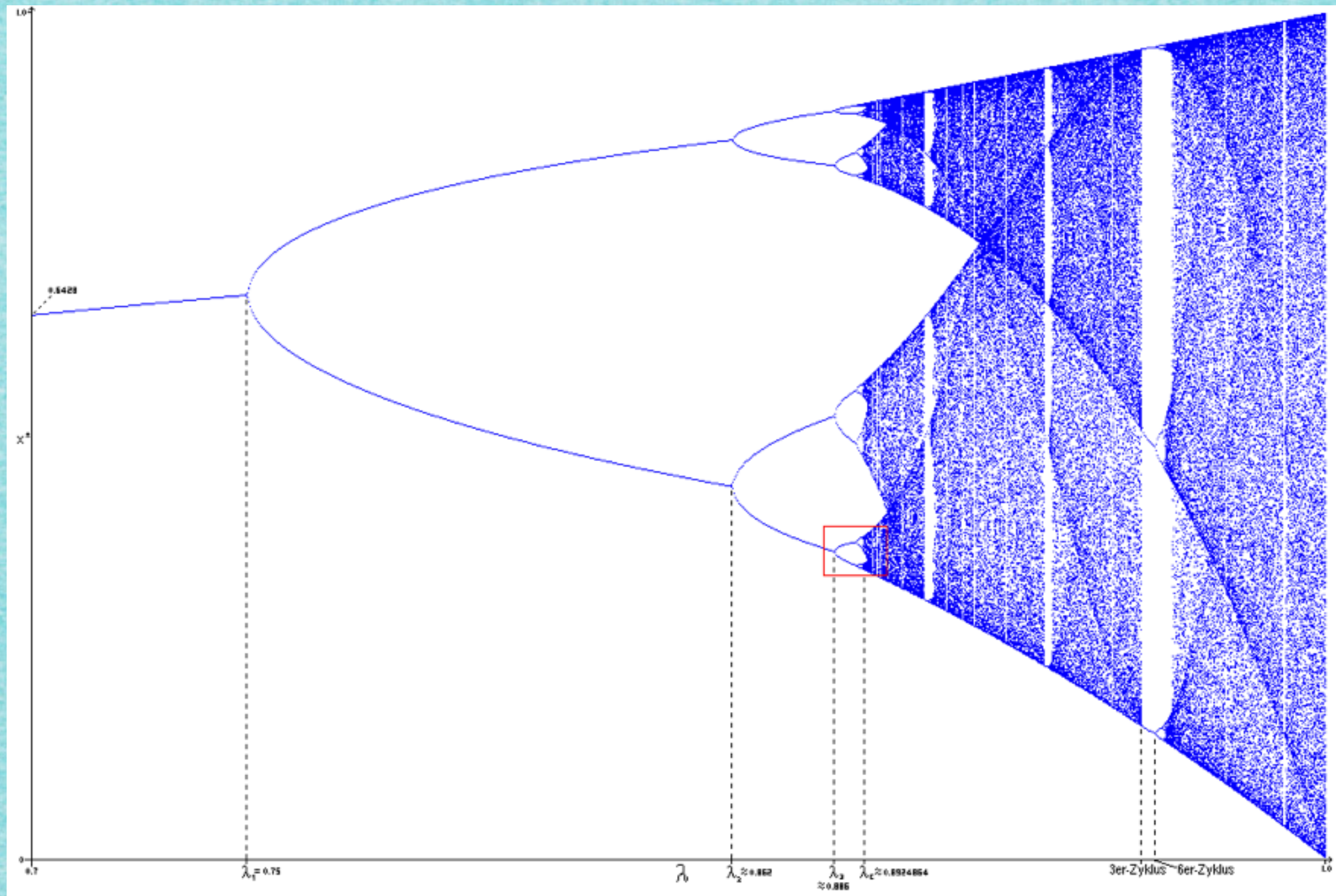
5.4.1 Logistische Rekursion

**Keinerlei Fixpunkte -
deterministisches Chaos:**



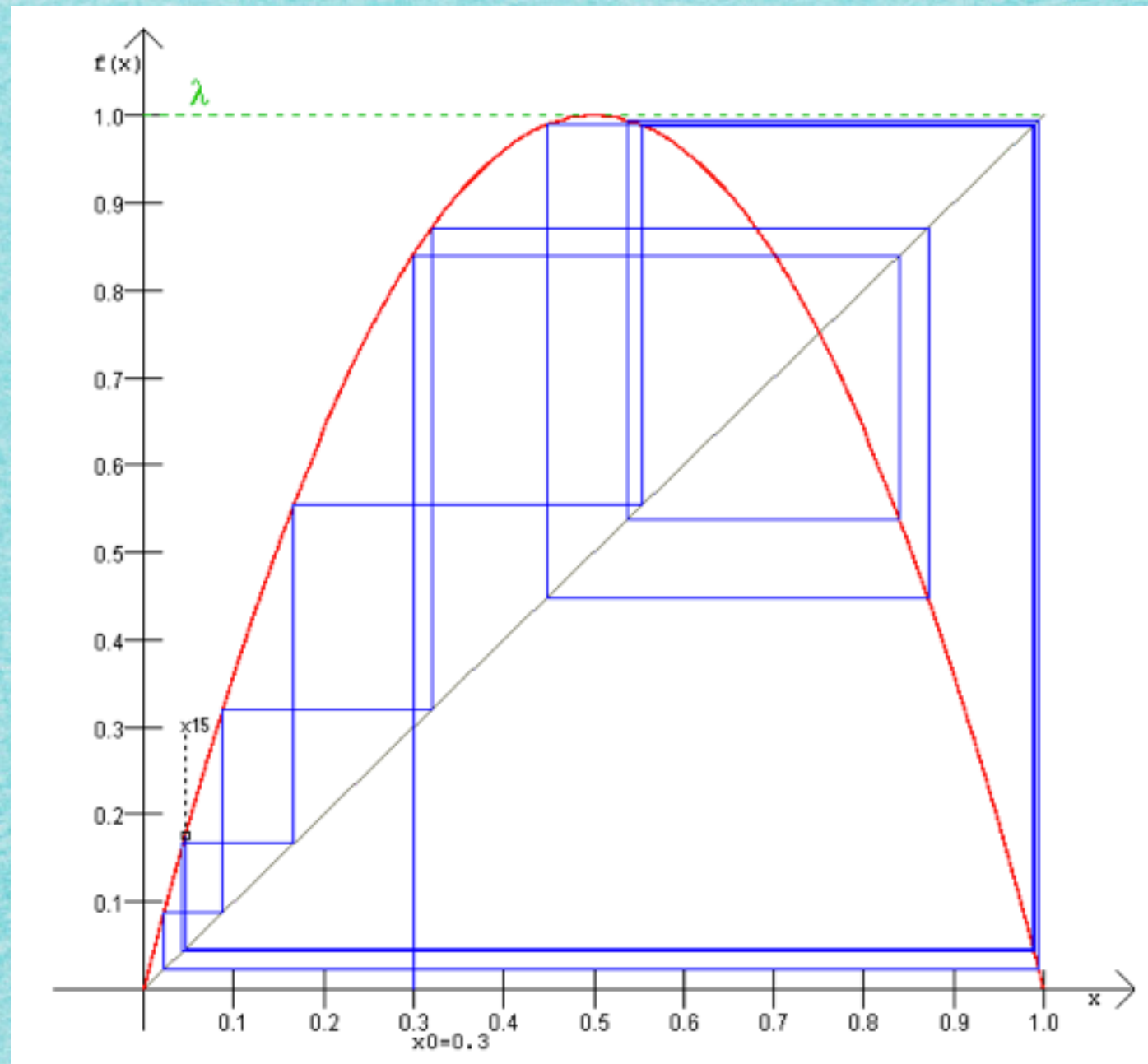
5.4.1 Logistische Rekursion

Bifurkationsdiagramm:



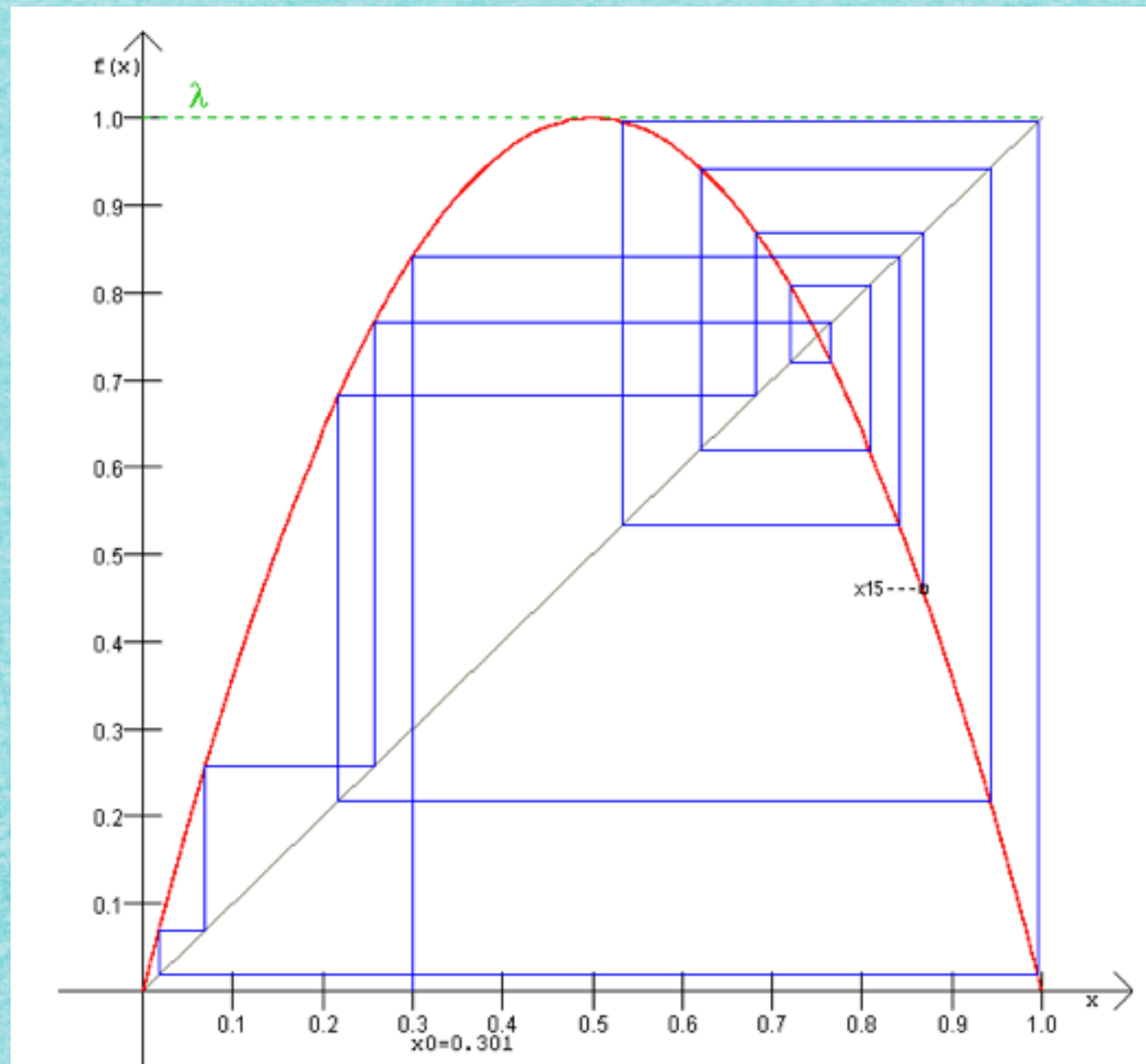
5.4.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!



5.4.1 Logistische Rekursion

Kausalität?!



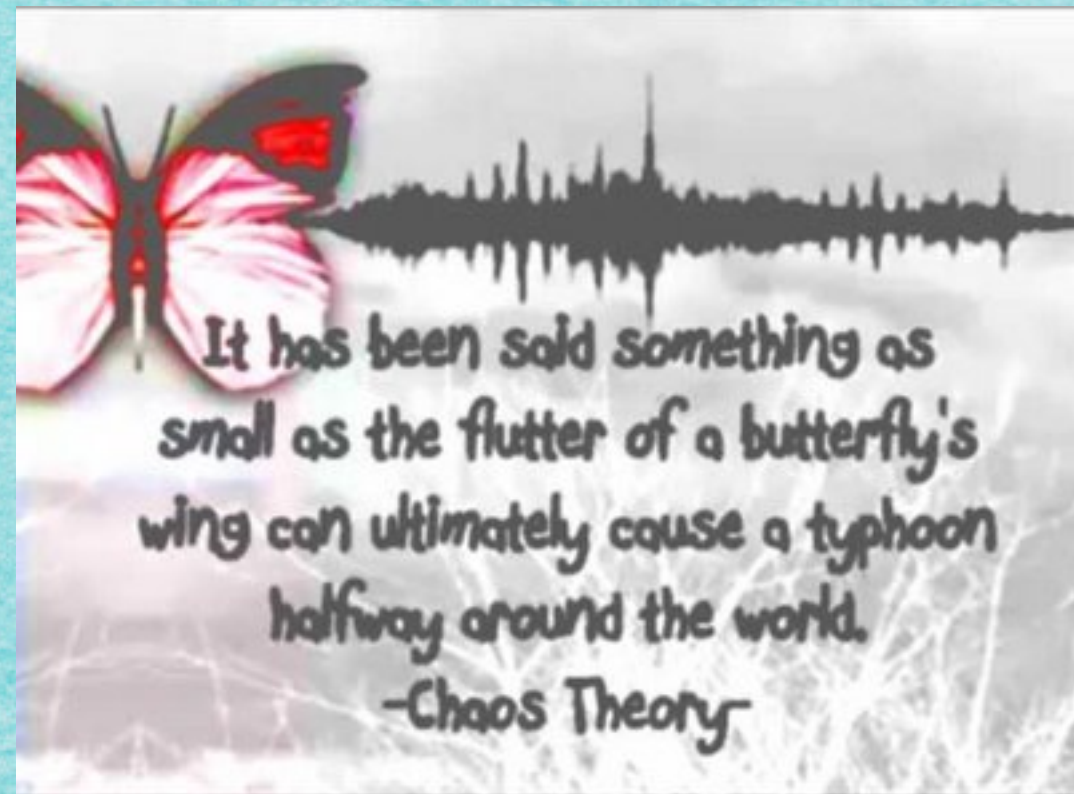
5.4.1 Logistische Rekursion



Edward Lorenz
(1917-2008)

Grenzen der Kausalität!

Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?



54.2 Frühkindliche Bildung



Pappbilderbuch, 16 Seiten
erschienen 1993

Nur wer viel spricht, lernt sprechen! Entsprechend schnell wachsen Sprachverständnis und Wortschatz von Kleinkindern, je mehr Gelegenheit Eltern ihnen zum Üben geben. Die Bilderbücher von Helmut Spanner eignen sich hervorragend zur spielerischen Sprachförderung, denn durch Zeigen und Benennen von Alltagsgegenständen wird der passive Wortschatz in aktiv nutzbare Wörter umgewandelt. Mehr als 250 Dinge, die Kindern ab einem Jahr vertraut sind, wurden hier, nach Themen geordnet, auf großen Doppelseiten zusammengestellt. Ab und zu entdeckt man auch einen kleinen Bären oder ein Mäuschen, die mit den Dingen spielen.

[>> Lesermeinungen zu diesem Buch](#)



5.4.2 Frühkindliche Bildung



$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n^2 - Y_n^2 - C_x \\ Y_{n+1} &= 2X_n Y_n - C_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_n &= X_n + iY_n \\ C &= C_x + iC_y \end{aligned}$$

$$Z_{n+1} = Z_n^2 - C$$

54.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0$$

Für welche Werte c bleibt das beschränkt?

$$c = -2 : 0, -2, 2, 2, \dots$$

$$c = 1/4 : 0, 0.25, 0.3125, 0.3476, 0.3708, 0.3875, 0.4001, 0.4101, \dots$$

Man kann das auf die logistische Iteration abbilden...

5.4.2 Die Mandelbrotmenge

Noch einmal quadratische Rekursion:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

$$z_0 = 0$$

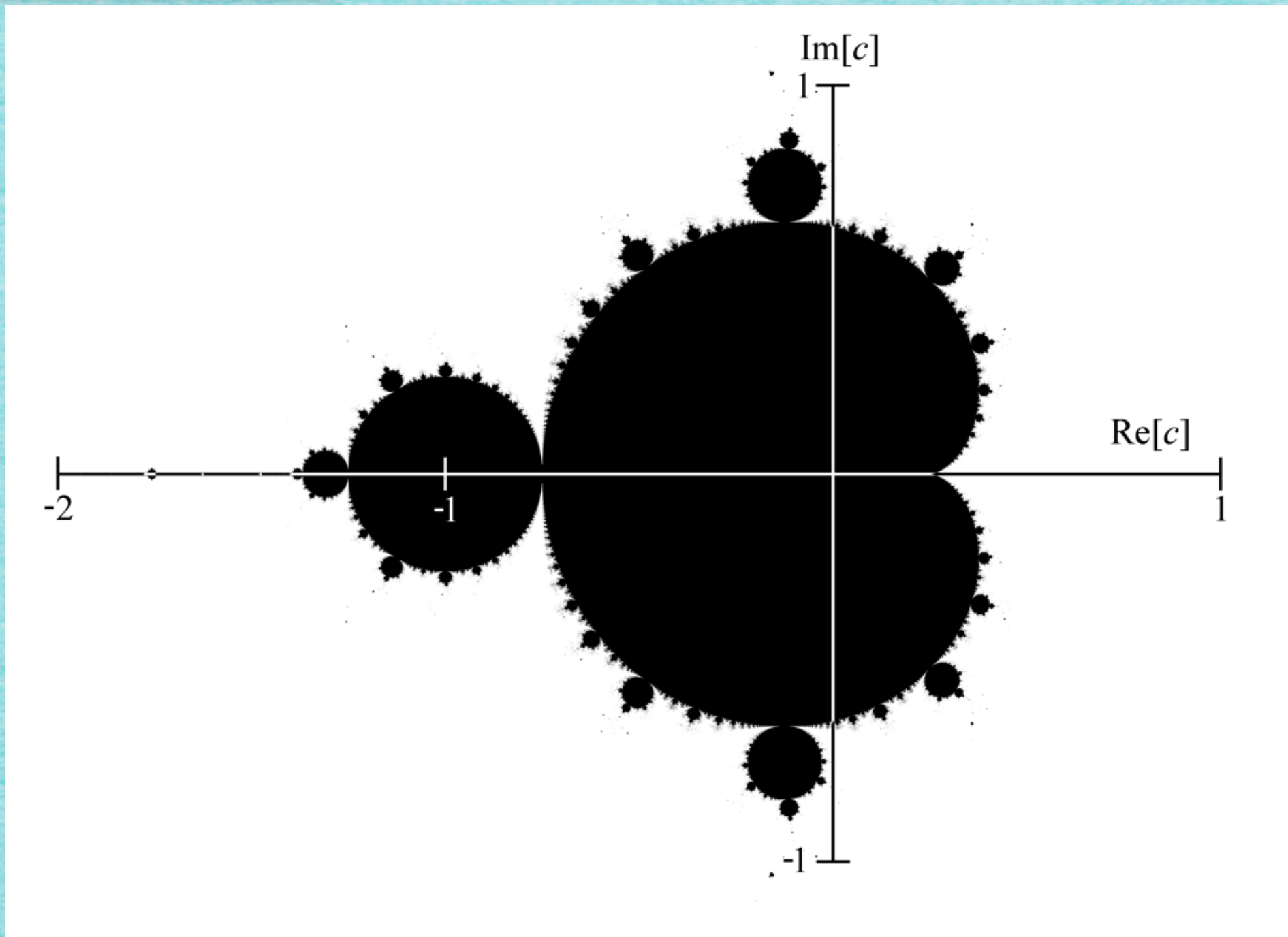
Für welche *komplexen* Werte c bleibt das beschränkt?

[illegible]

Brooks & Matelsky (1978)

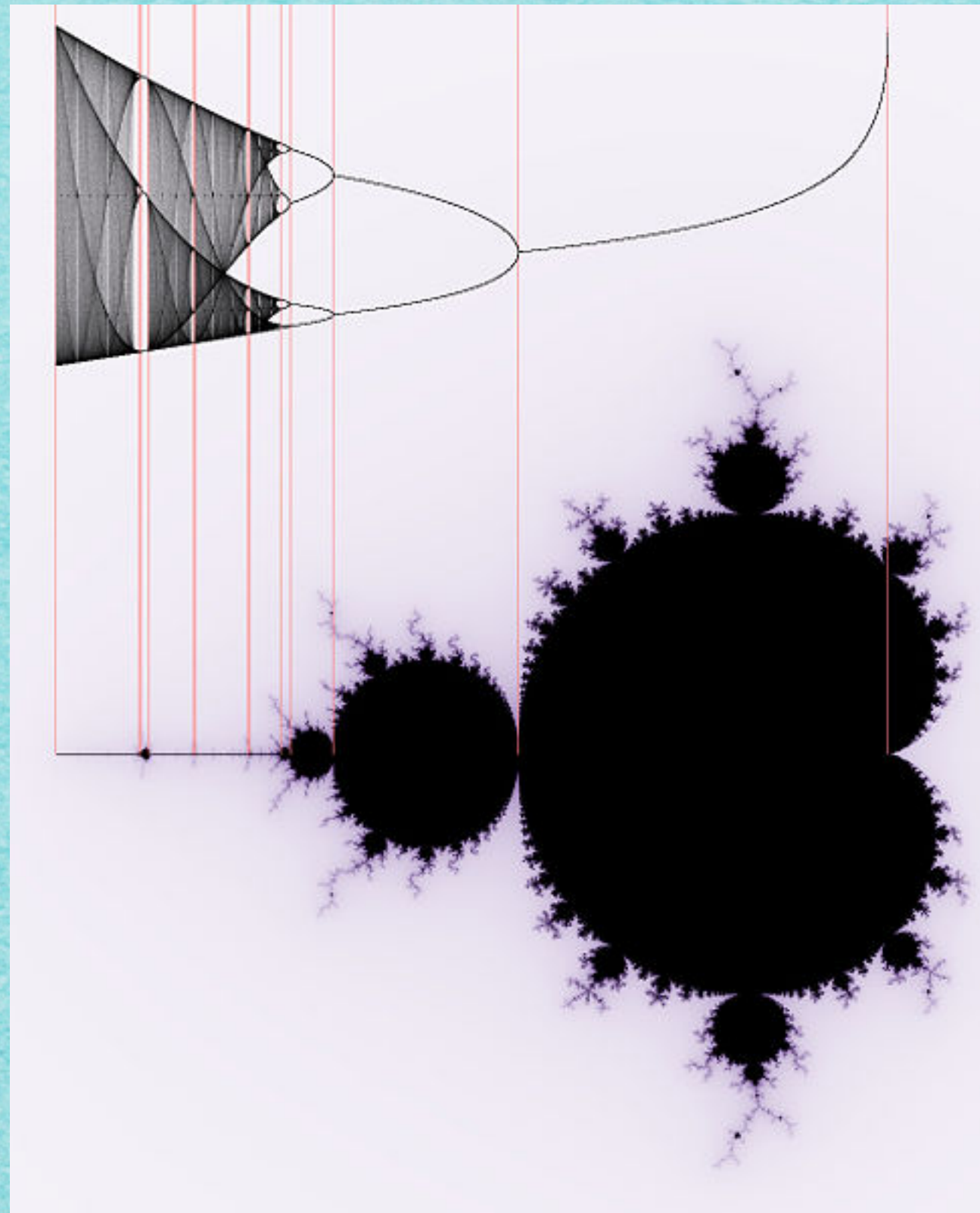
54.2 Die Mandelbrotmenge

Besser aufgelöst:



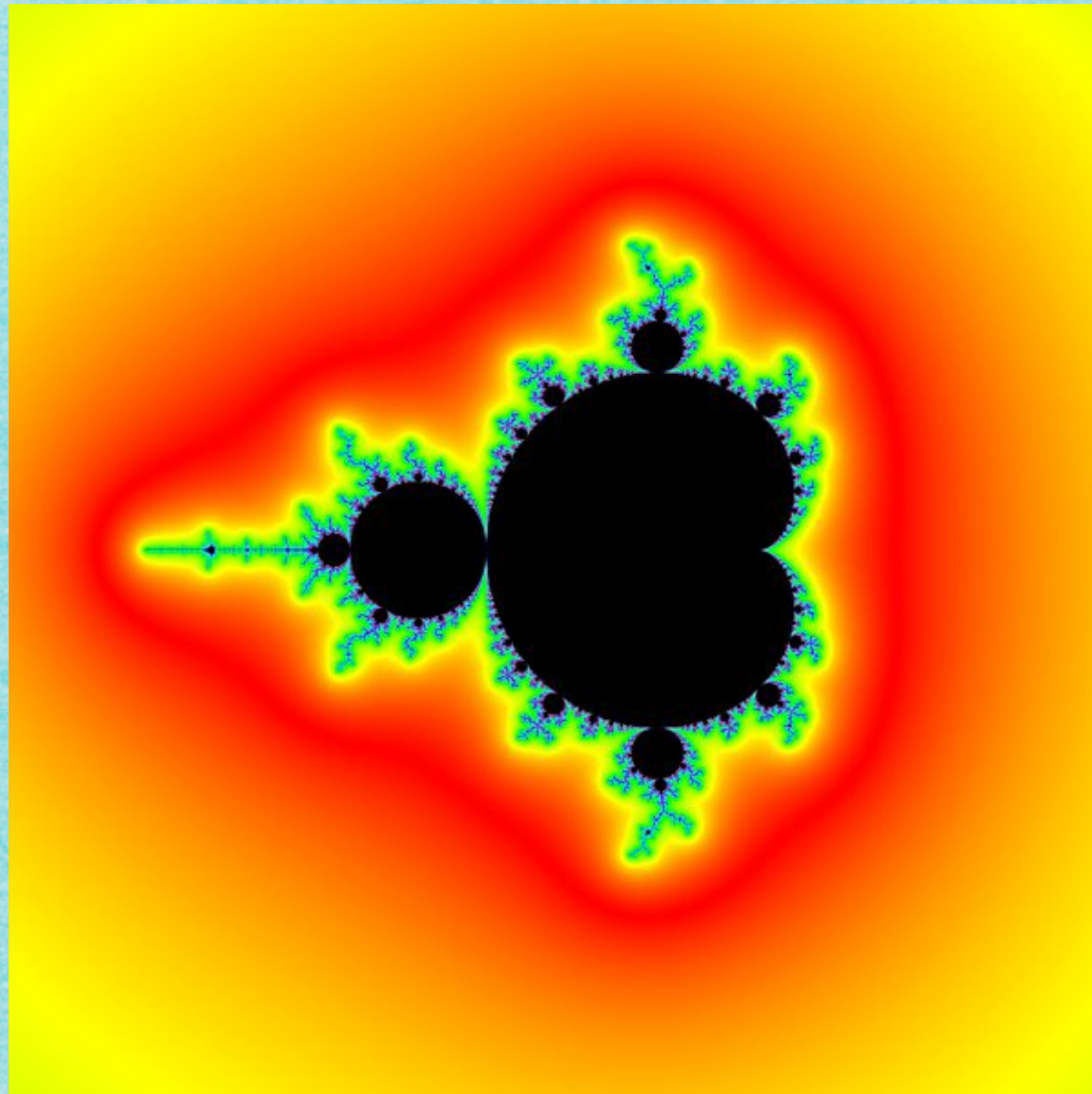
54.2 Die Mandelbrotmenge

**Realteil auf die
logistische Iteration
abgebildet:**



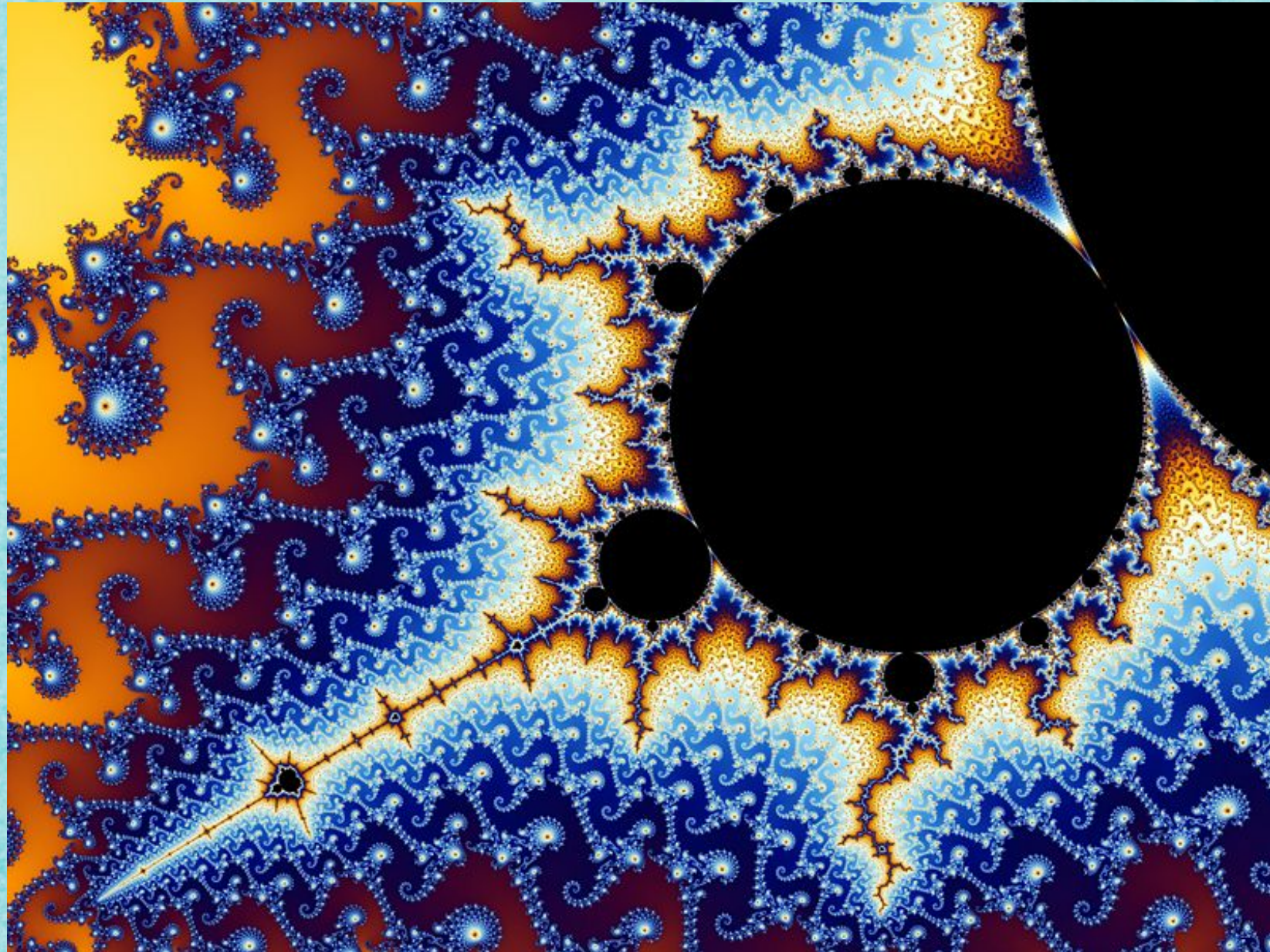
54.2 Die Mandelbrotmenge

Farbig:



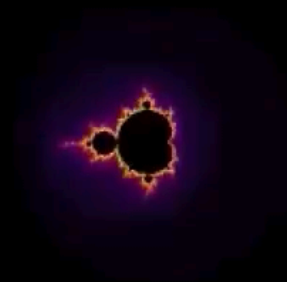
54.2 Die Mandelbrotmenge

Ausschnitt:

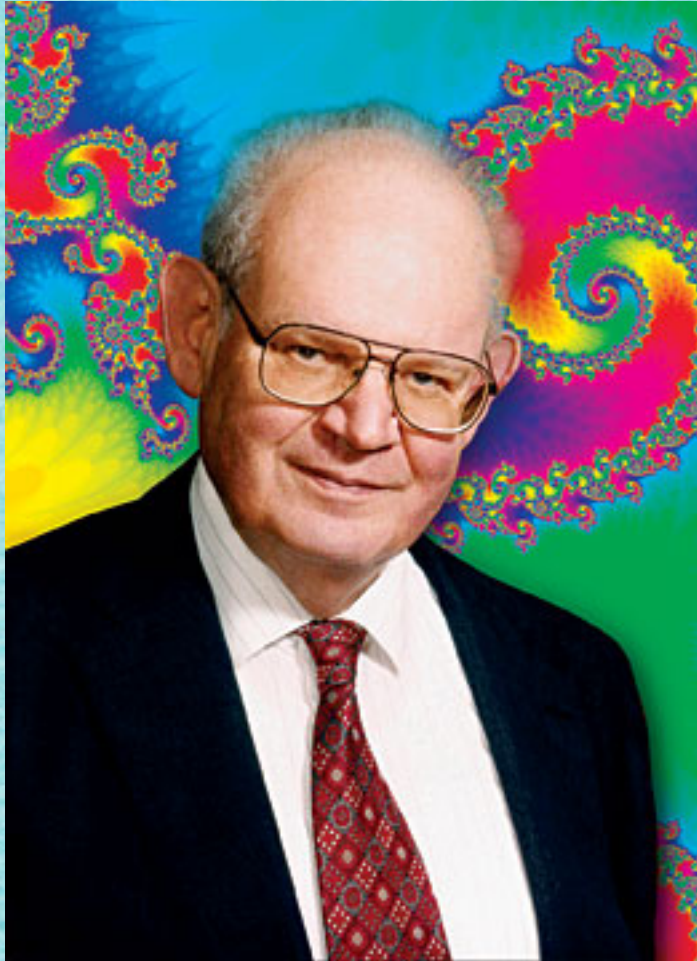


- > Film:
- Video von tthsqe12
 - Musik „Research Lab“ von Dark Flow

10^{-0}



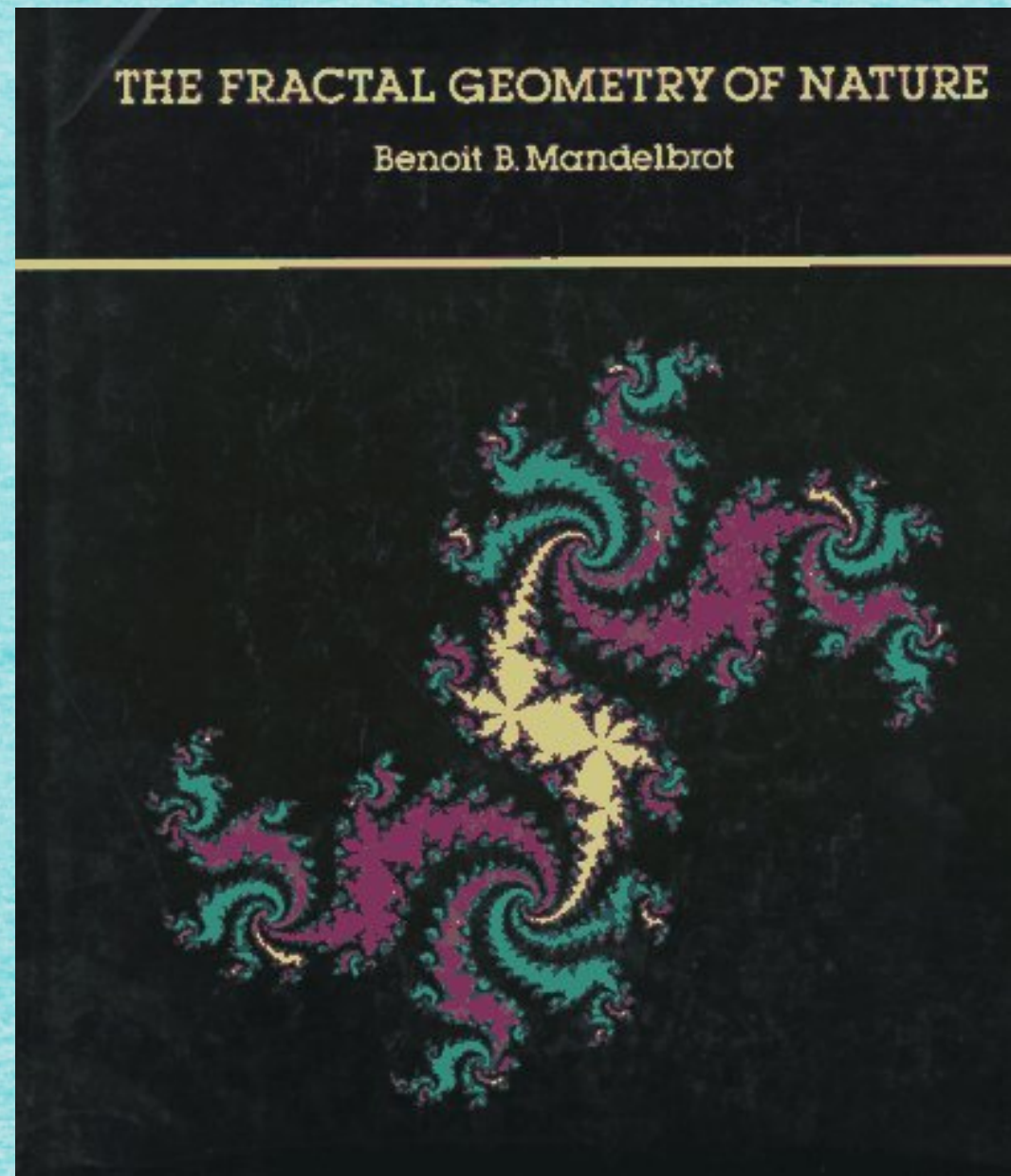
54.2 Die Mandelbrotmenge



Benoît Mandelbrot
(1924-2010)

Erste Dauerprofessur:
1999

Fractal Geometry of Nature
(1982)



54.3 Fraktale

Mandelbrot
(1967)

How long is the coast line of Britain?



Maßstab 200km:
2350km

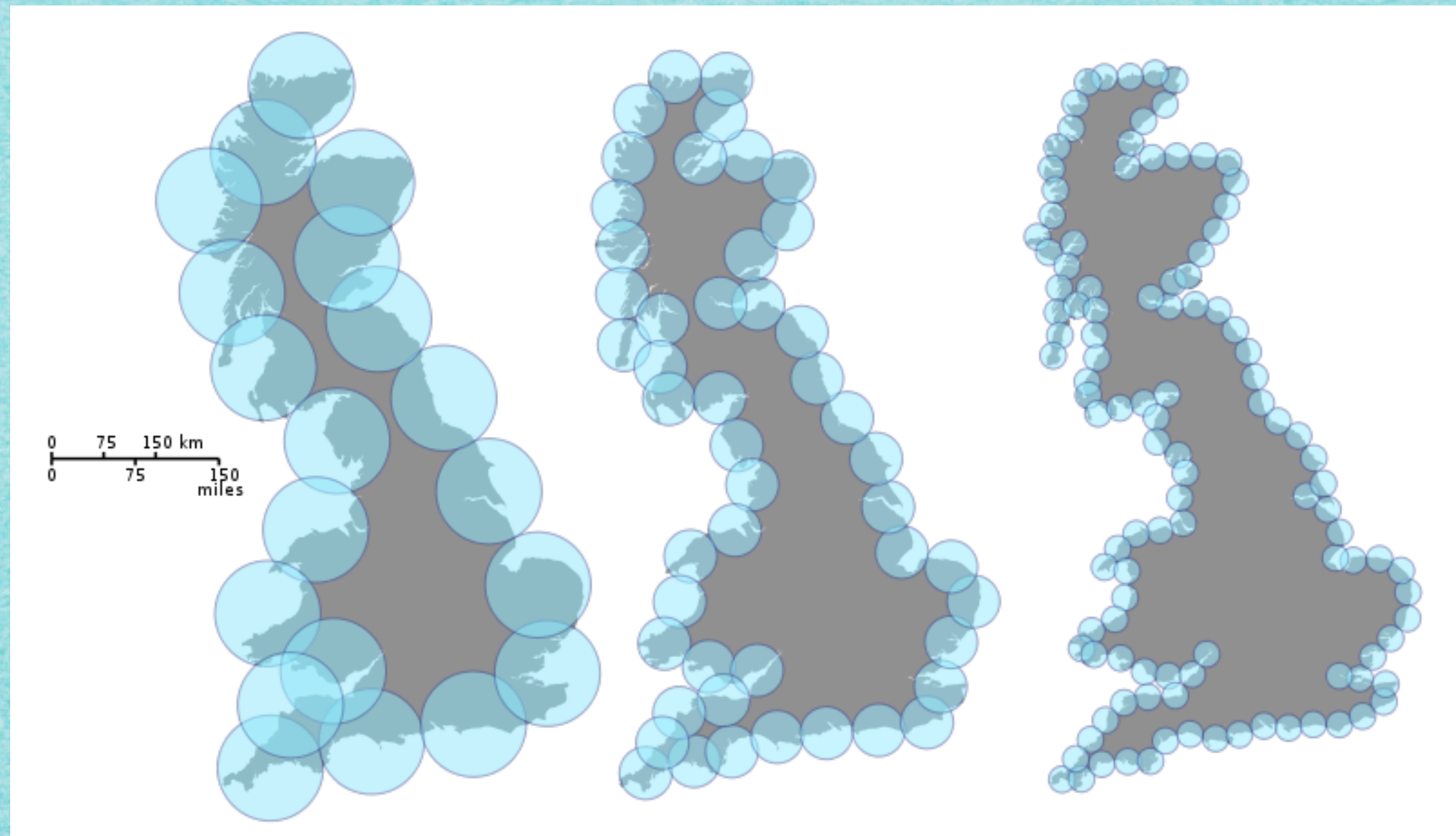


Maßstab 100km:
2775km



Maßstab 50km:
3425km

54.3 Fraktale



*Hausdorff-Dimension:
Wie wächst das Gesamtmaß in Abhängigkeit von der Größe?*

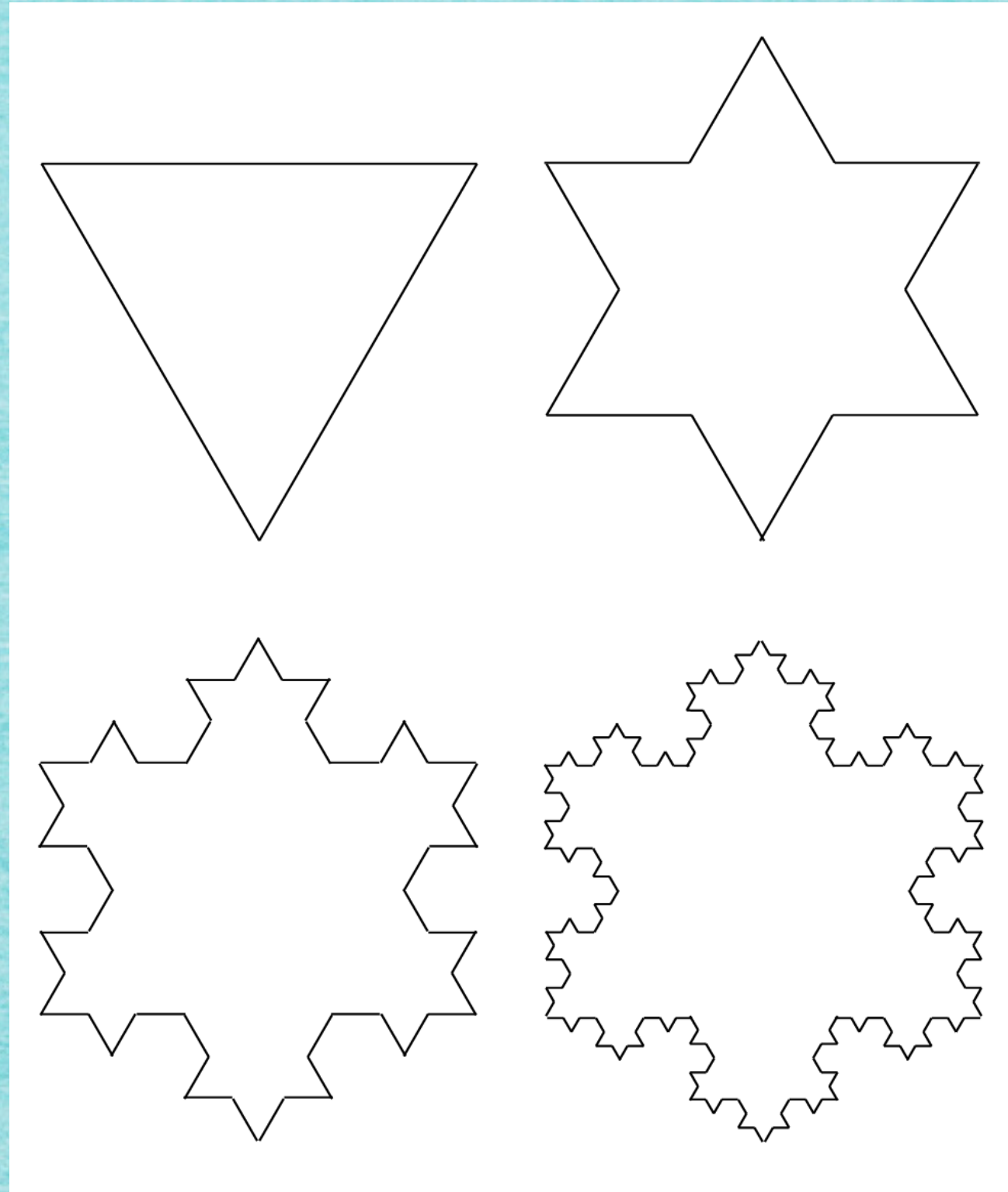
54.3 Fraktale



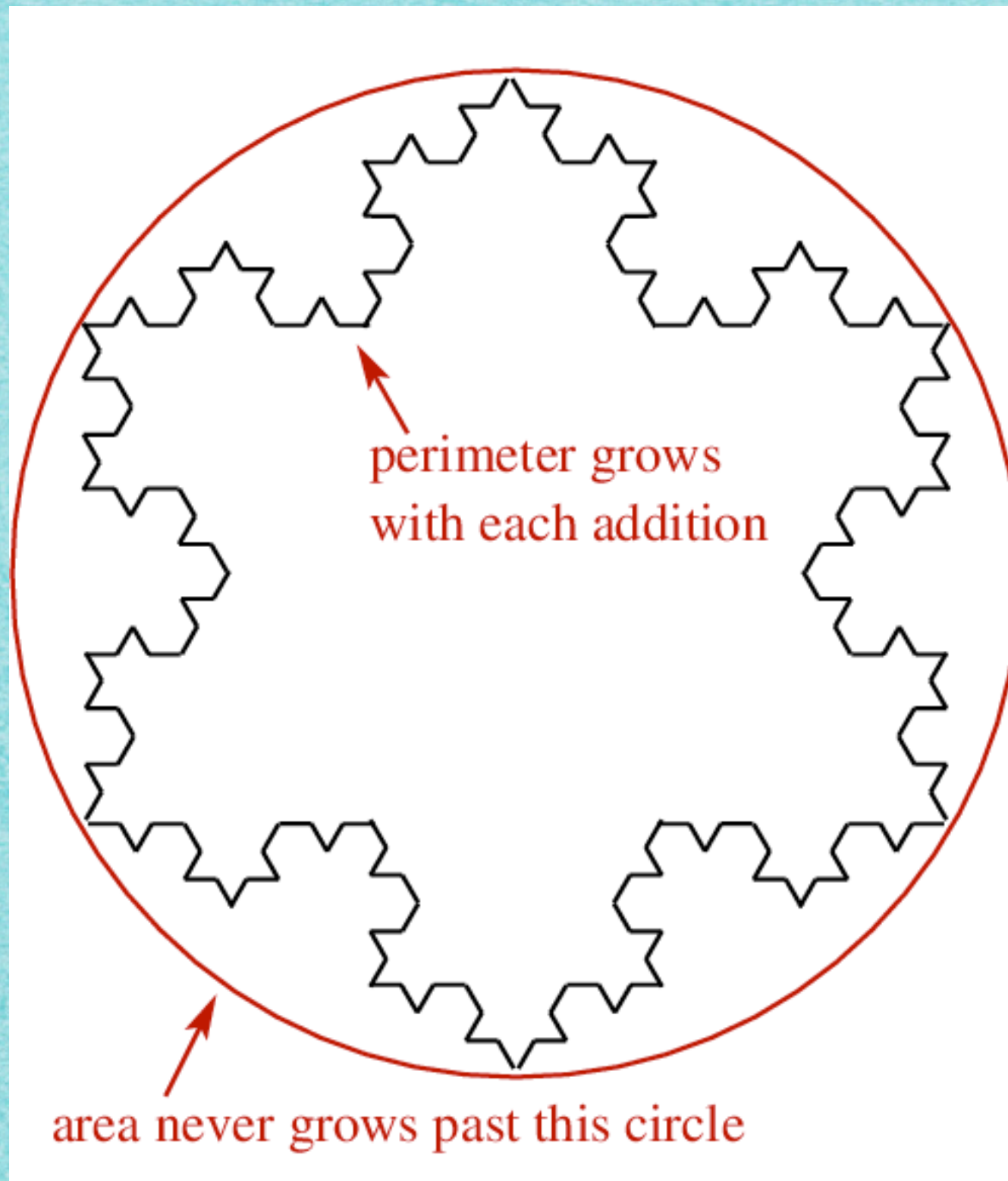
Niels Fabian Helge
Hartmut von Koch
(1870-1924)

Schneeflockenkurve

(1904)



54.3 Fraktale

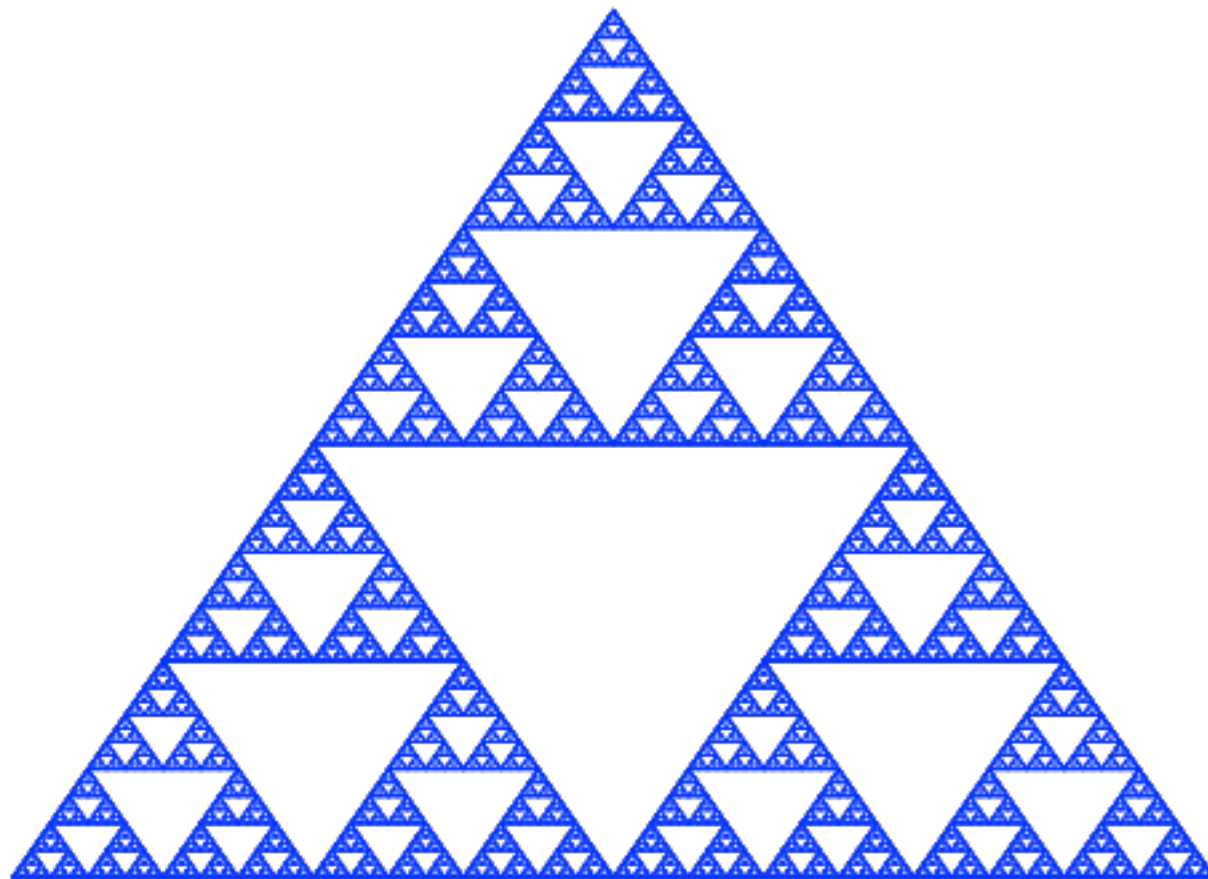


Pro Iteration:
Länge wächst um
Faktor $\frac{4}{3}$

Hausdorff-Dimension
des Randes:
 $\log(4)/\log(3)$
 $= 1.2618595\dots$

Fläche:
Länge wächst um
Faktor $\frac{4}{3}$

54.3 Fraktale



Szierpinski-Dreieck:
Fläche schrumpft um
Faktor $3/4$ pro
Iteration

Hausdorff-Dimension
der Fläche:
 $\log(3)/\log(2)$
 $= 1.5849625\dots$

54.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**

Romanesco



54.3 Fraktale

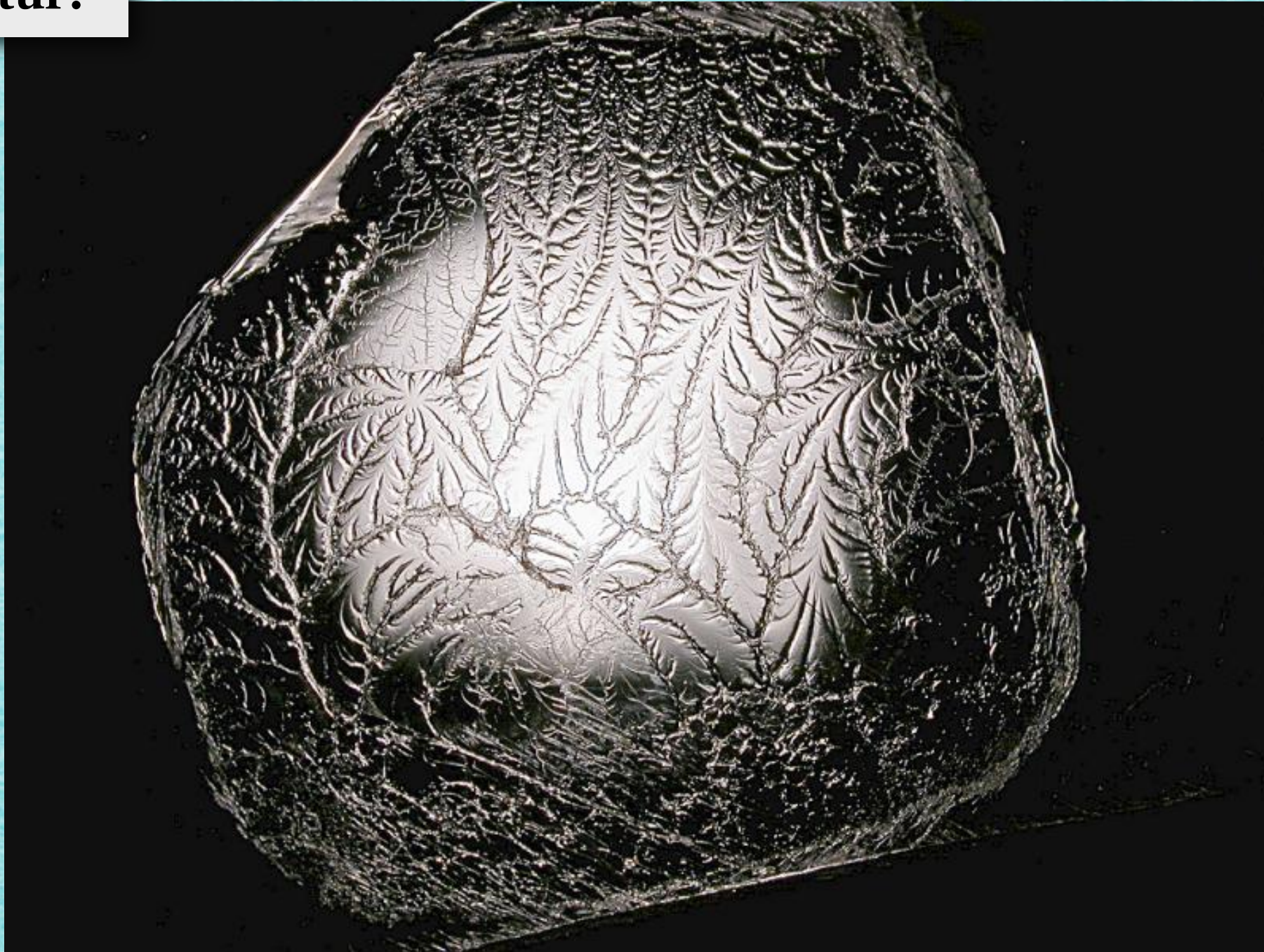
**Fraktale in
der Natur:**



Eiskristalle

54.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**



Adhäsionsmuster

54.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**



Muster elektrischer Entladung

54.3 Fraktale

**Fraktale in
der Natur:**



Farn

54.3 Fraktale



Farn (nicht echt)

54.3 Fraktale



SNAPSHOTS

January 18, 2024 | ISSUE 108



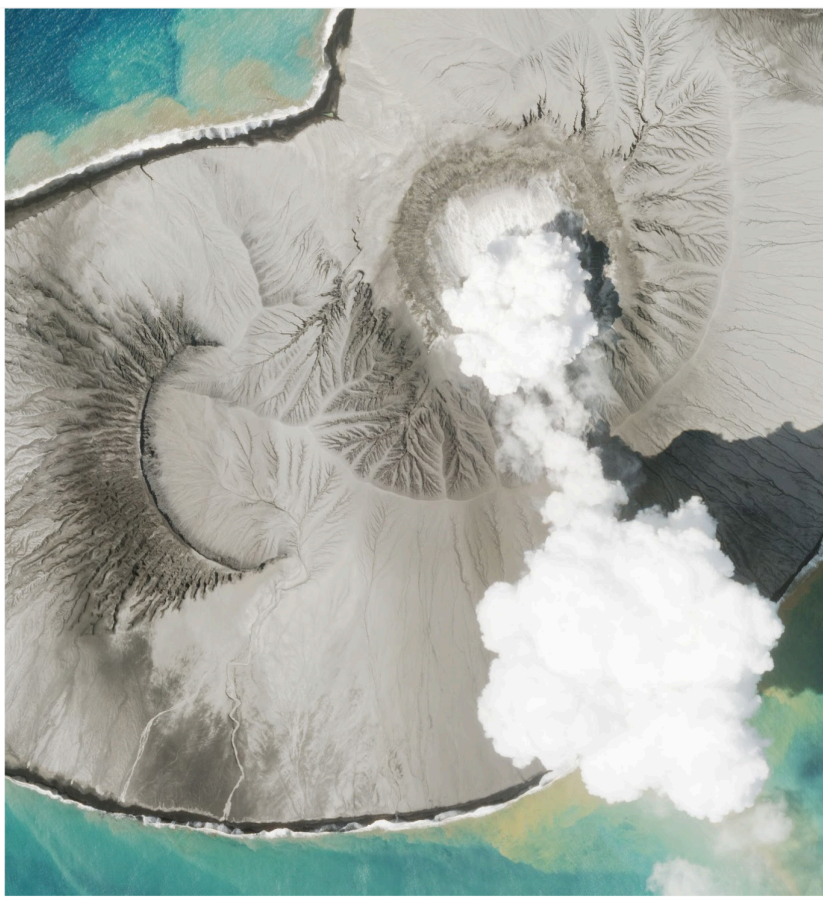
SkySat • Burrup, Australia • November 21, 2020

54.3 Fraktale



PlanetScope • Derby, Australia • February 14, 2022

54.3 Fraktale



SkySat • Hunga Tonga-Hunga Ha'apai, Tonga • January 7, 2022



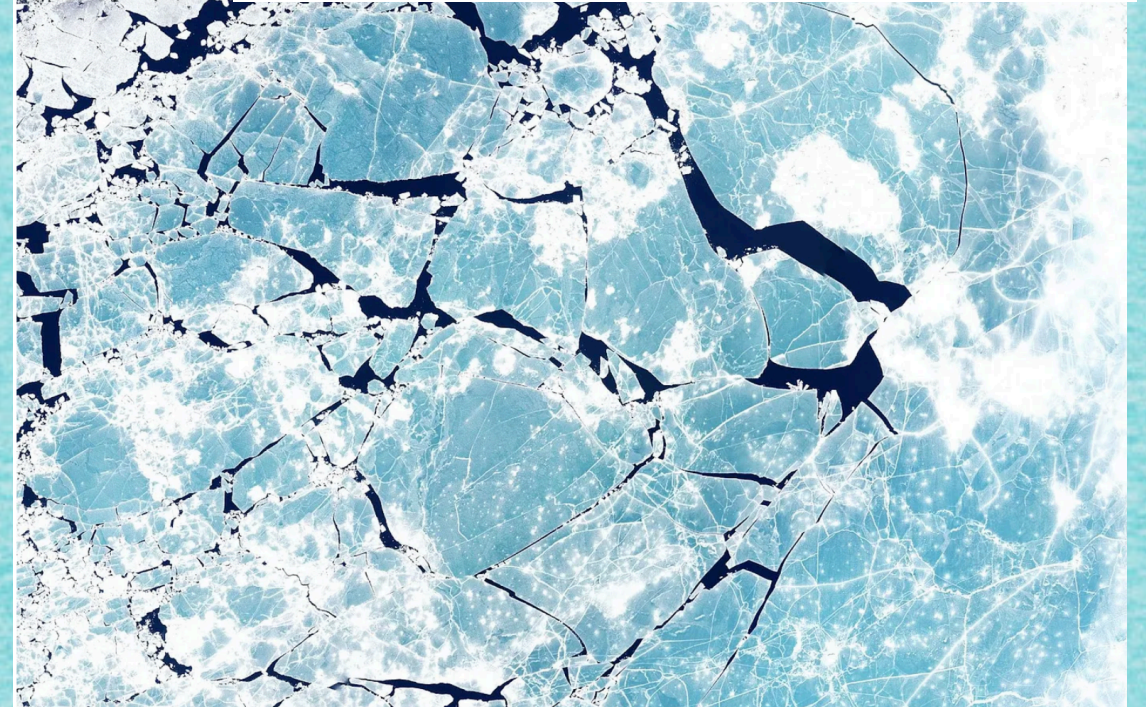
PlanetScope • Near Riyadh, Saudi Arabia • December 2, 2023



RapidEye • Waterton Lakes National Park, Canada • August 27, 2019

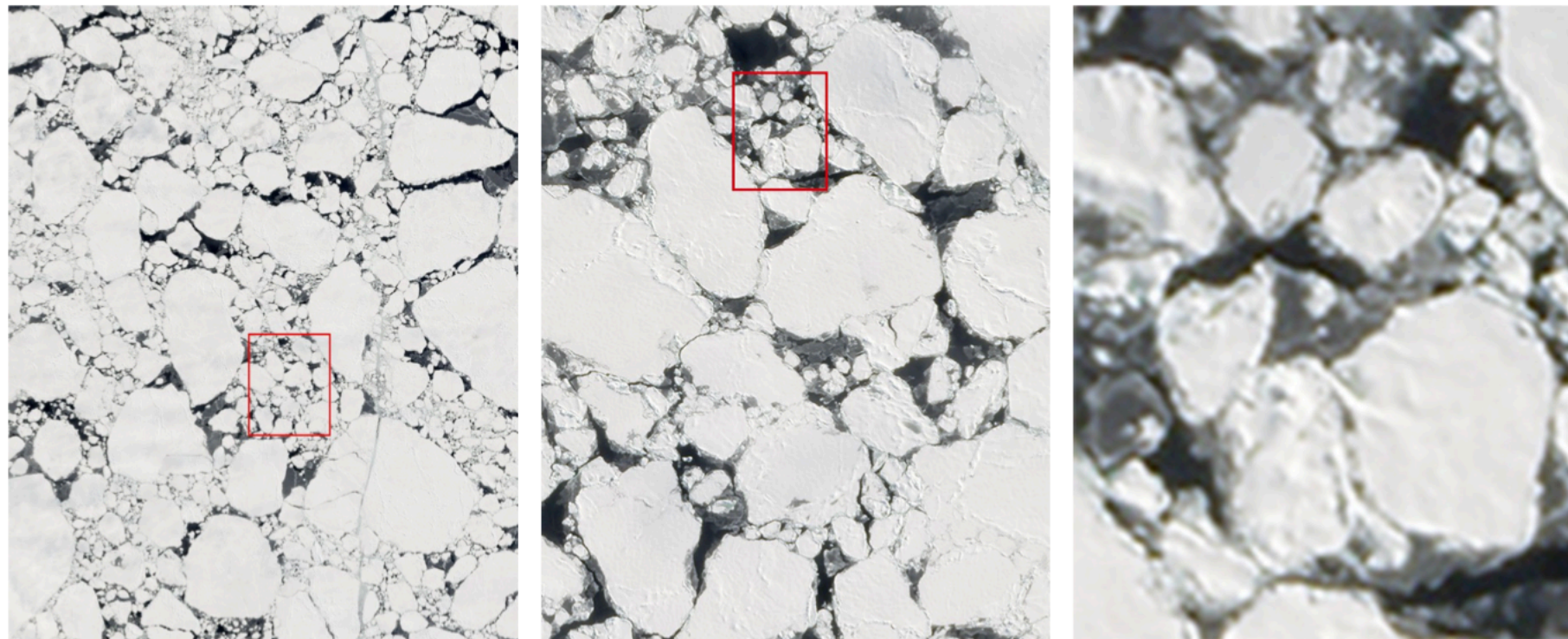


PlanetScope • Gomso Bay, South Korea • January 6, 2024



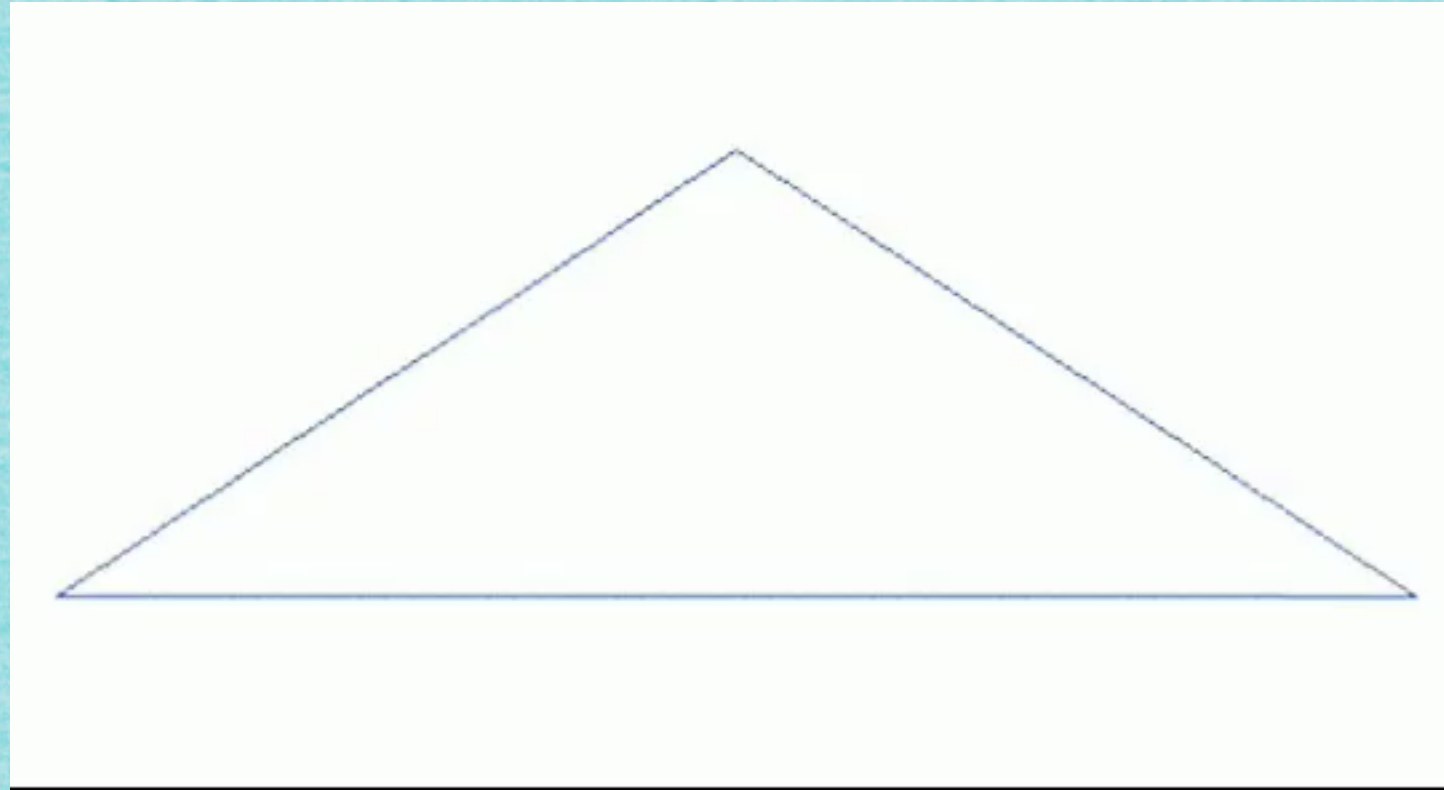
PlanetScope • Kane Basin, between Canada and Greenland • July 9, 2023

54.3 Fraktale



SkySat • Antarctica • February 20, 2022

54.3 Fraktale



“Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.” - Mandelbrot

5.4.4 Zelluläre Automaten



Stanislaw Ulam
(1909-1984)

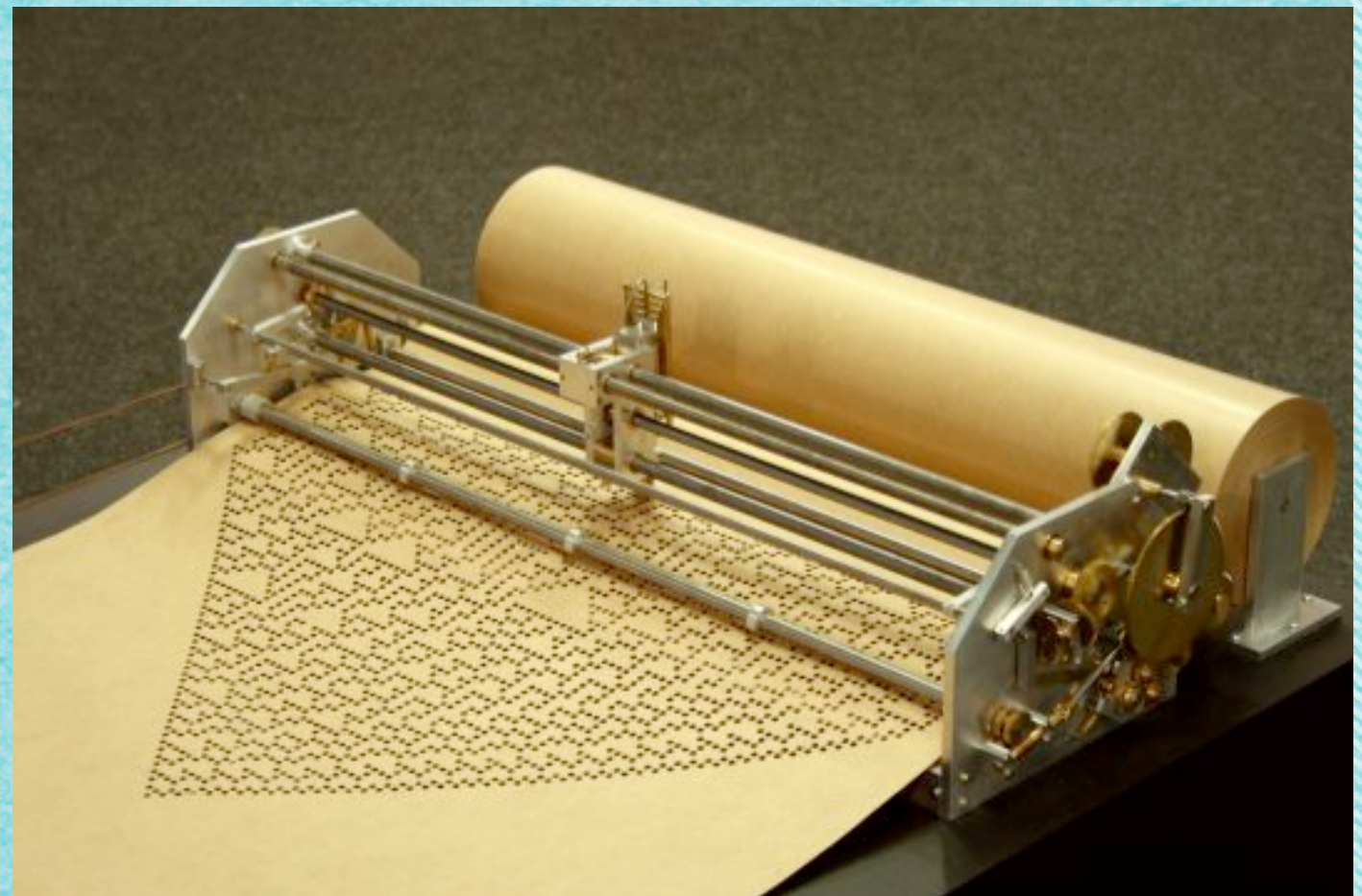


John von Neumann
(1903-1957)

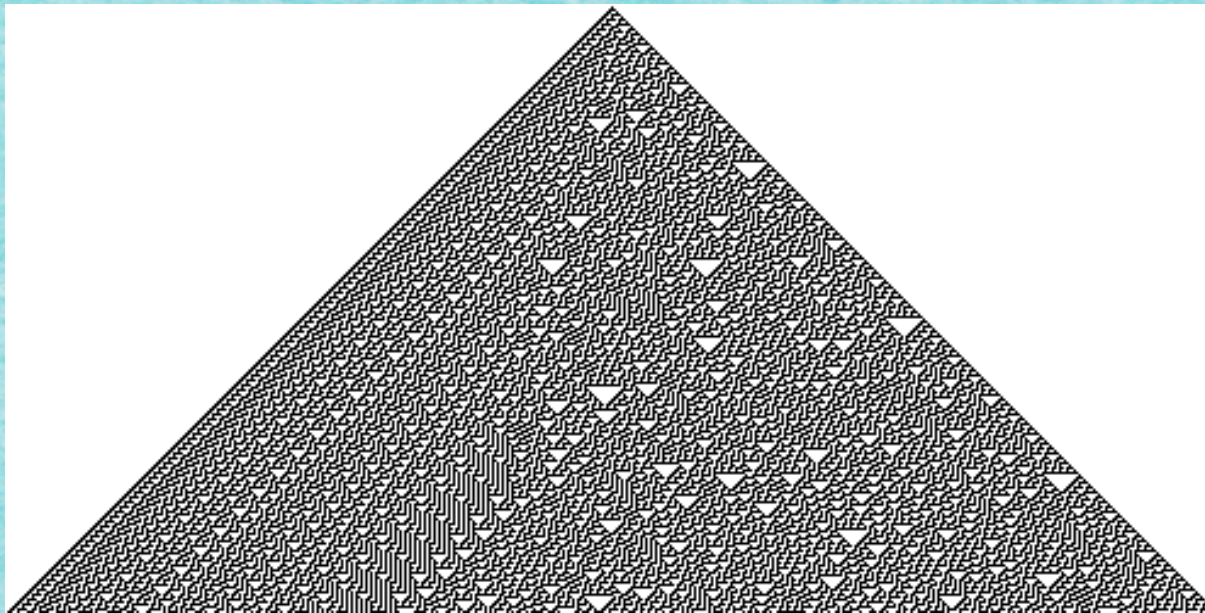


0 0 0 1 1 1 1 0

“Rule 30”
 $(0 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 30)$



5.4.4 Zelluläre Automaten



Rule 30

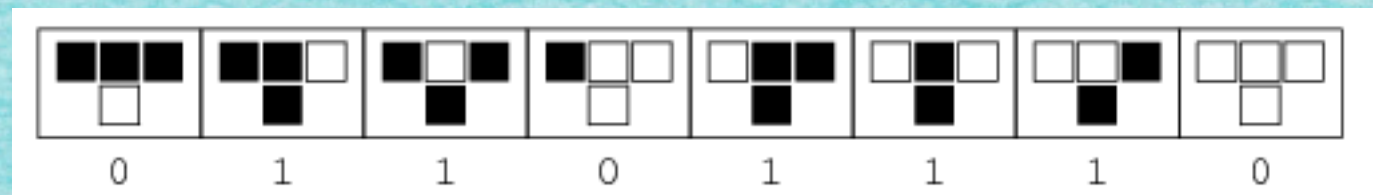
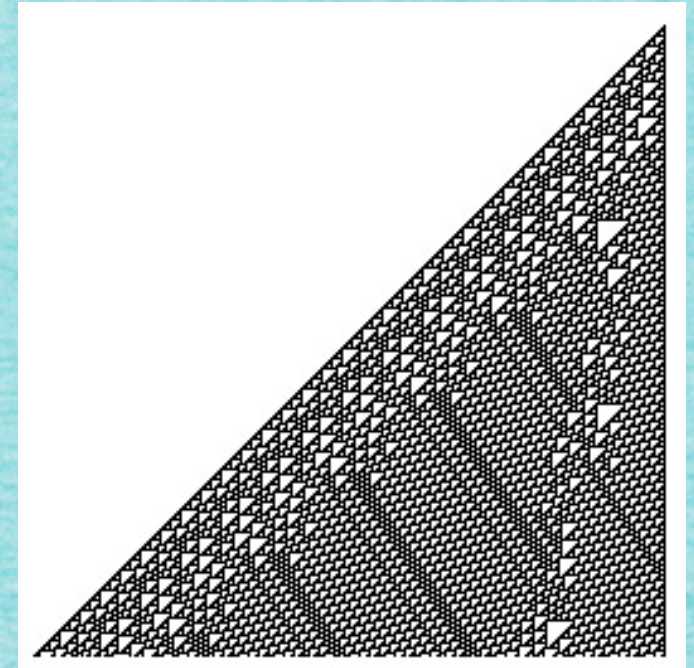
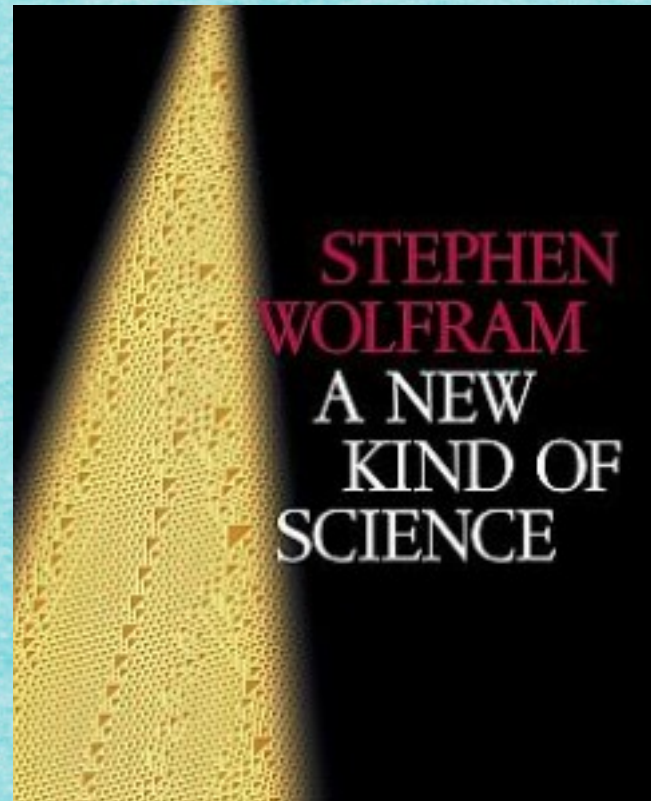


Kegelschnecke

5.4.4 Zelluläre Automaten



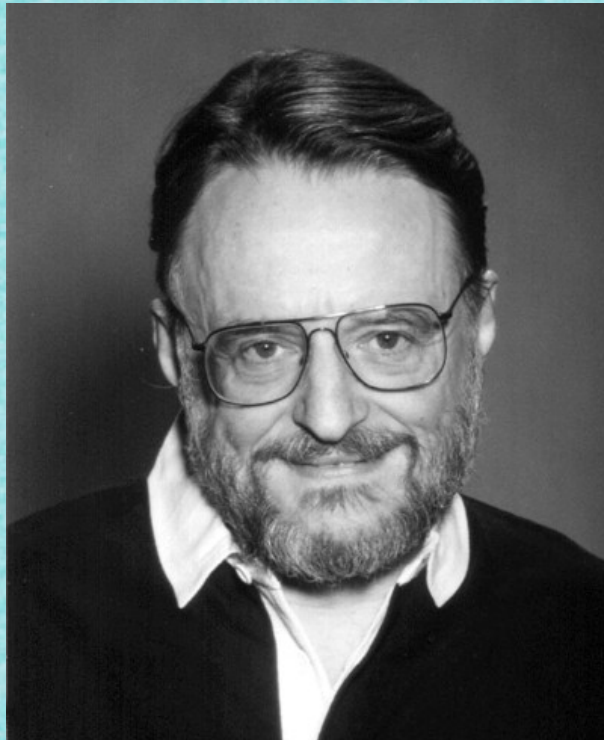
Stephen Wolfram
(1959-)



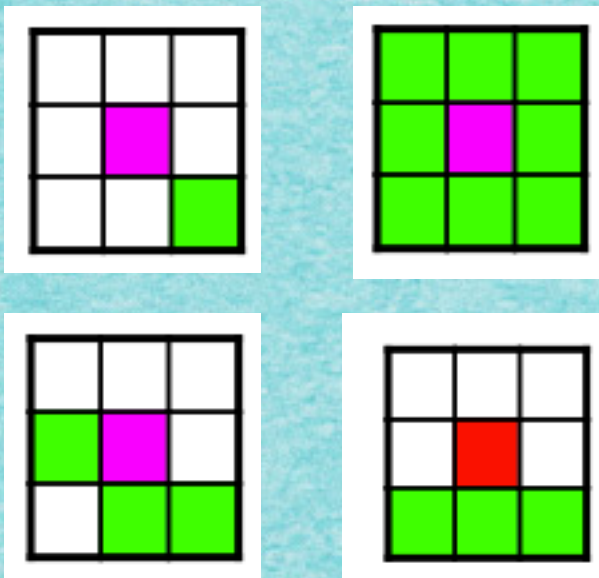
Rule 110

Matthew Cook (1998):
Rule 110 ist “universell”

5.4.4 Zelluläre Automaten

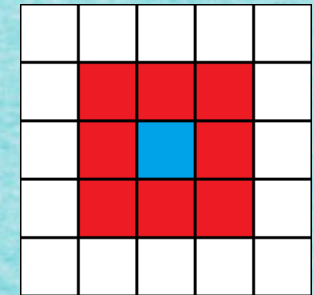


John Conway
(1937-2020)



Game of Life:

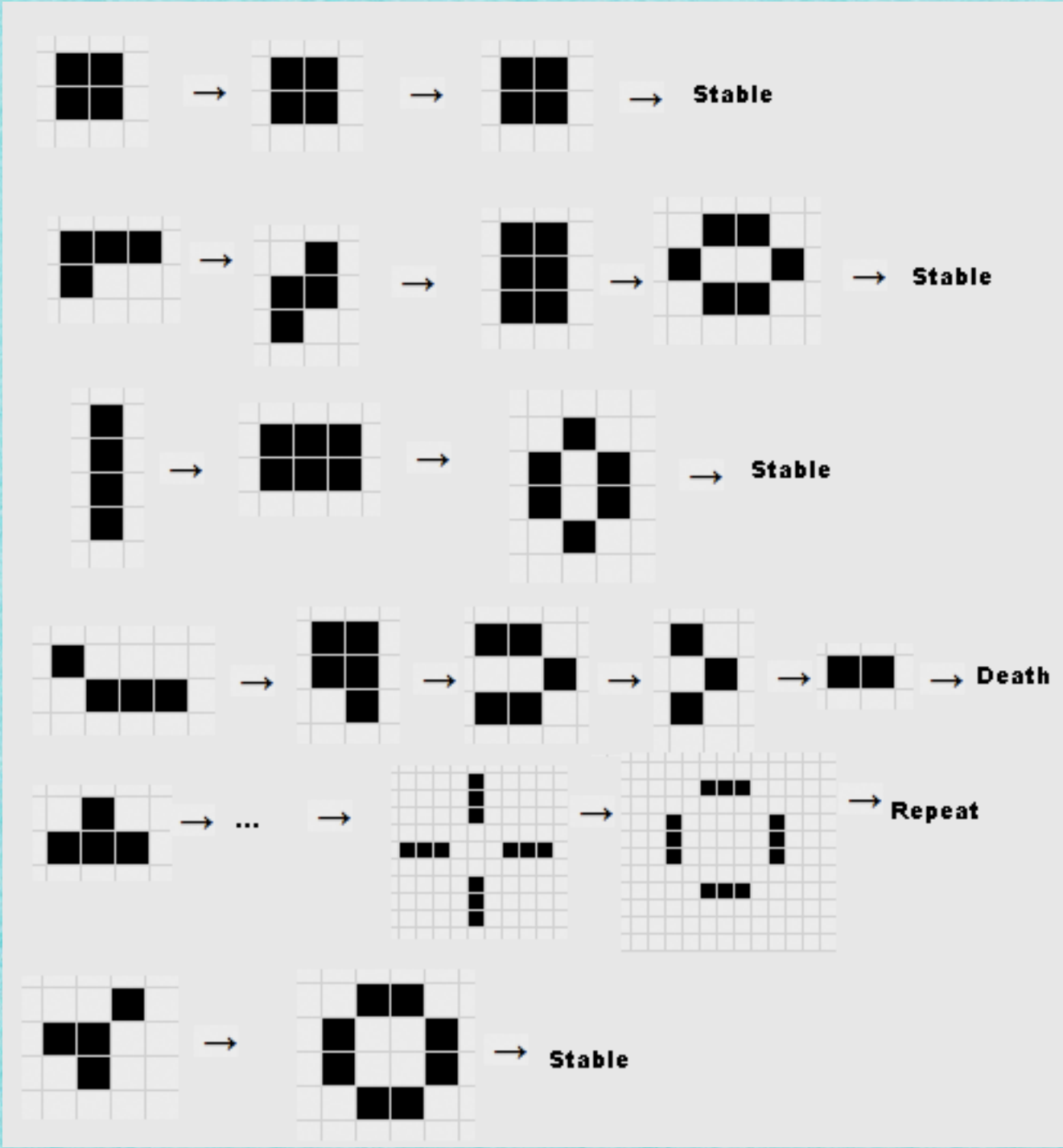
(1970)



- A. Jede Zelle lebt oder ist tot.
- B. Jede Zelle hat 8 Nachbarn.

1. Eine lebende Zelle mit weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt.
2. Eine lebende Zelle mit mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt.
3. Eine lebende Zelle mit zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt weiter.
4. Eine tote Zelle mit genau drei lebenden Nachbarn wird lebend.

5.4.4 Zelluläre Automaten

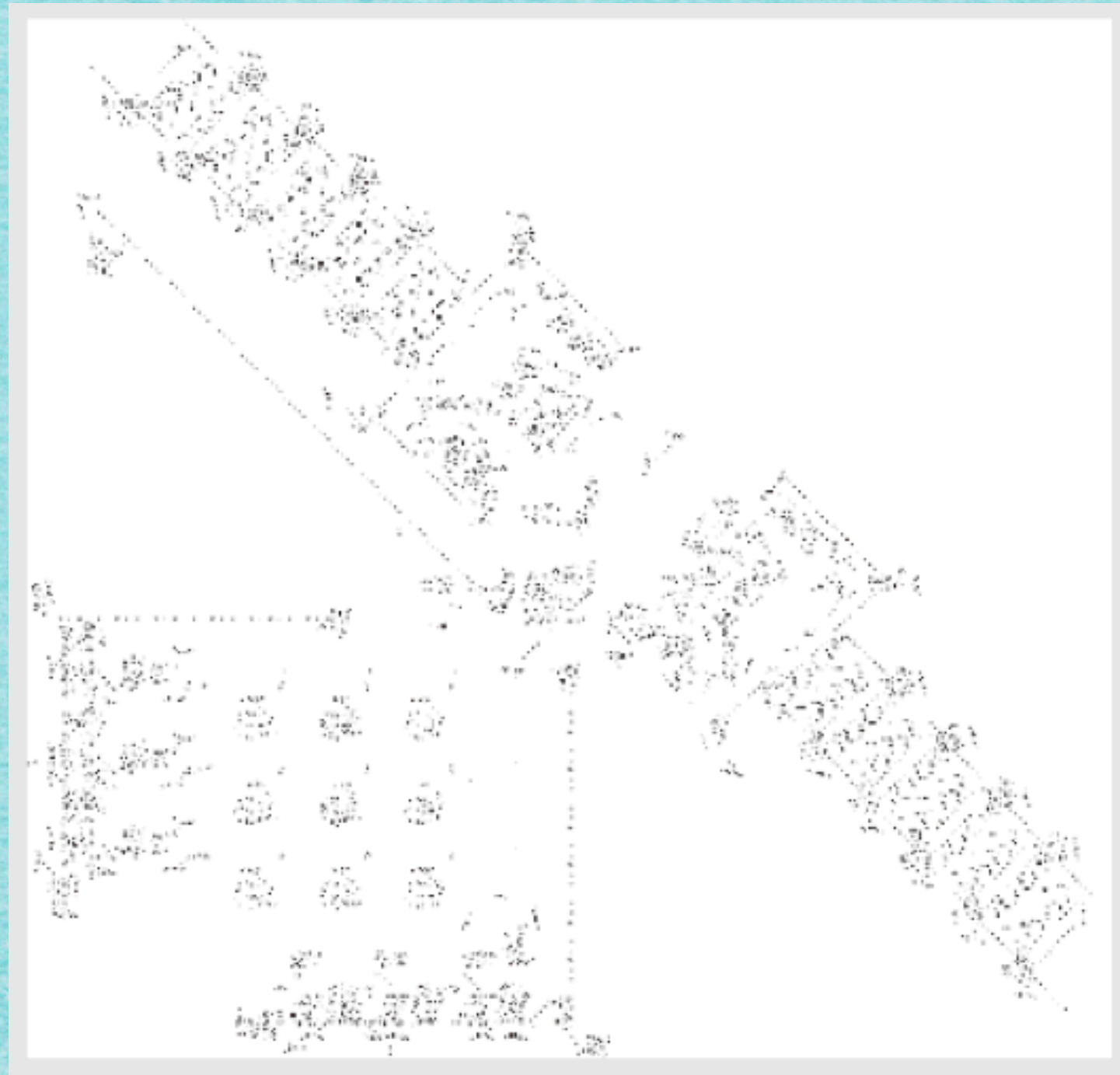


5.4.4 Zelluläre Automaten



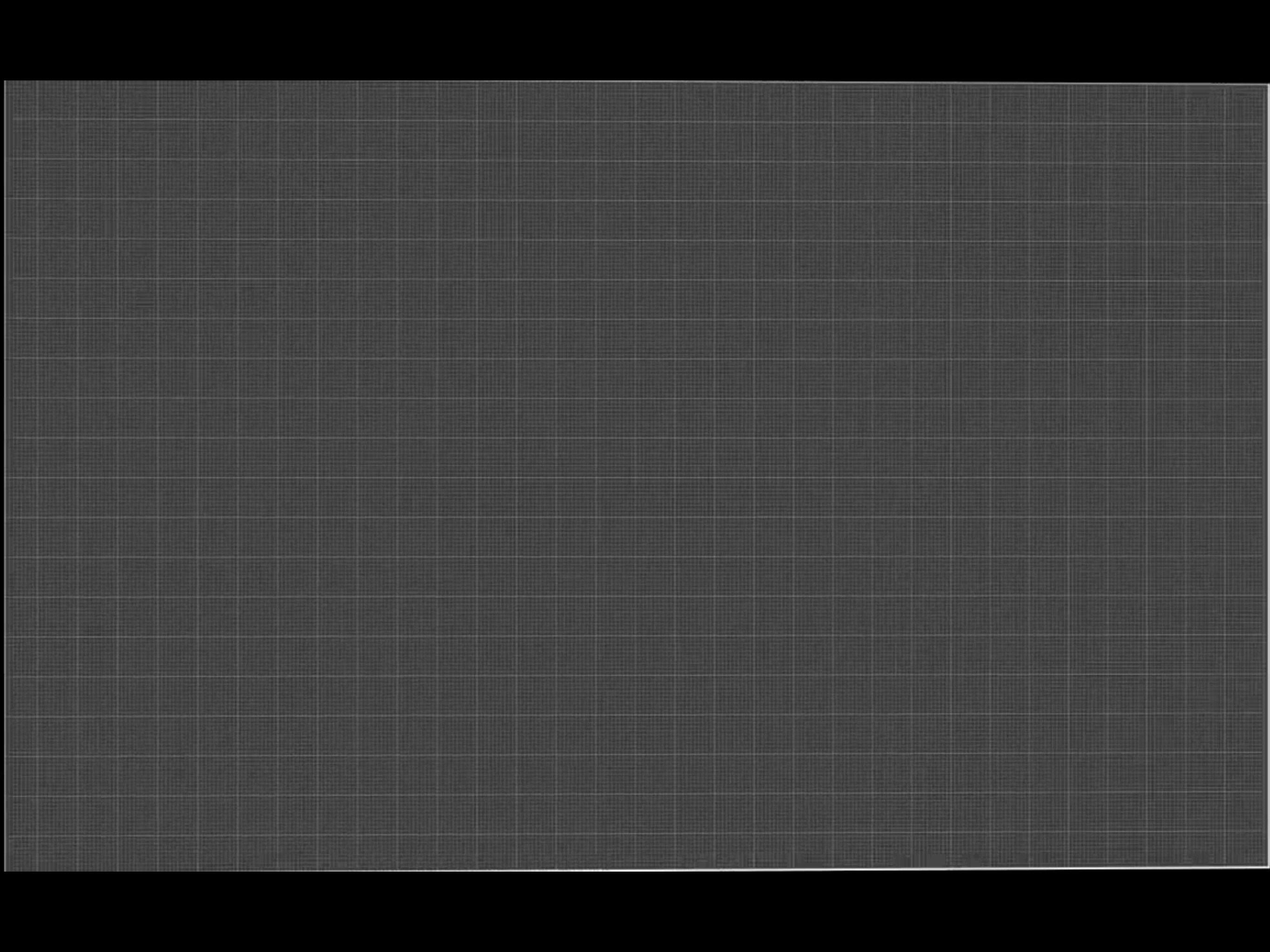
“Gosper-Glider”

5.4.4 Zelluläre Automaten



Turing-Maschine, basierend auf
Game of Life (Paul Rendell)

- > Film:**
- **Video von Emanuele Ascanti**
 - **Musik „Lux Aeterna“
von Clint Mansell & Kronos Quartet**



5.4 Nichtlineare Rekursionen

- **Die Welt ist nichtlinear!**
- **Nichtlinearität birgt viele Überraschungen!**



Demnächst mehr!

s.fekete@tu-bs.de