Sauber beweisen:

SATZ 4.8

Die Höhe eines AVL-Baumes mit n Knoten ist $O(\log n)$.

BEWEIS:

Statt einer oberen Schranke für die Höhe eines AVL-Baumes zeigen wir zunächst eine untere Schranke für die Zahl der Knoten eines AVL-Baumes!

Sei $n(h)$ die kleinste Zahl von Knoten eines AVL-Baumes der Höhe h.

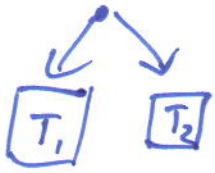
Wir beobachten

$n(0) = 1$ (ein Knoten erforderlich)

$n(1) = 2$ (zwei Knoten erforderlich wegen Höhe)

Noch einmal gilt

$$n(h) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wurzelknoten}}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teilbaum}}}{n(h-1)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teilbaum}}}{n(h-2)}.$$



Wir zeigen per Induktion:

$$n(h) \geq 2^{\frac{h}{2}-1}$$

Induktionsanfang:

Die Behauptung gilt für

$h = 1$: $n(1) = 1 \geq 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{h}{2}-1}$

$h = 2$: $n(2) = 2 \geq 2^{0} = 2^{\frac{h}{2}-1}$

Induktionsschritt:

Gelte die Behauptung für alle $h \in \{0, \dots, k\}$.

Wir zeigen: Die Behauptung gilt für $h = k+1$!

Betrachte also

$$n(k+1) = 1 + n(k) + n(k-1).$$

Da $n(h)$ monoton wächst (für größere Höhe braucht man mindestens so viele Knoten wie für niedrigere!), gilt

$$n(k) \geq n(k-1).$$

Also ist

$$\begin{aligned} n(k+1) &\geq 1 + 2 \cdot n(k-1) \\ &\underset{\text{Ind.annahme}}{\geq} 1 + 2 \cdot 2^{\frac{k-1}{2}-1} \\ &= 1 + 2^{\frac{k+1}{2}-1} \end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung auch für $h = k+1$.

<u>Induktionsschluss:</u>
Für alle $h \in \mathbb{N}$ gilt $n(h) \geq 2^{\frac{h}{2}-1}$.

Damit ist auch

$$\log_2 (n(h)) \geq \frac{h}{2} - 1$$

oder

$$h \leq 2(\log_2 n + 1)$$

denn $n(h)$ ist die kleinstmögliche Knotenzahl bei Höhe h.

Damit hat ein AVL-Baum mit n Knoten höchstens die Höhe $2(\log_2 n+1)$, also $O(\log n)$.

$\square$

Es bleibt Problem 4:
Wie bewahrt man Höhenbalanciertheit bei INSERT und DELETE?