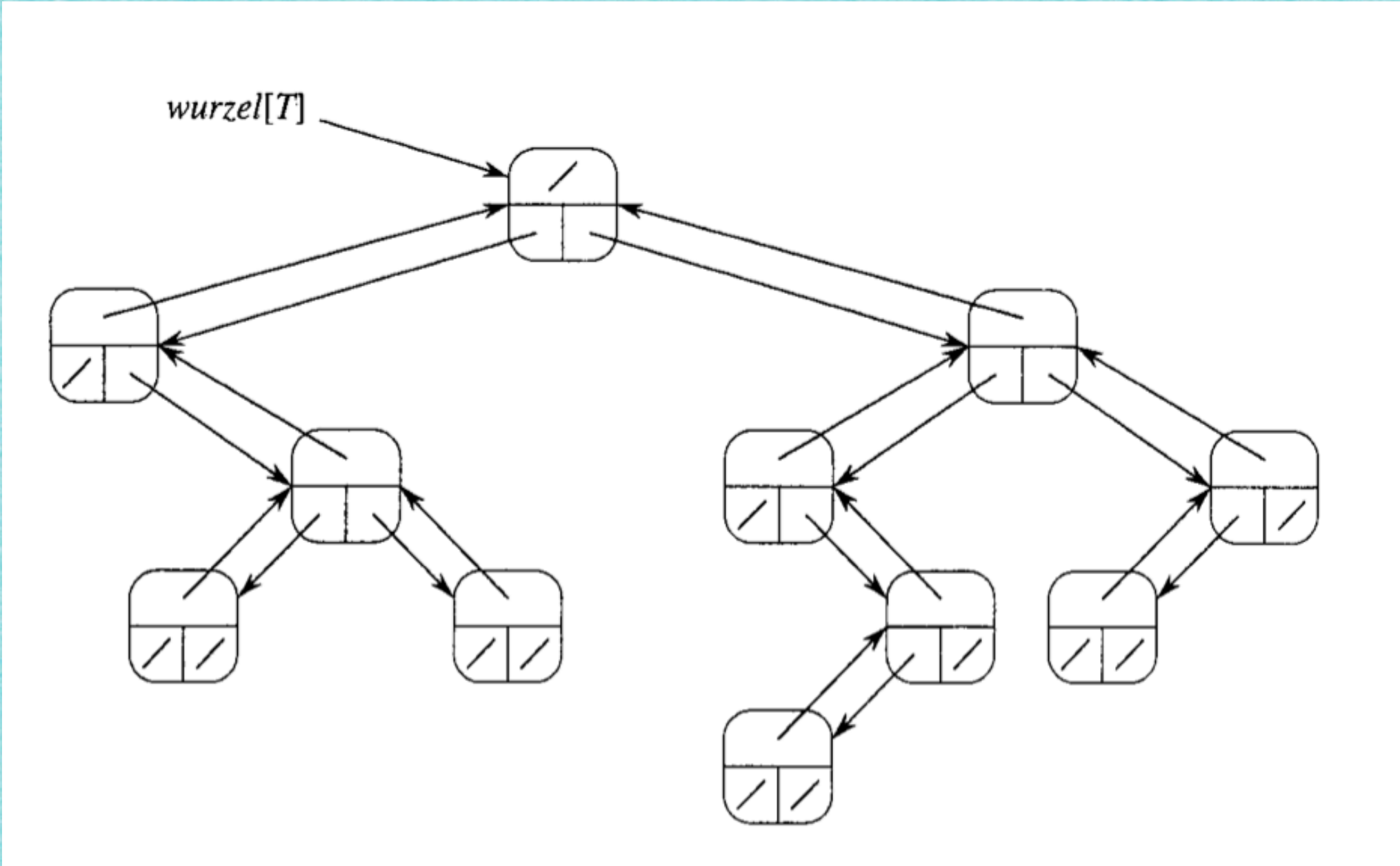


Kapitel 4.6: AVL-Bäume

*Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2025/26*

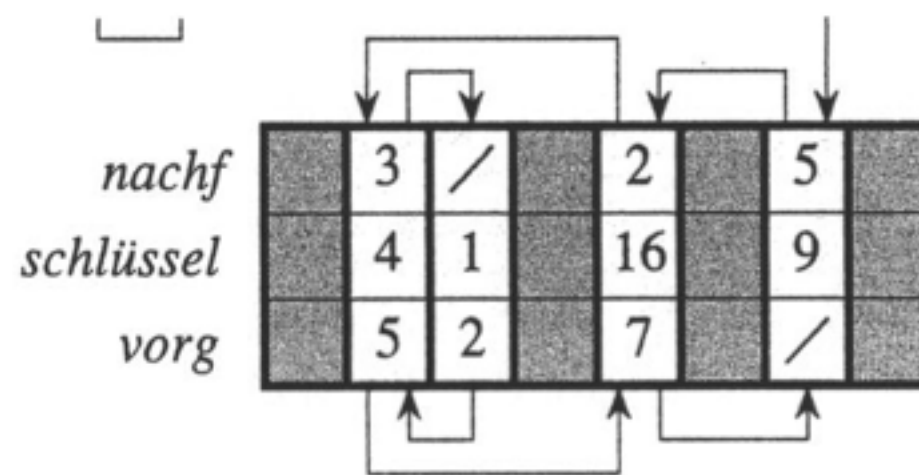
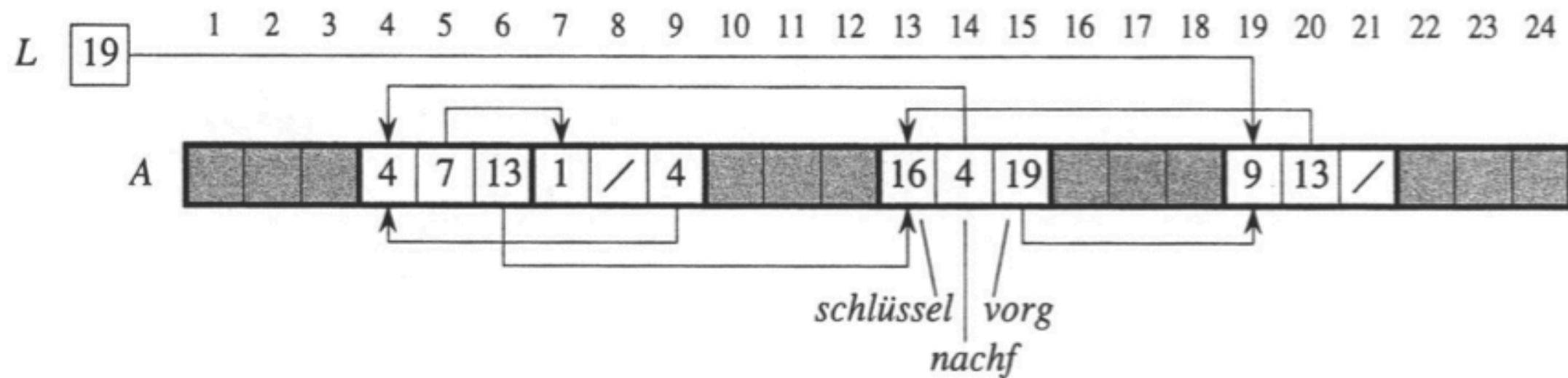
Prof. Dr. Sándor Fekete

Binärer Suchbaum



Außerdem wichtig: Struktur der Schlüsselwerte!

Speicherung kann irgendwo erfolgen!



4.5 Binäre Suchbäume

Schnell:

- $O(\log n)$: *logarithmische Zeit*
- $O(h)$: *Tiefe des Baumes*

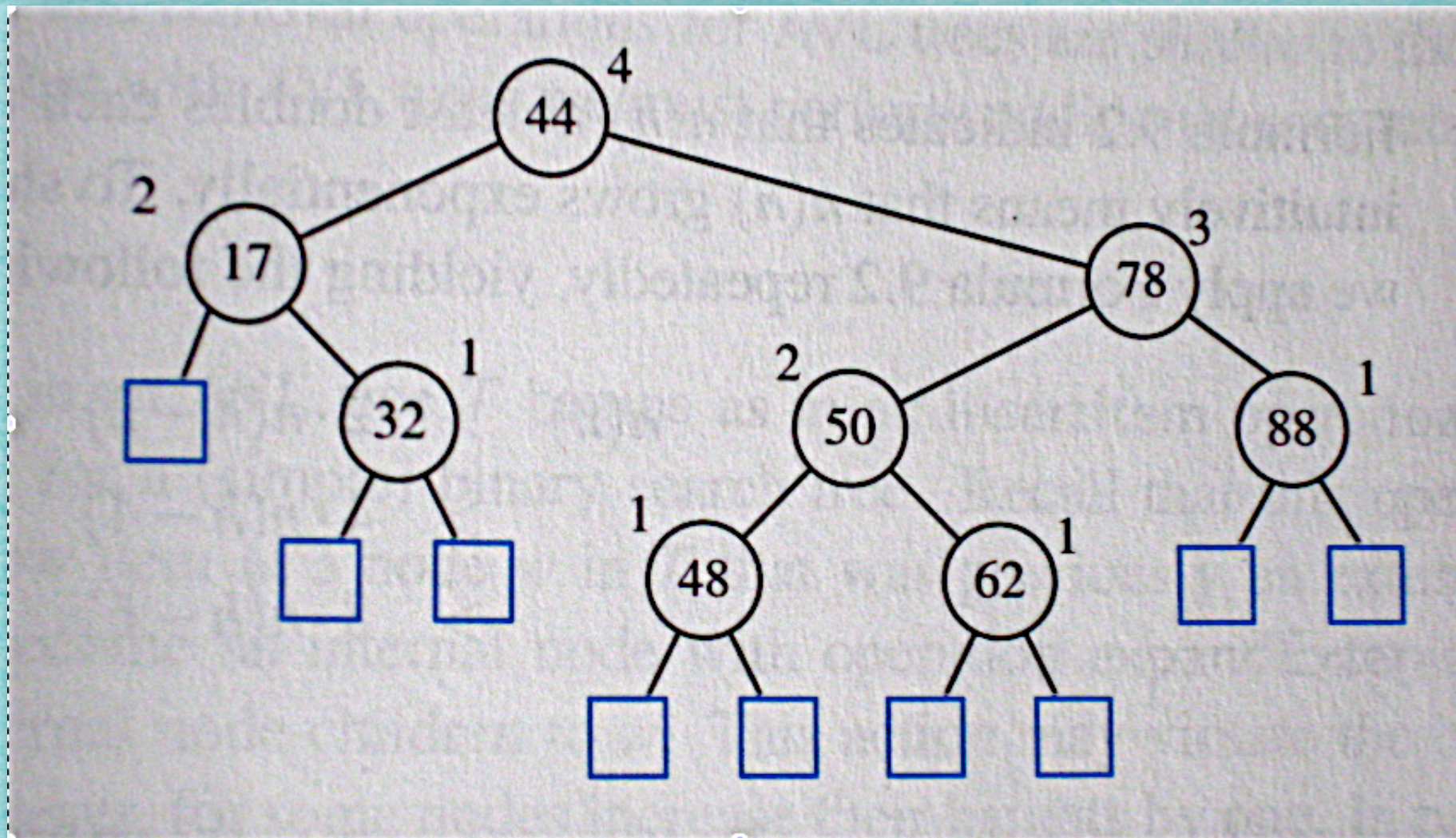
Also: Wie können wir die Tiefe des Baumes auf $O(\log n)$ beschränken?

4.6 AVL-Bäume

Definition 4.7 (Nach Adel'son-Vel'skiĭ und Landis, 1962)

(1) Ein binärer Suchbaum ist höhenbalanciert, wenn sich für jeden inneren Knoten v die Höhe der beiden Kinder von v um höchstens 1 unterscheidet.

(2) Ein höhenbalancierter Suchbaum heißt auch AVL-Baum.



4.6 AVL-Bäume

Satz 4.8

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat höchstens Höhe $O(\log n)$.

Beweis:

Wie gesehen!

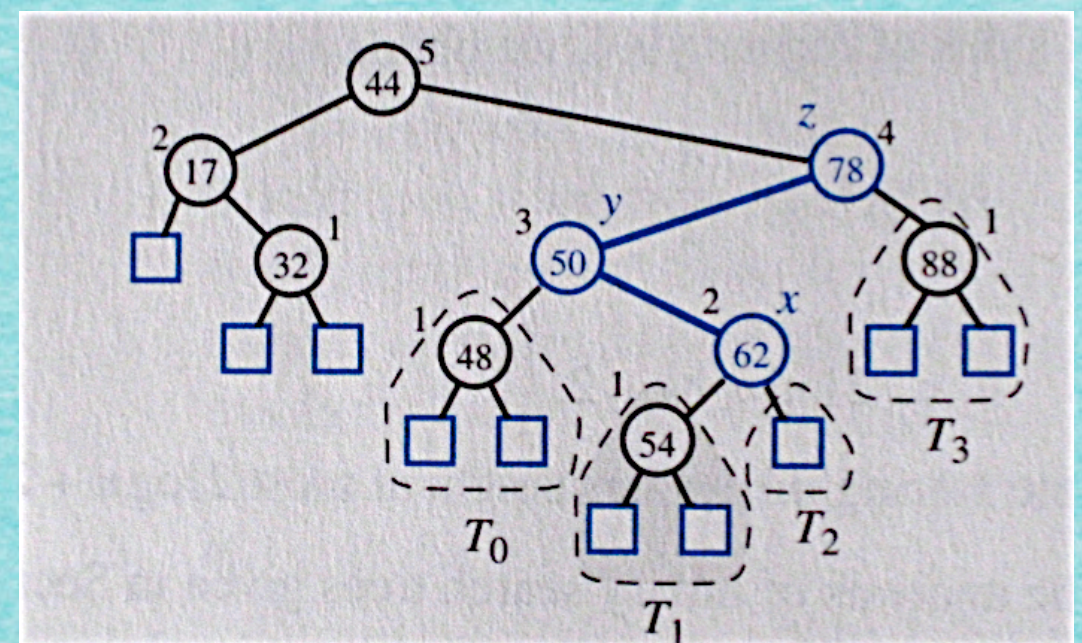
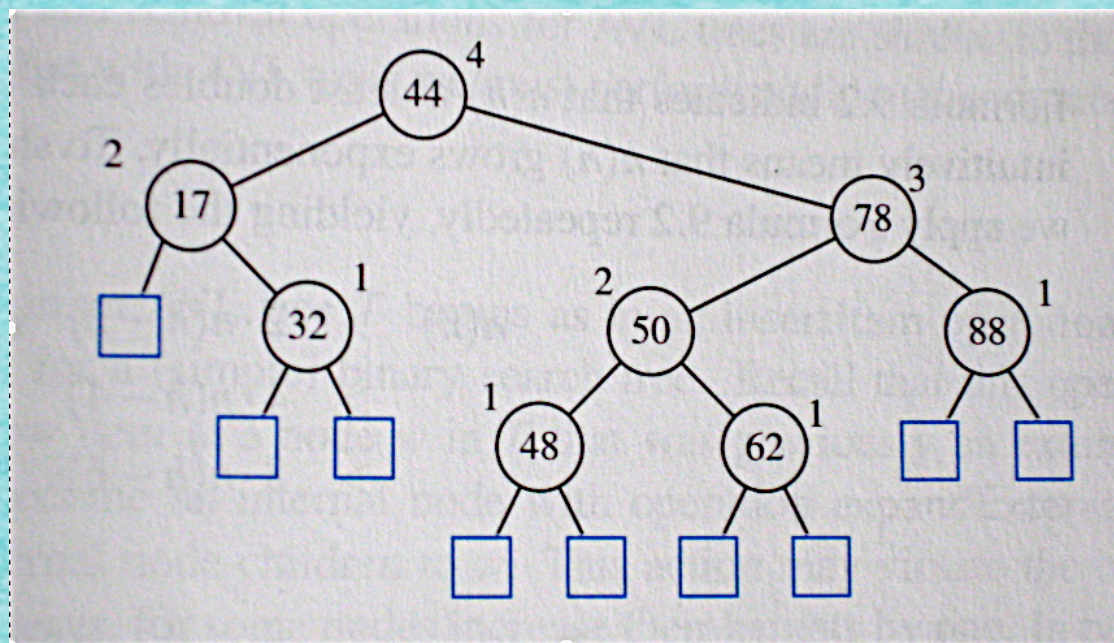
Damit noch offen:

Wie erhält man Höhenbalanciertheit in dynamischen Situationen?

Einfügen („INSERT“)

Aufgabe:

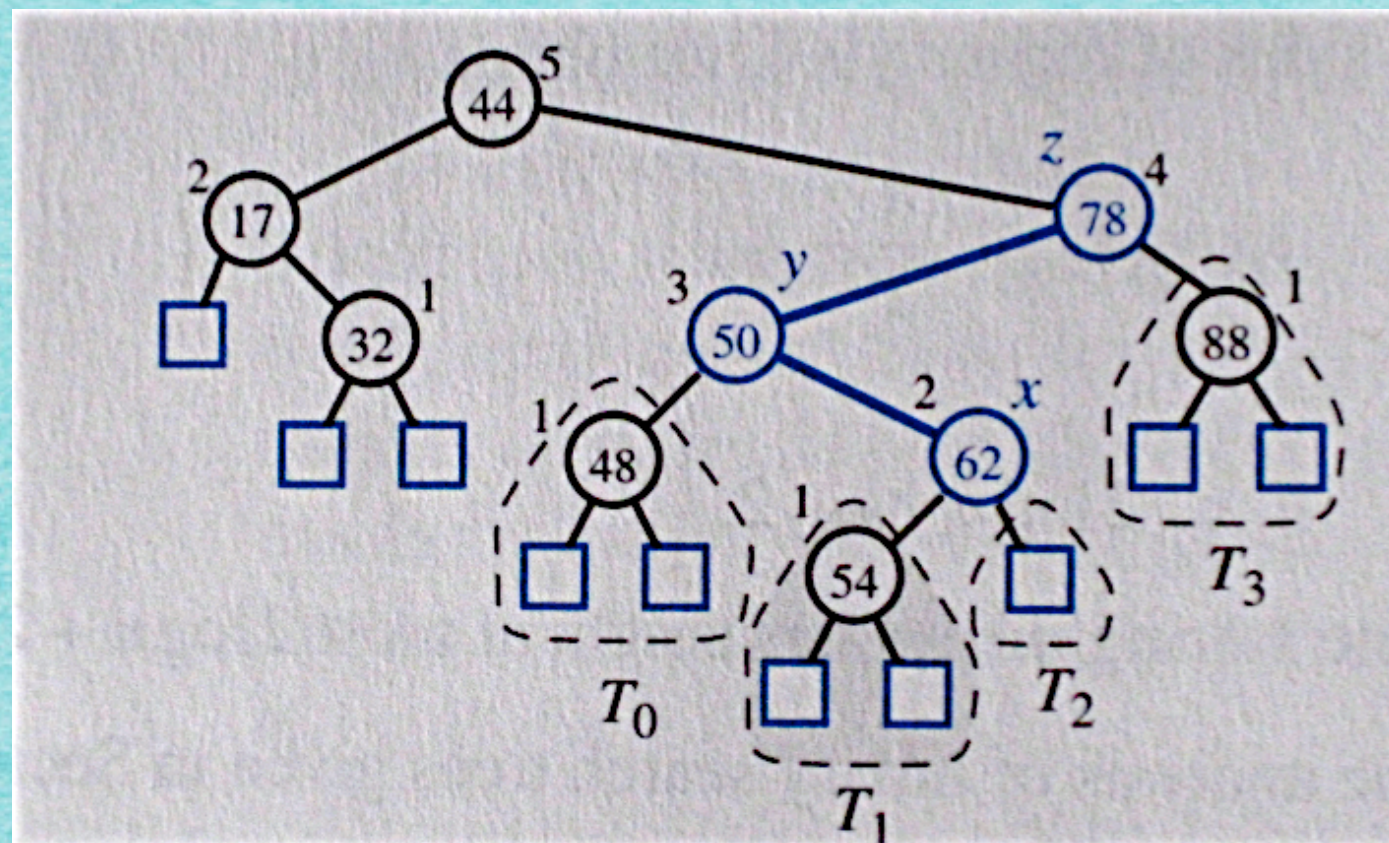
- *Füge 54 ein!*



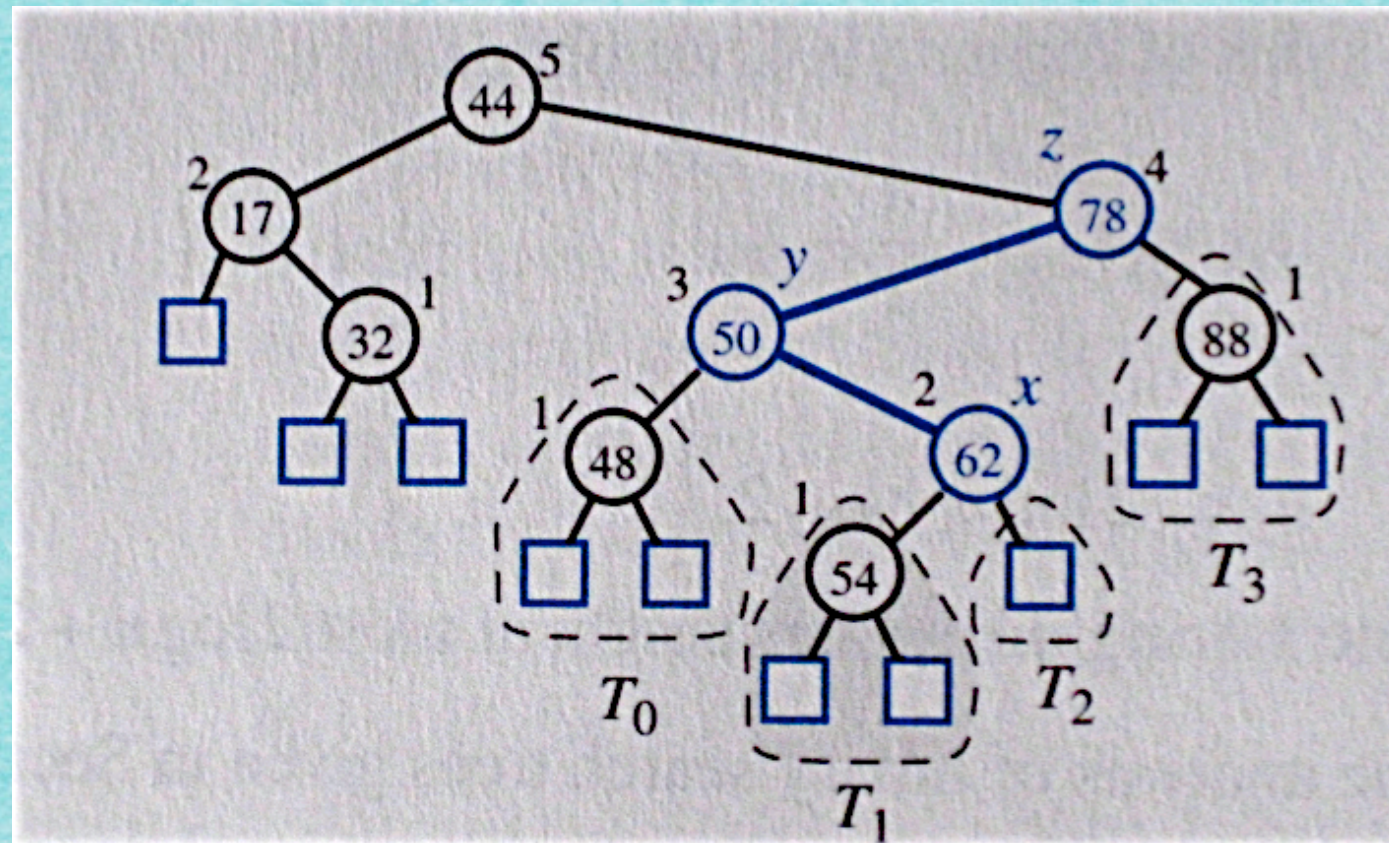
Einfügen

Idee:

- *Höhenbalanciertheit ändert sich beim Einfügen einzelner Elemente nur wenig - und lokal!*



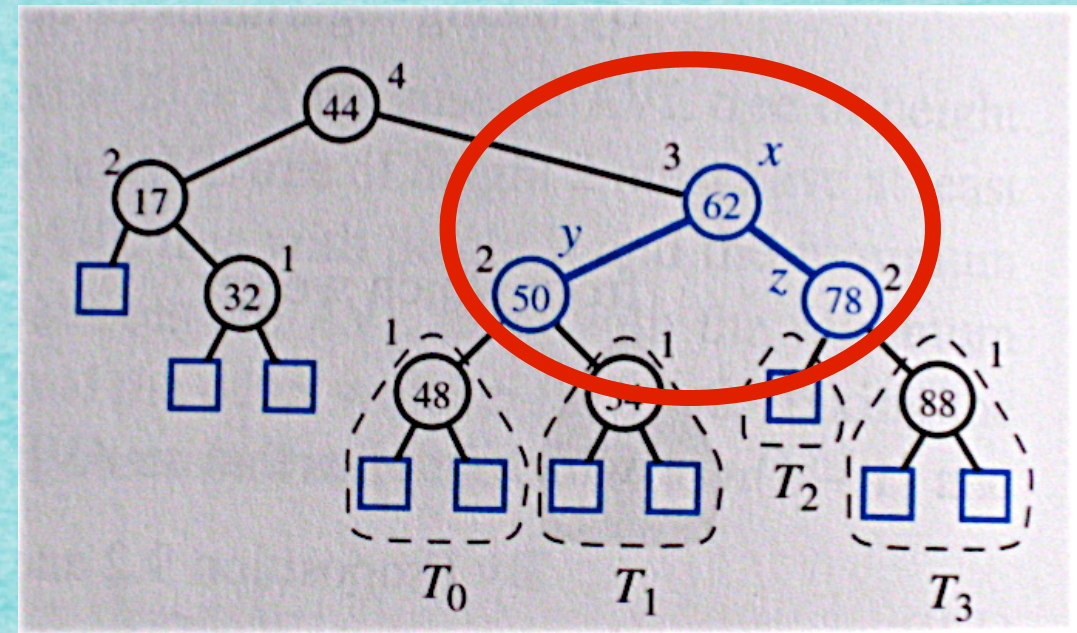
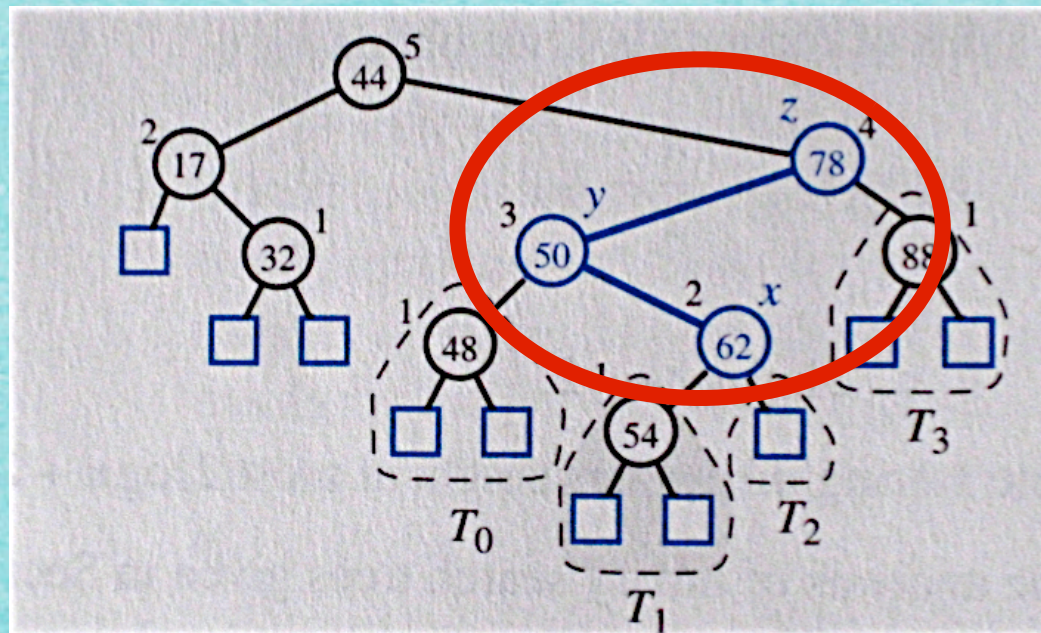
Einfügen



Was tun?

- *Teilbaum der 78 ist nicht höhenbalanciert.*
- *Die Höhe sollte höchstens 3 sein, damit auch der ganze Baum unter der 44 höhenbalanciert ist.*
- *Betrachte Knoten 78, Kind 50, Enkel 62!*

Einfügen



Neuer Baum!

- *Höhenbalanciert*
- *Nur lokale Umsetzung der Knoten 78, 50, 62*
- *Vorher drei Knoten untereinander, jetzt der mittlere über zwei anderen.*
- *„Rotation“*

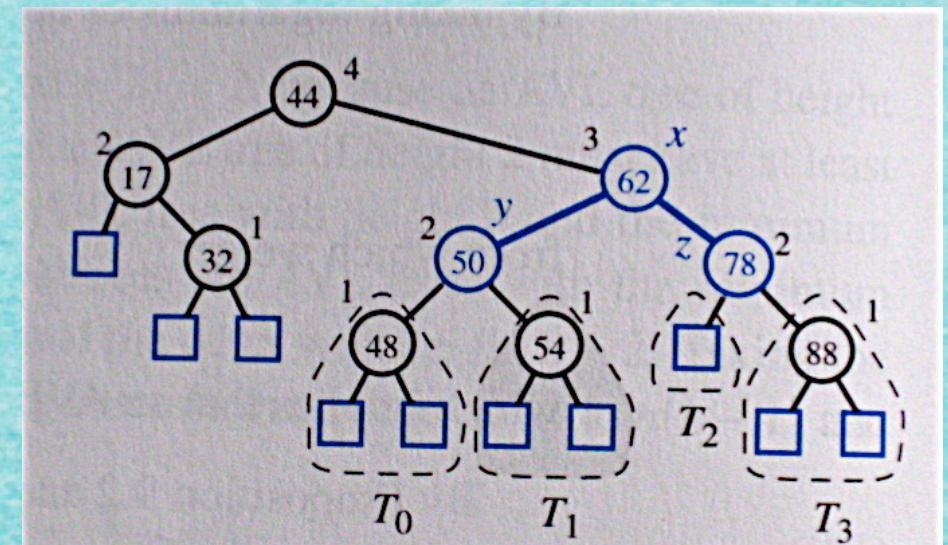
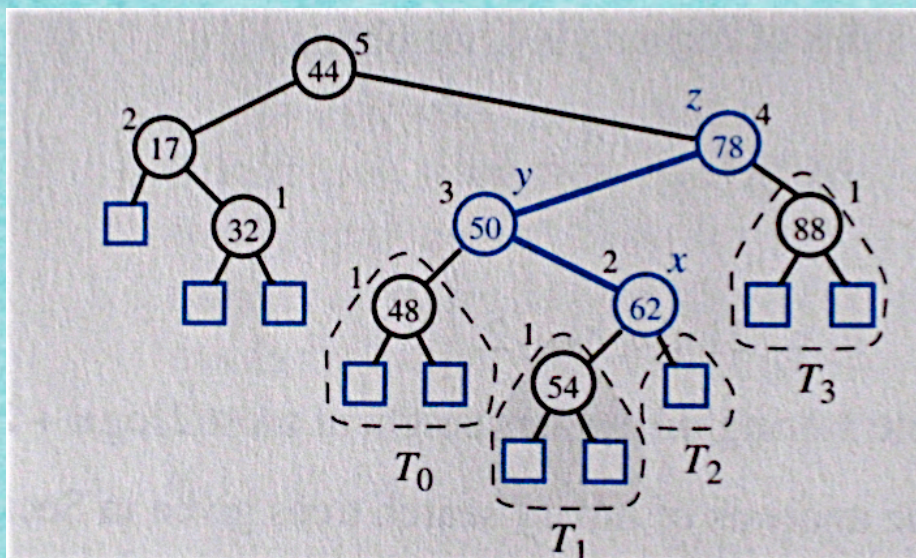
Algorithmus 4.9

INPUT: Knoten x eines binären Suchbaumes T , Vaterknoten y , Großvaterknoten z

OUTPUT: Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

RESTRUCTURE(x)

1. Sei (a, b, c) die Größensortierung der Knoten x, y, z ;
seien (T_0, T_1, T_2, T_3) die Größensortierung der vier Teilbäume unter x, y, z , die nicht Wurzeln x, y, z haben
2. Ersetze den Teilbaum mit Wurzel z durch einen neuen Teilbaum mit Wurzel b .
3. Setze a als linkes Kind von b , mit T_0 und T_1 als linken und rechten Teilbaum unter a ;
setze c als rechtes Kind von b , mit T_2 und T_3 als linken und rechten Teilbaum unter c .
4. RETURN



Satz 4.10

*Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist $O(1)$.*

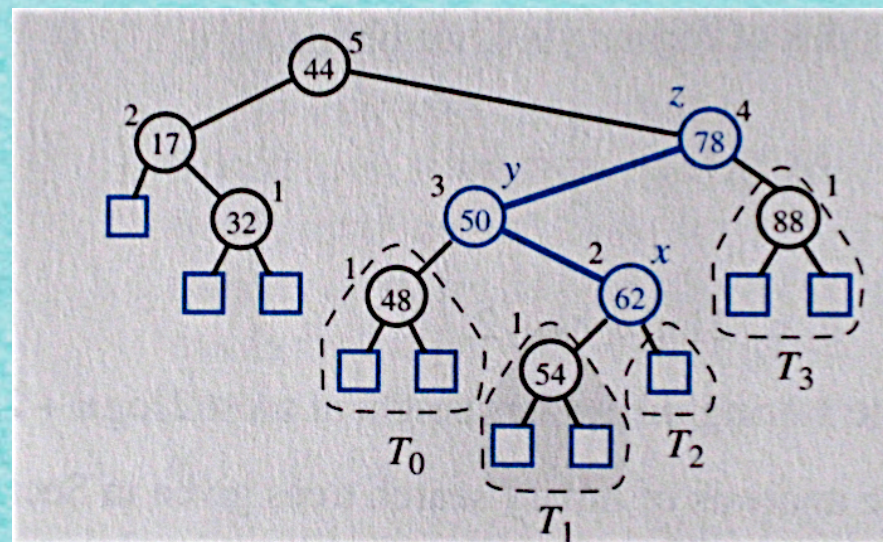
Beweis:

Angenommen, durch Hinzufügen eines Knotens v ist der Baum unbalanciert geworden.

Sei z der nach dem Einfügen niedrigste unbalancierte Vorfahre von v .

Sei y das Kind von z , das Vorfahre von v ist; y muss zwei höher sein als das andere Kind von z .

Sei x das Kind von y , das im selben Teilbaum wie v liegt.

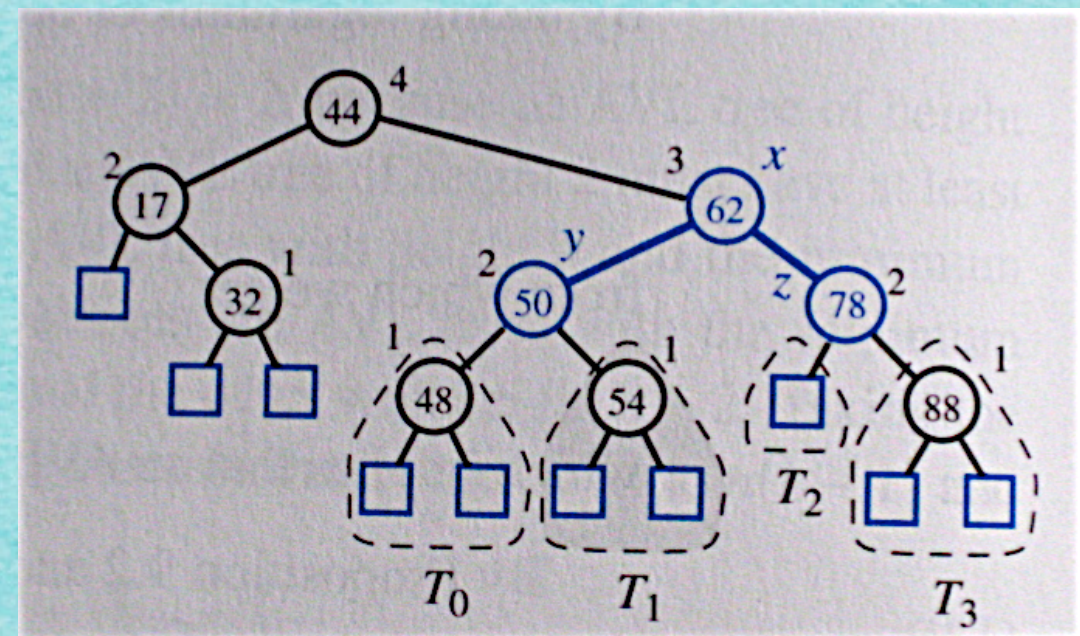
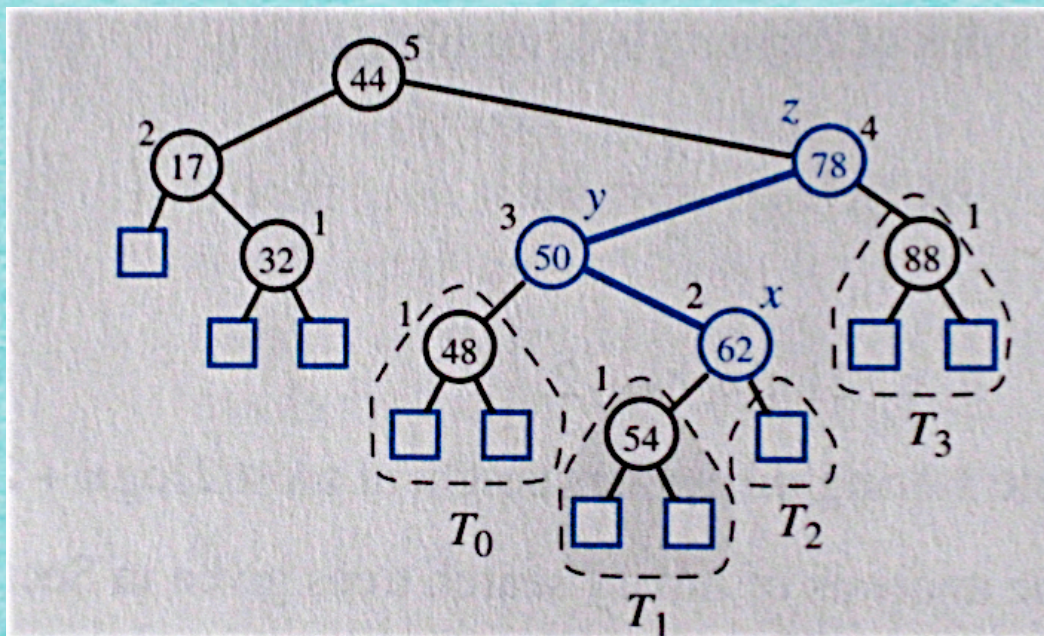


Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Jetzt ersetzen wir die Teilstruktur z, y, x (3 Knoten untereinander) durch eine Teilstruktur mit 2 Knoten unter einem.

Z.z.: Danach ist der Baum ein AVL-Baum!

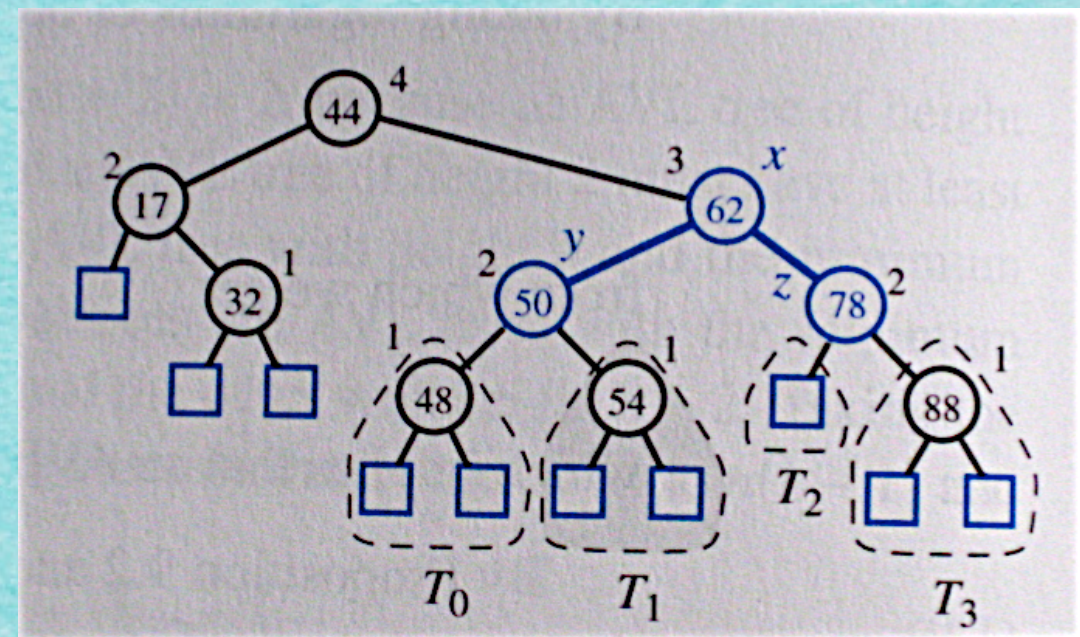
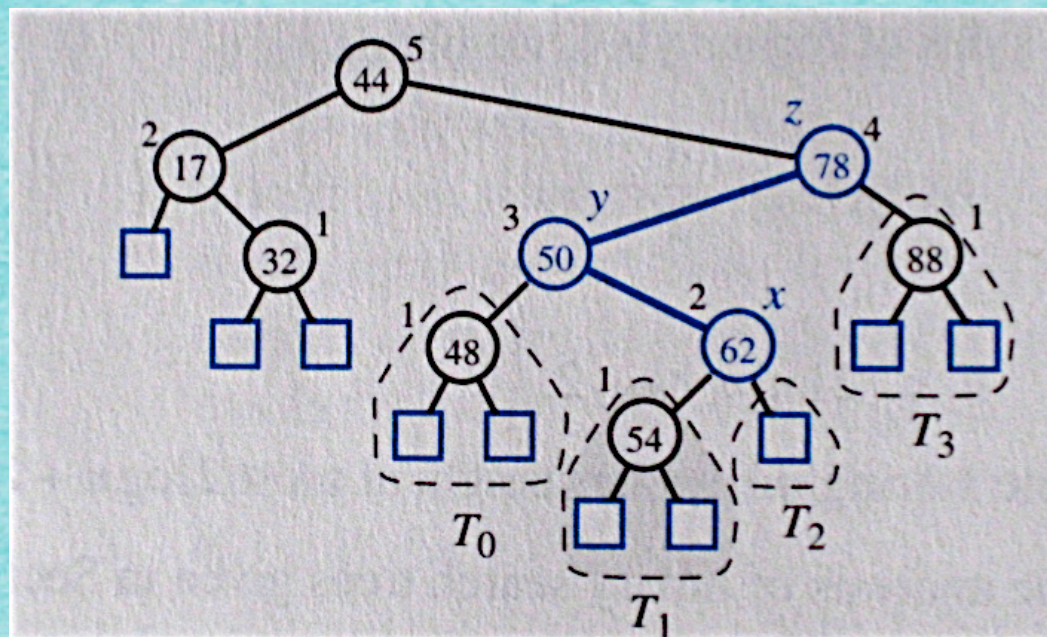


Betrachte jetzt die möglichen Anordnungen von x, y, z !

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

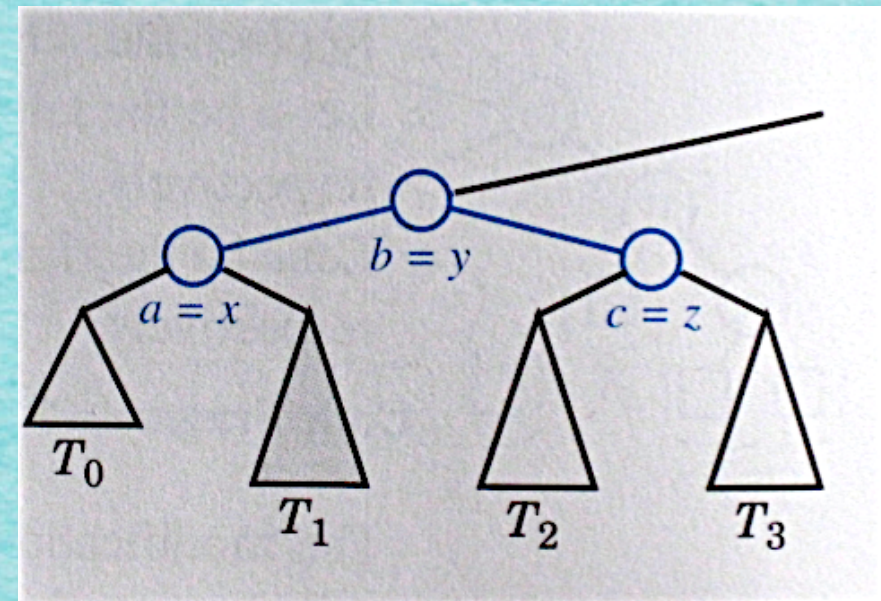
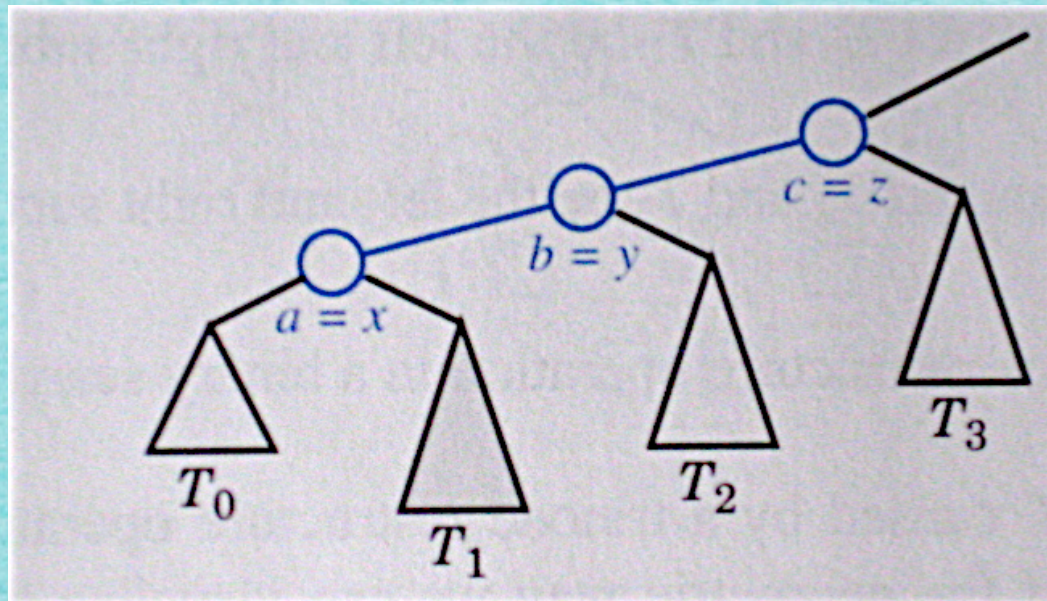
Welche Anordnungen gibt es?

- (1) $x \leq y \leq z$
- (2) $x \leq z \leq y$
- (3) $y \leq x \leq z$
- (4) $y \leq z \leq x$
- (5) $z \leq x \leq y$
- (6) $z \leq y \leq x$



Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(1) $x \leq y \leq z$

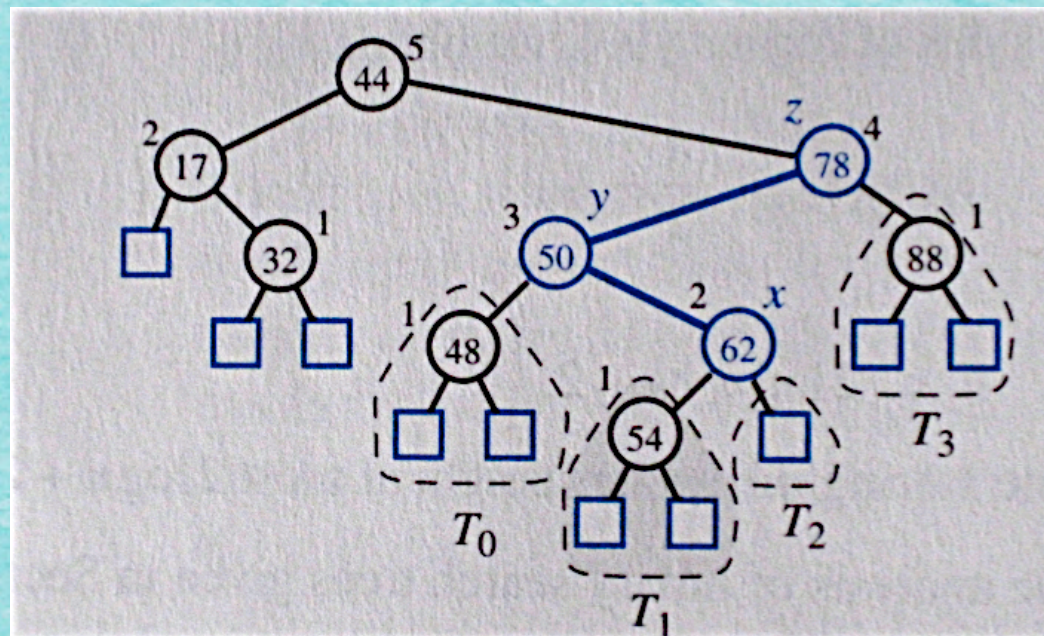


Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(2) $x \leq z \leq y$

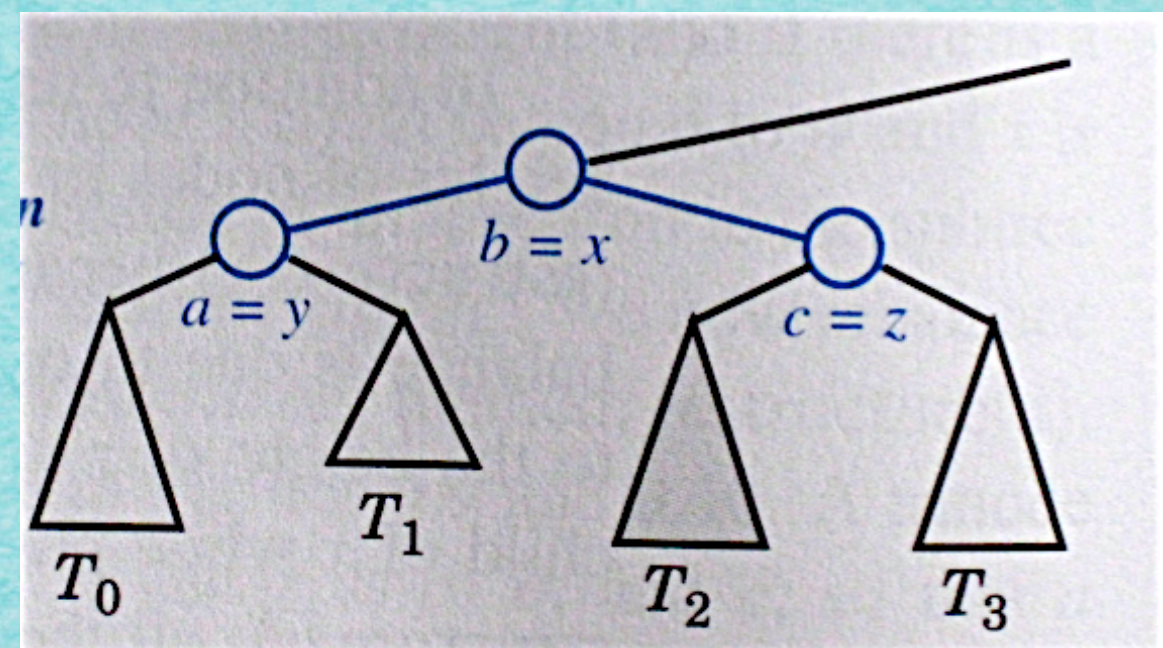
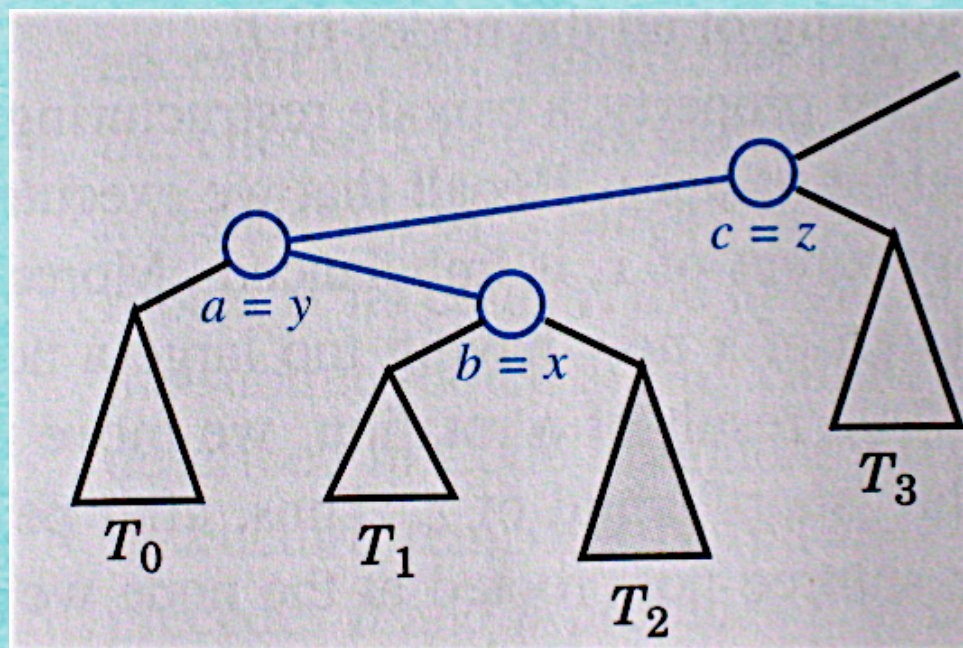


Der Fall kann nicht auftreten!

Einfügen

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

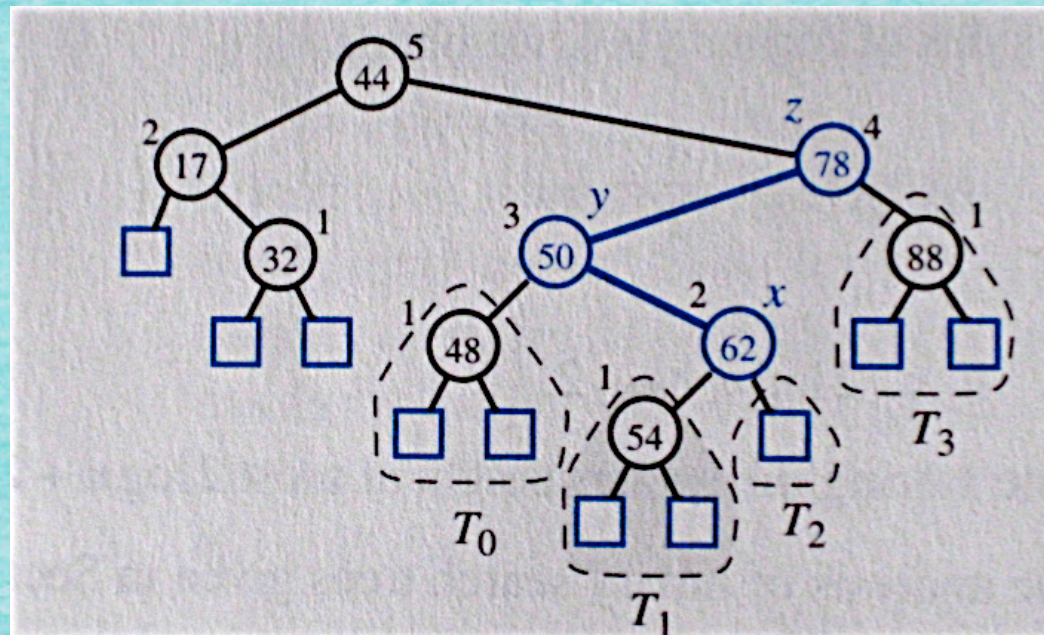
(3) $y \leq x \leq z$



Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

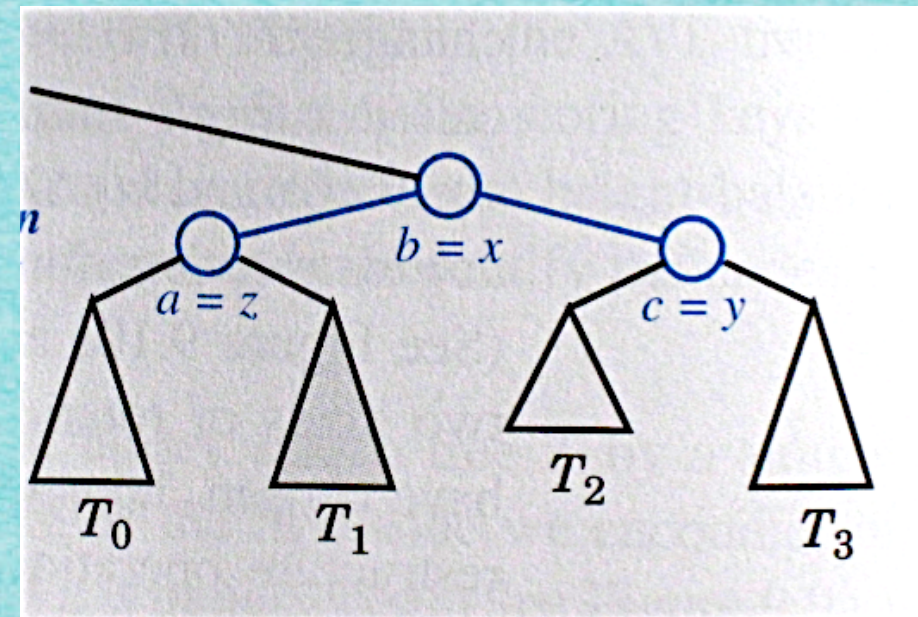
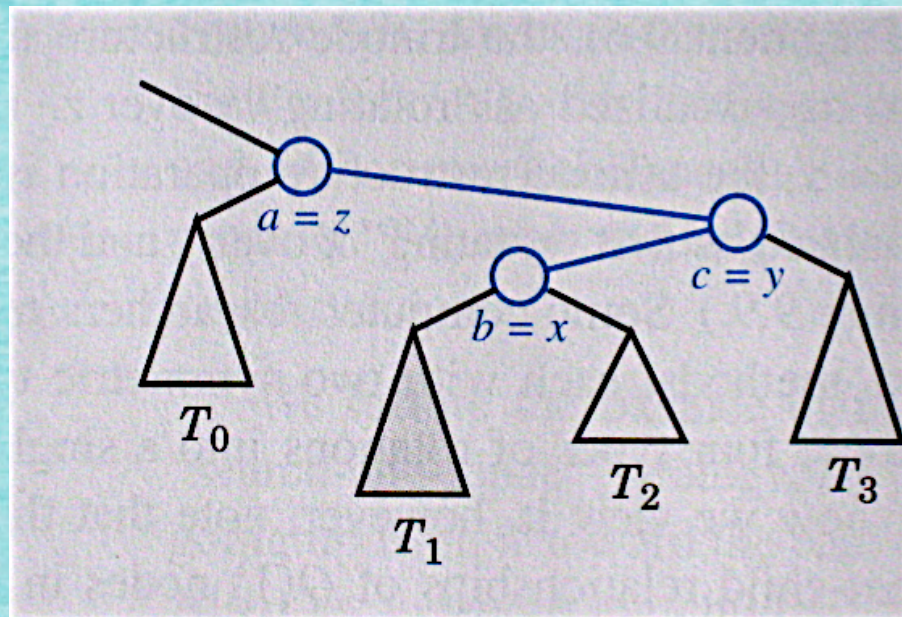
(4) $y \leq z \leq x$



Der Fall kann nicht auftreten!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

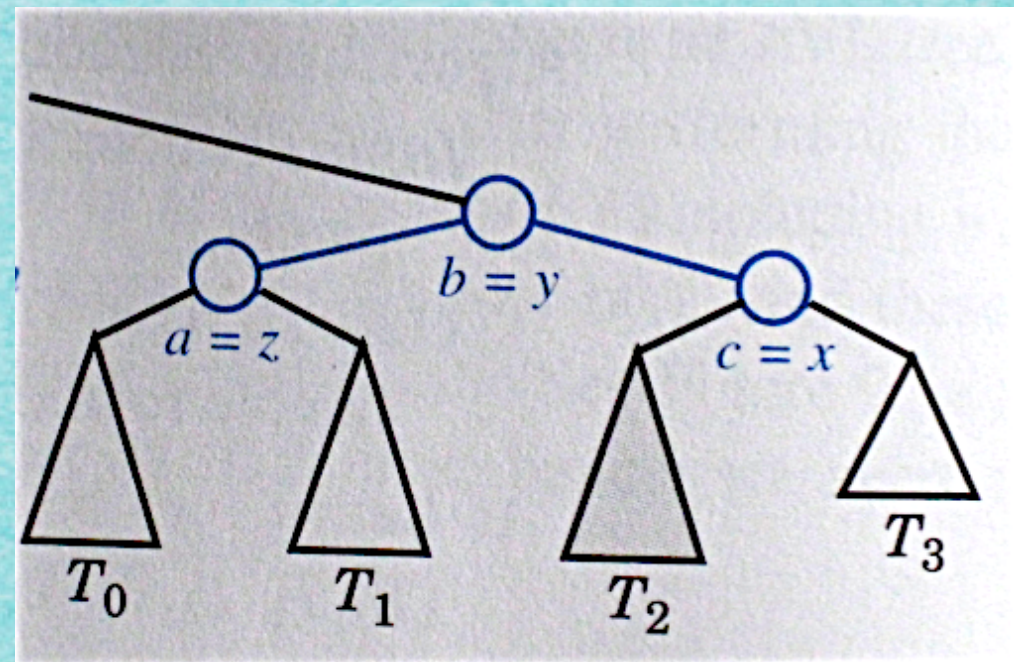
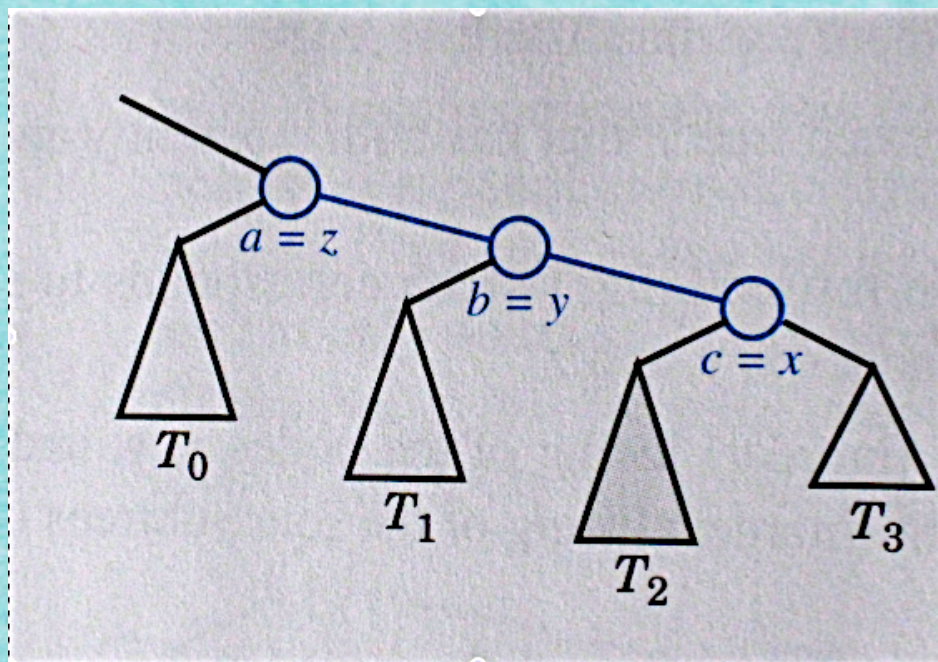
(5) $z \leq x \leq y$



Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(6) $z \leq y \leq x$



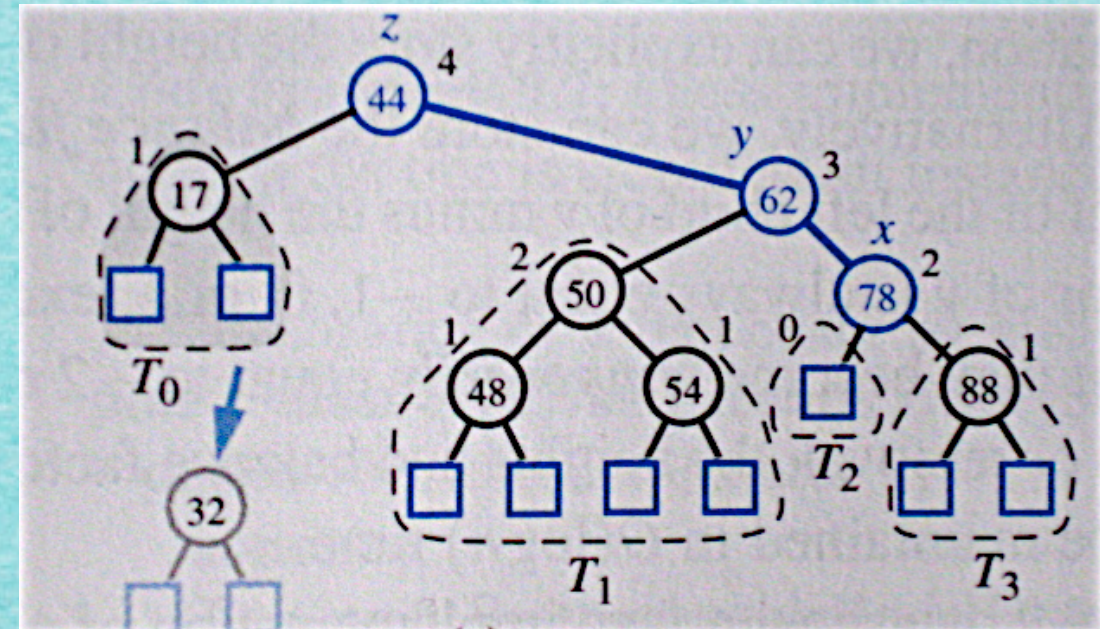
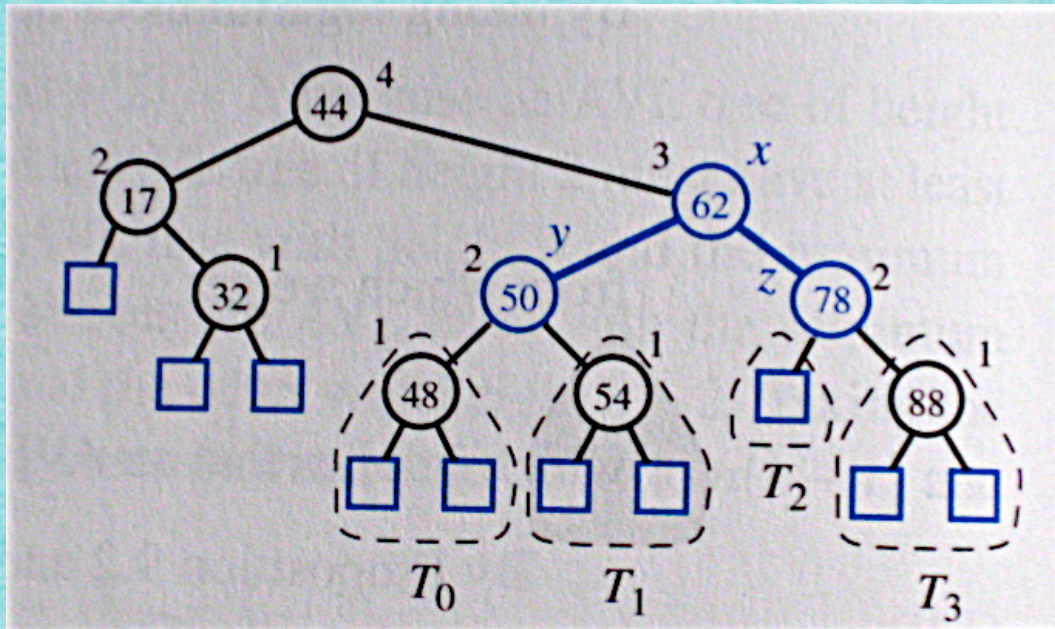
Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Alle Schritte erfordern nur konstant viele Rechenoperationen.

Löschen („DELETE“)

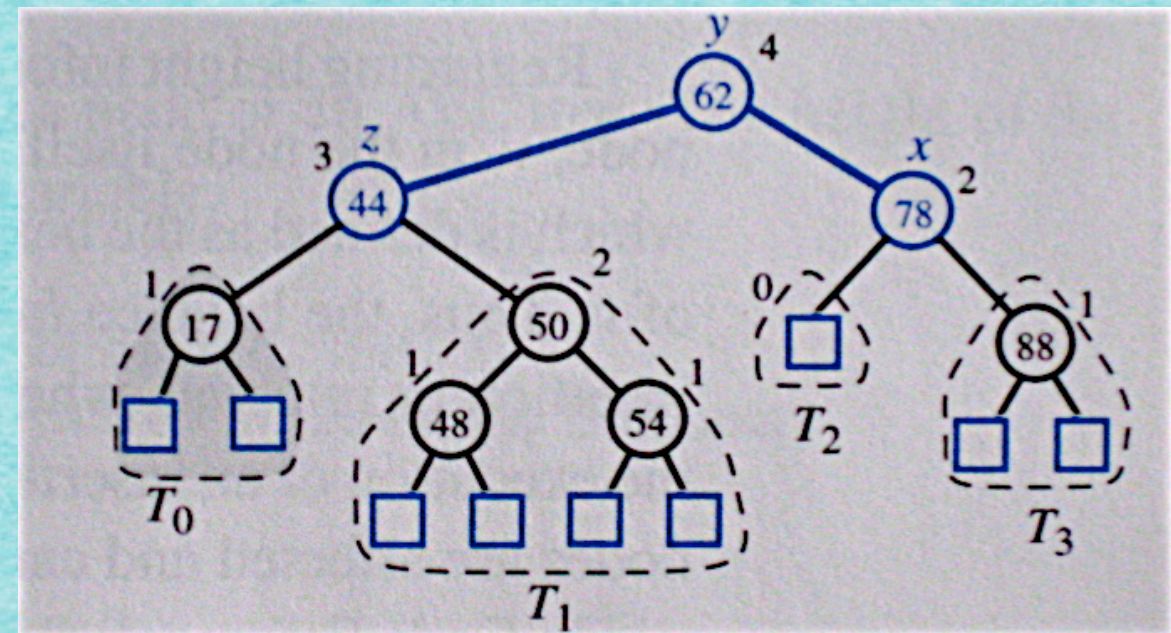
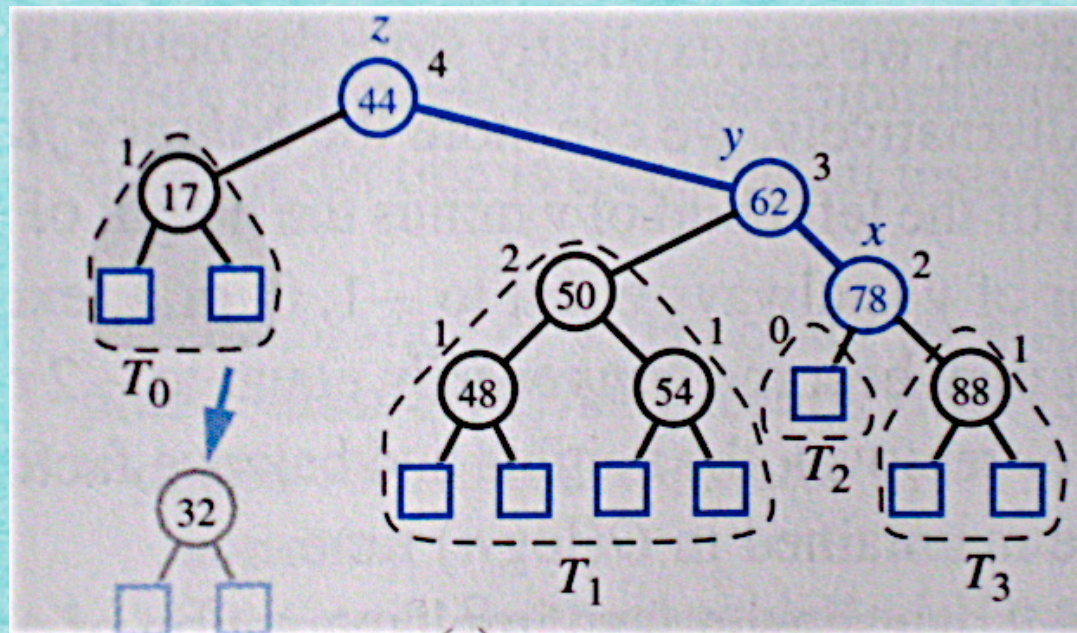
Aufgabe:

- *Lösche 32!*



Wieder:

- *Verwende **RESTRUCTURE!***

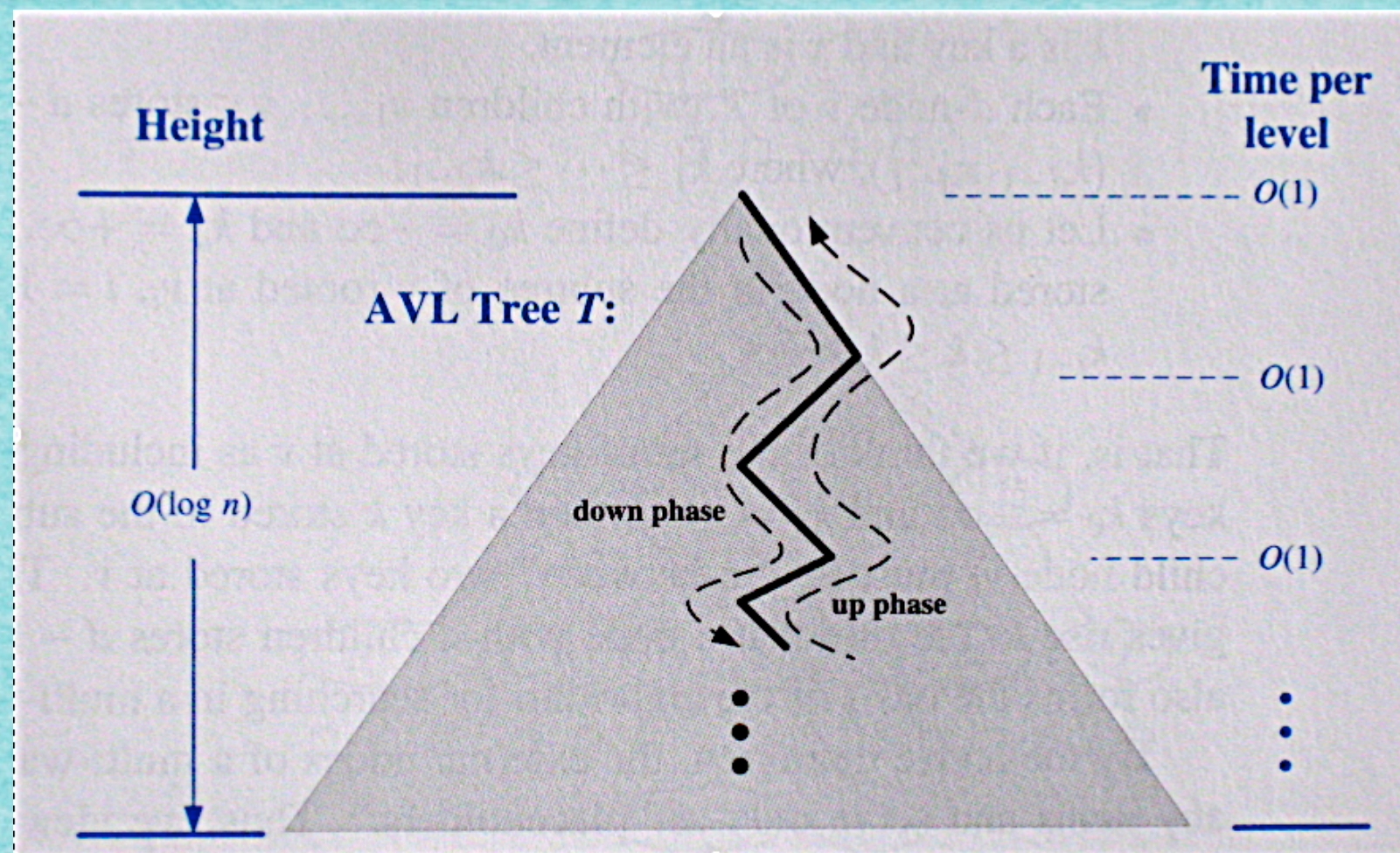


Das reicht in diesem Beispiel!

Allerdings kann im allgemeinen ein neues Problem auftauchen: Der neu höhenbalancierte Teilbaum von b kann niedriger sein als der vorher von z. Dadurch wird eventuell der Vater von z unbalanciert!

Wieder:

- Verwende *RESTRUCTURE!*
- Ggf. immer wieder...



Höchstens $O(\log n)$ RESTRUCTURE-Operationen, jeweils in $O(1)$!

Satz 4.11

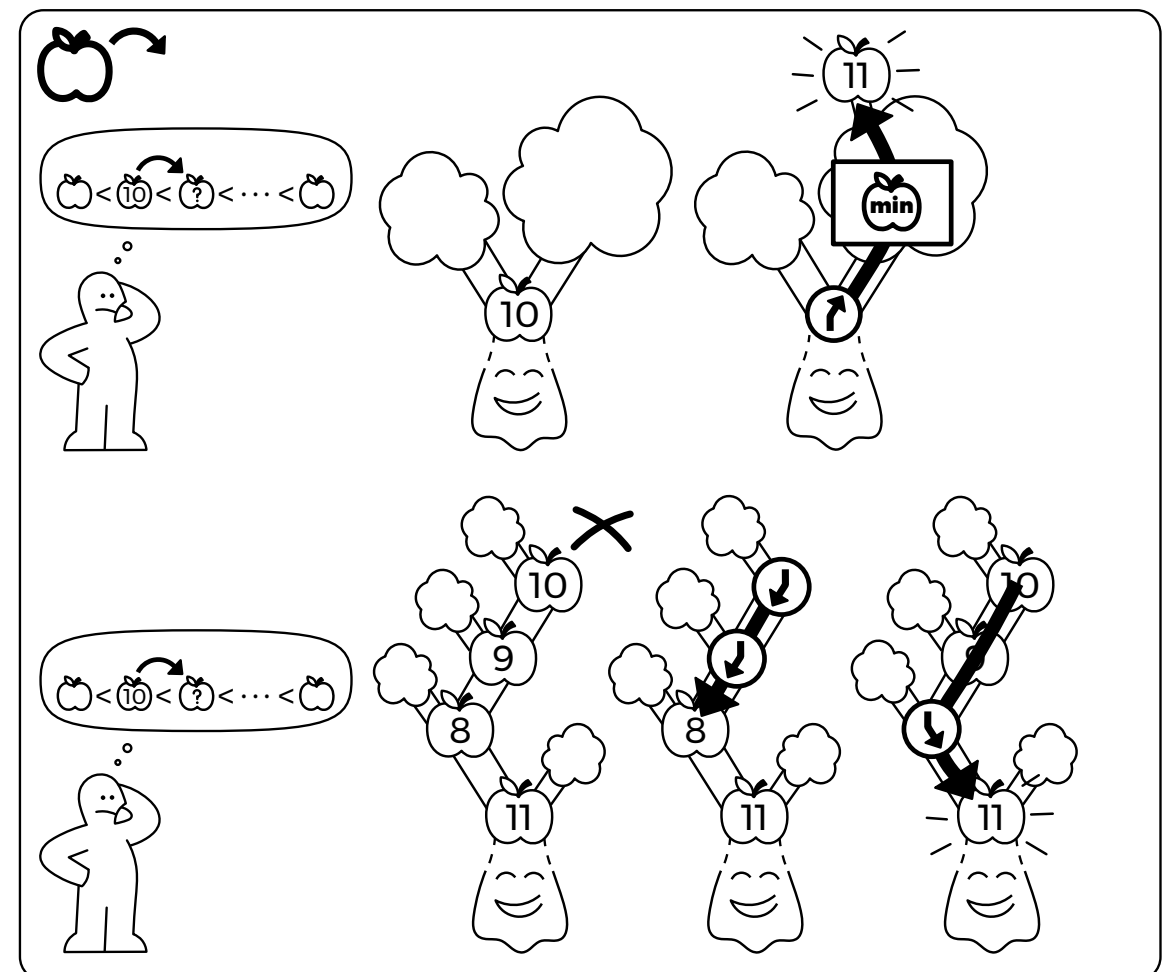
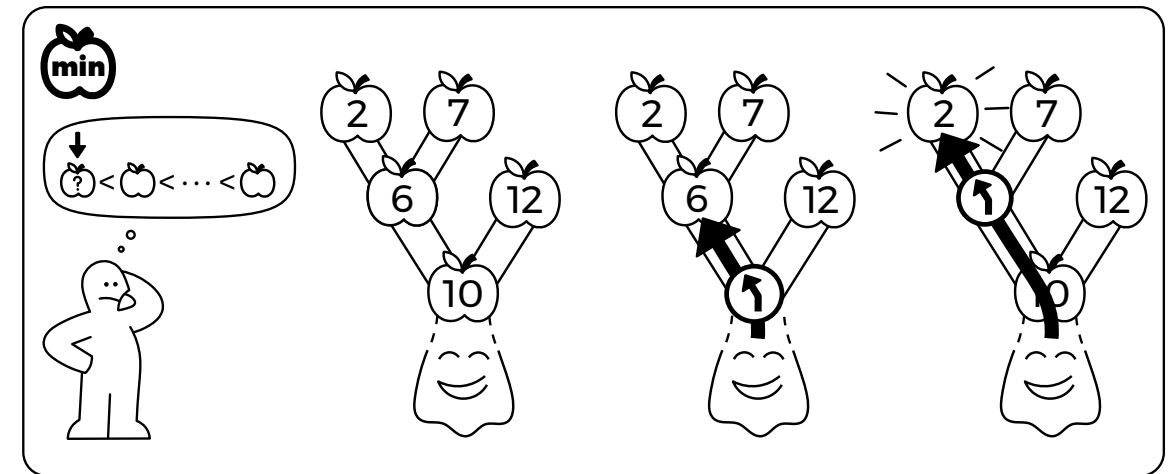
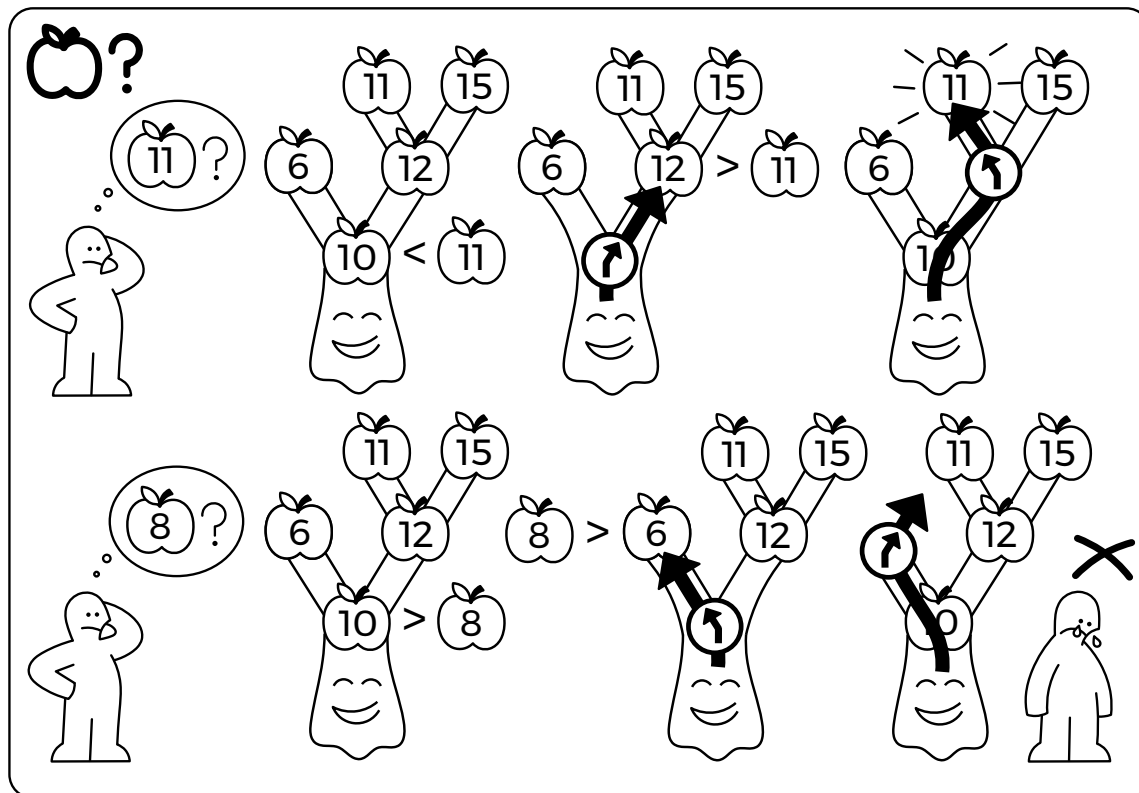
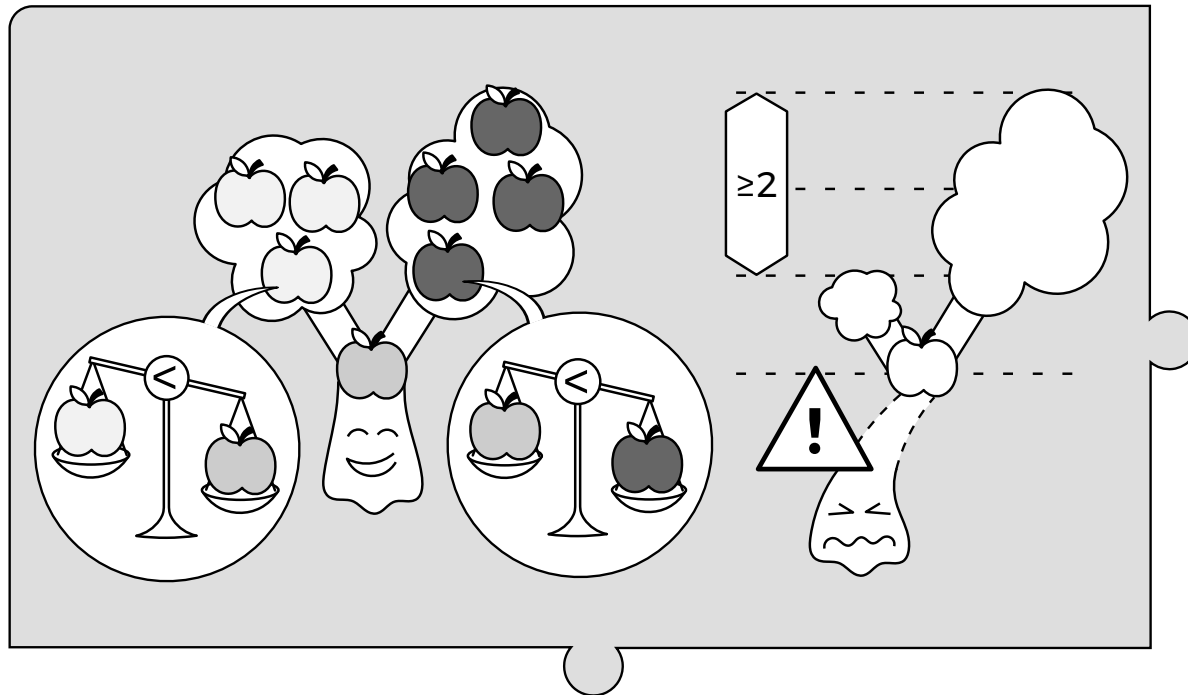
*Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Lösch-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist $O(\log n)$.*

BÄLÄNCE TREE

1/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA

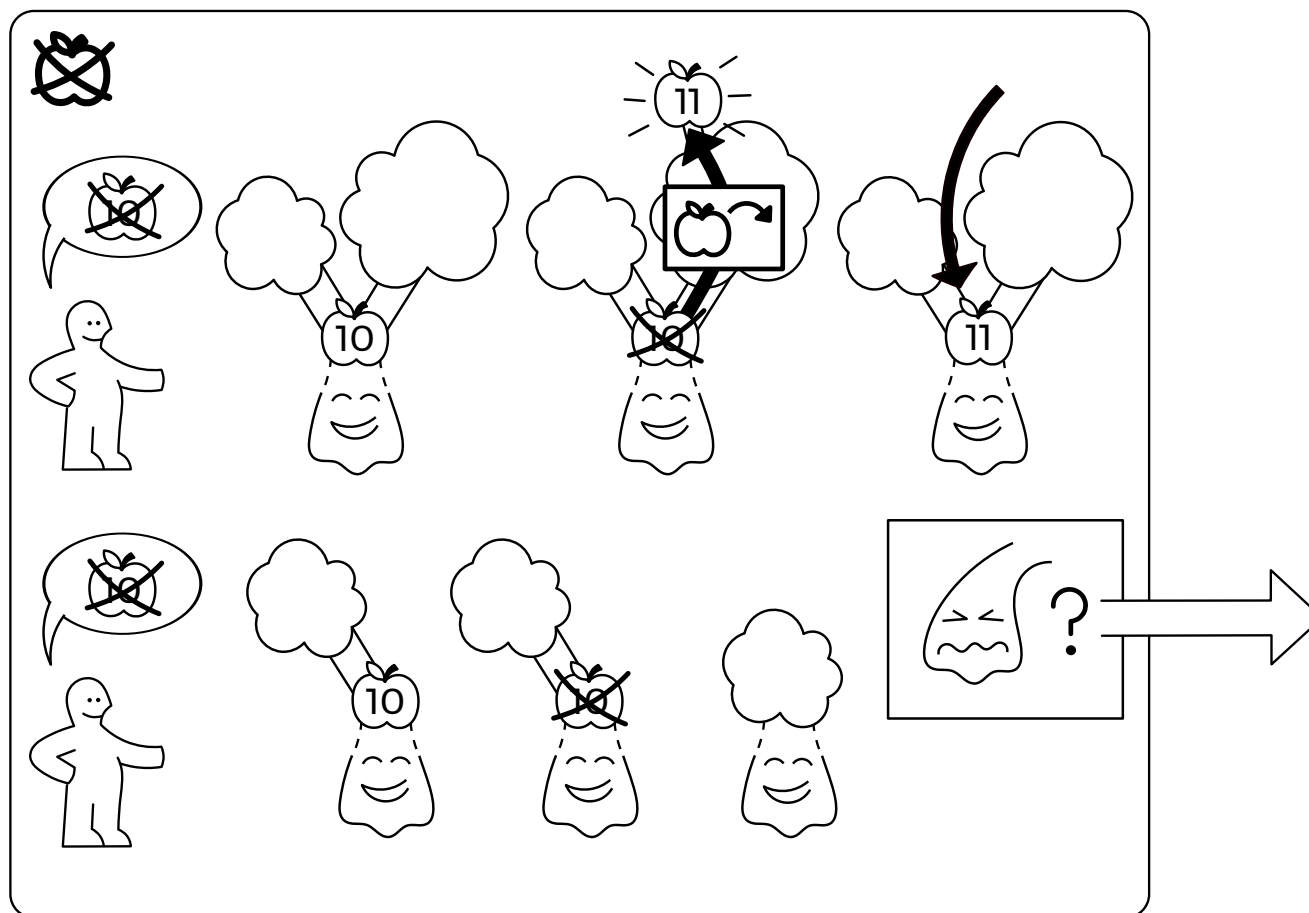
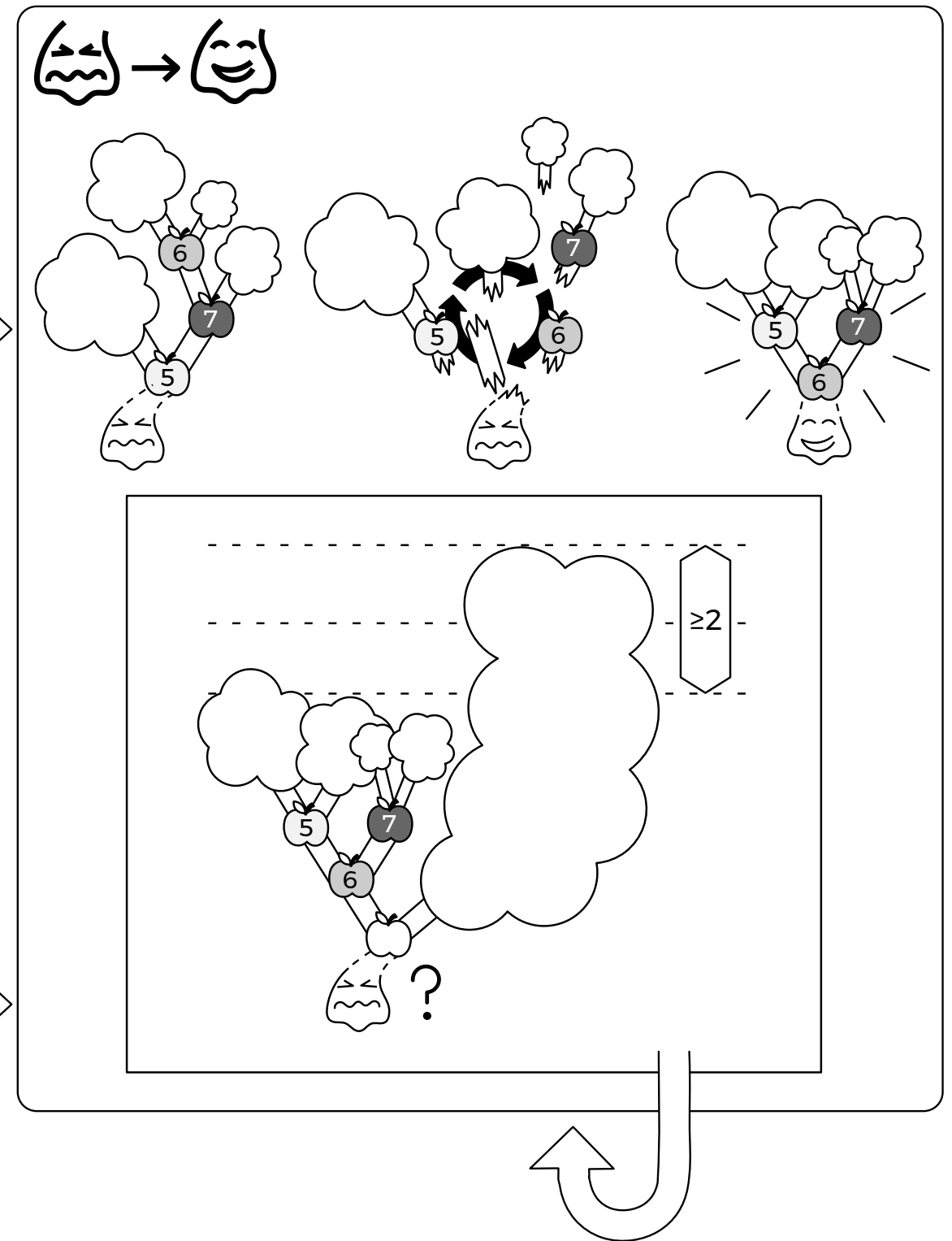
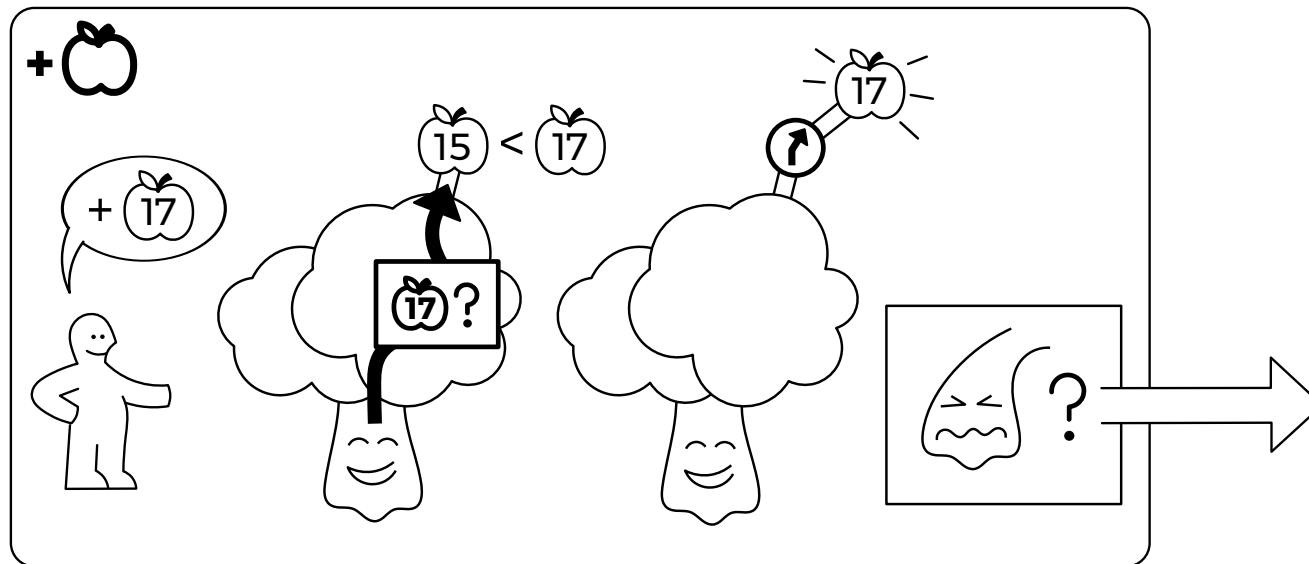


BÄLÄNCE TREE

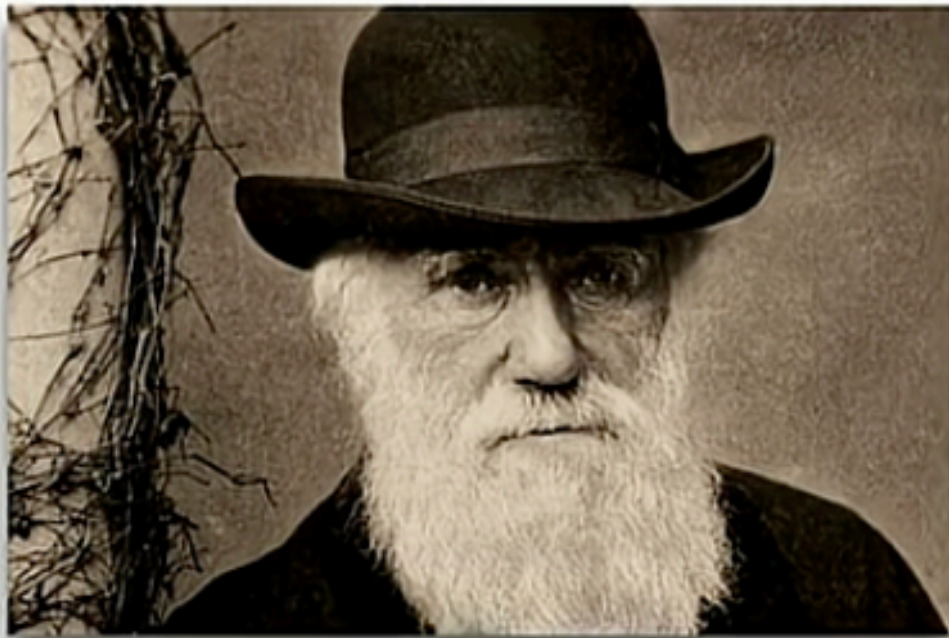
2/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA



1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, ...



May 1861
Charles Darwin to Asa Gray

If you wish to save me from a miserable death, do tell me why the angles of $1/2$, $1/3$, $2/5$, $3/8$, ..., series occur, and no other angles.

It is enough to drive the quietest man mad.

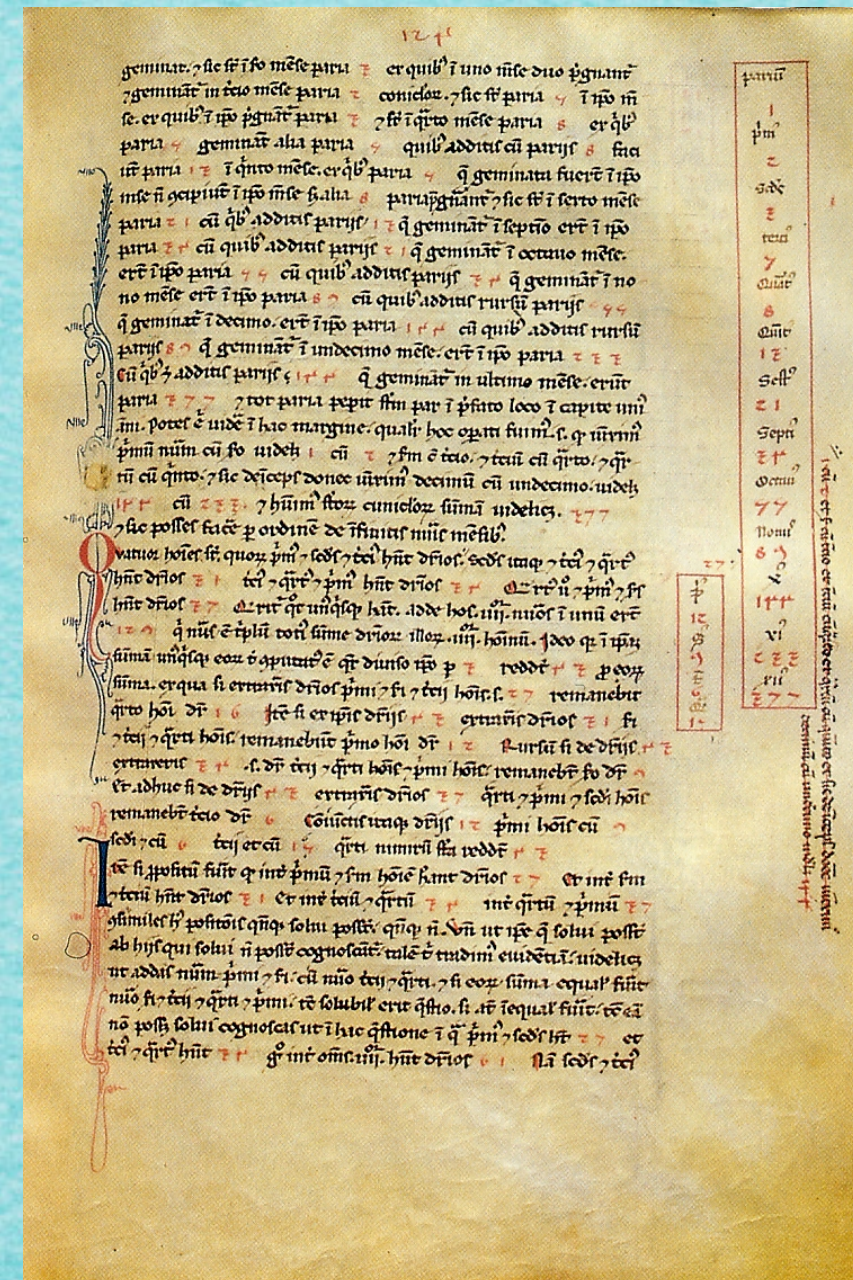
Did you and some mathematician publish some paper on the subject?

typical numbers found: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89

4.7 Fibonacci-Zahlen



Leonardo da Pisa, gen. Fibonacci 1180-1241



Fibonacci-Zahlen



$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

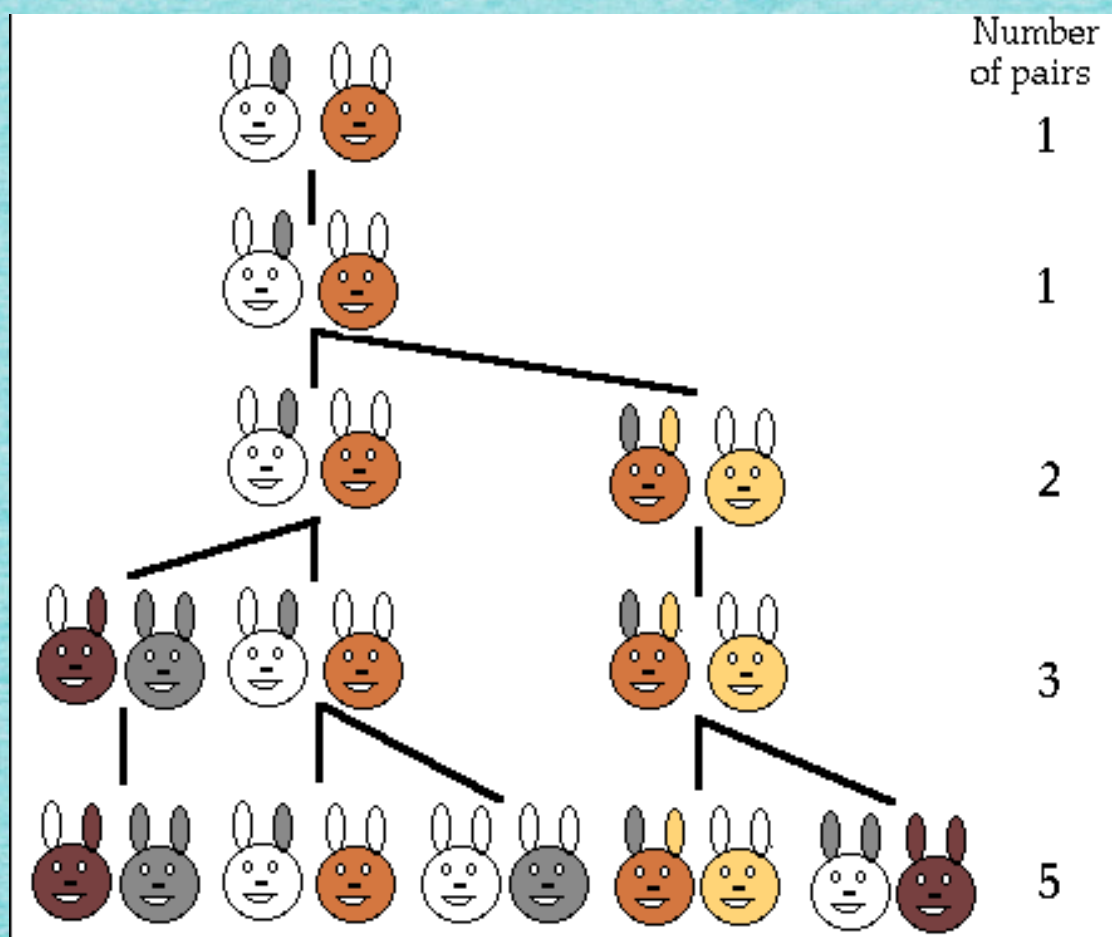
Fibonacci-Zahlen



$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

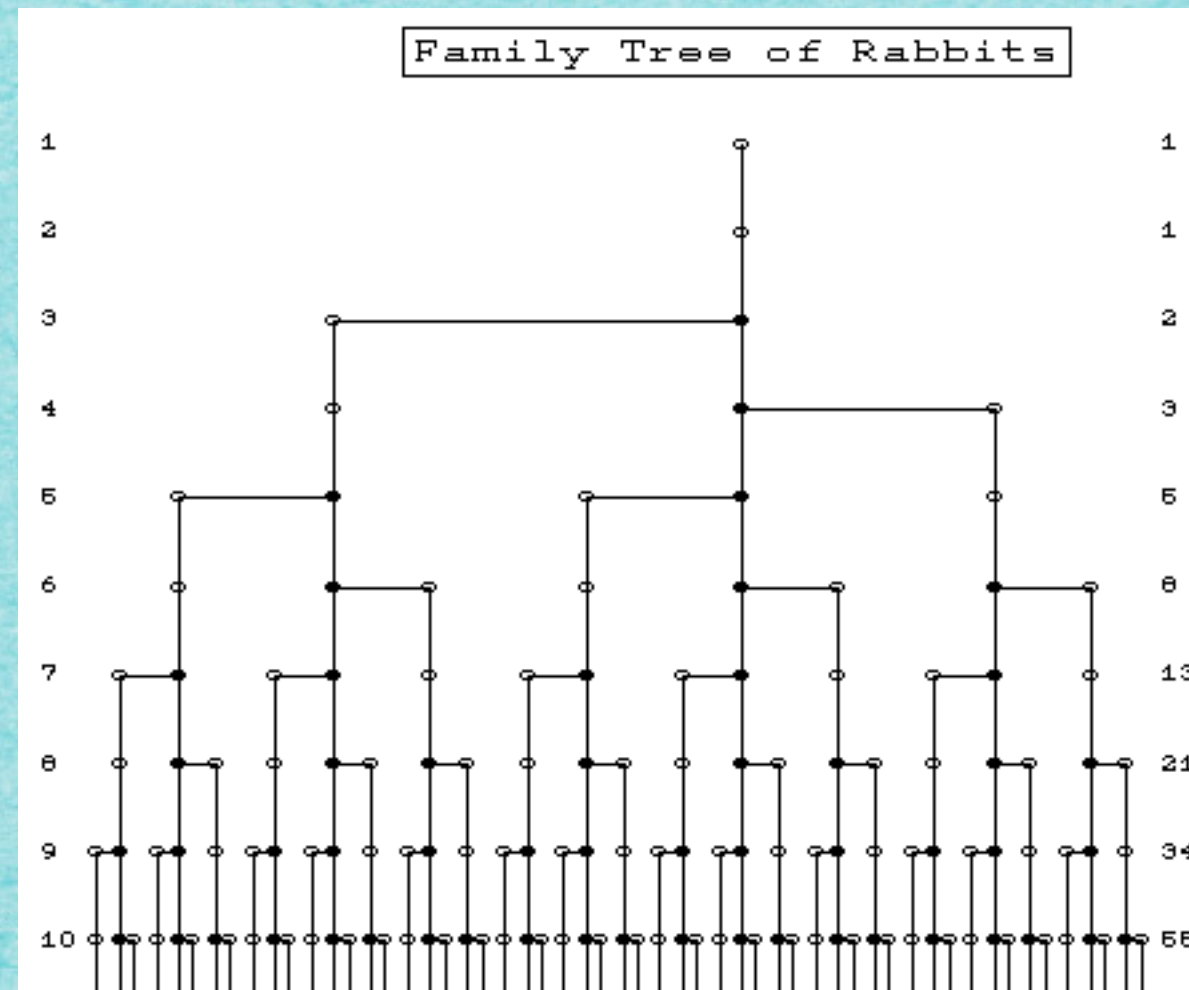


Fibonacci-Zahlen



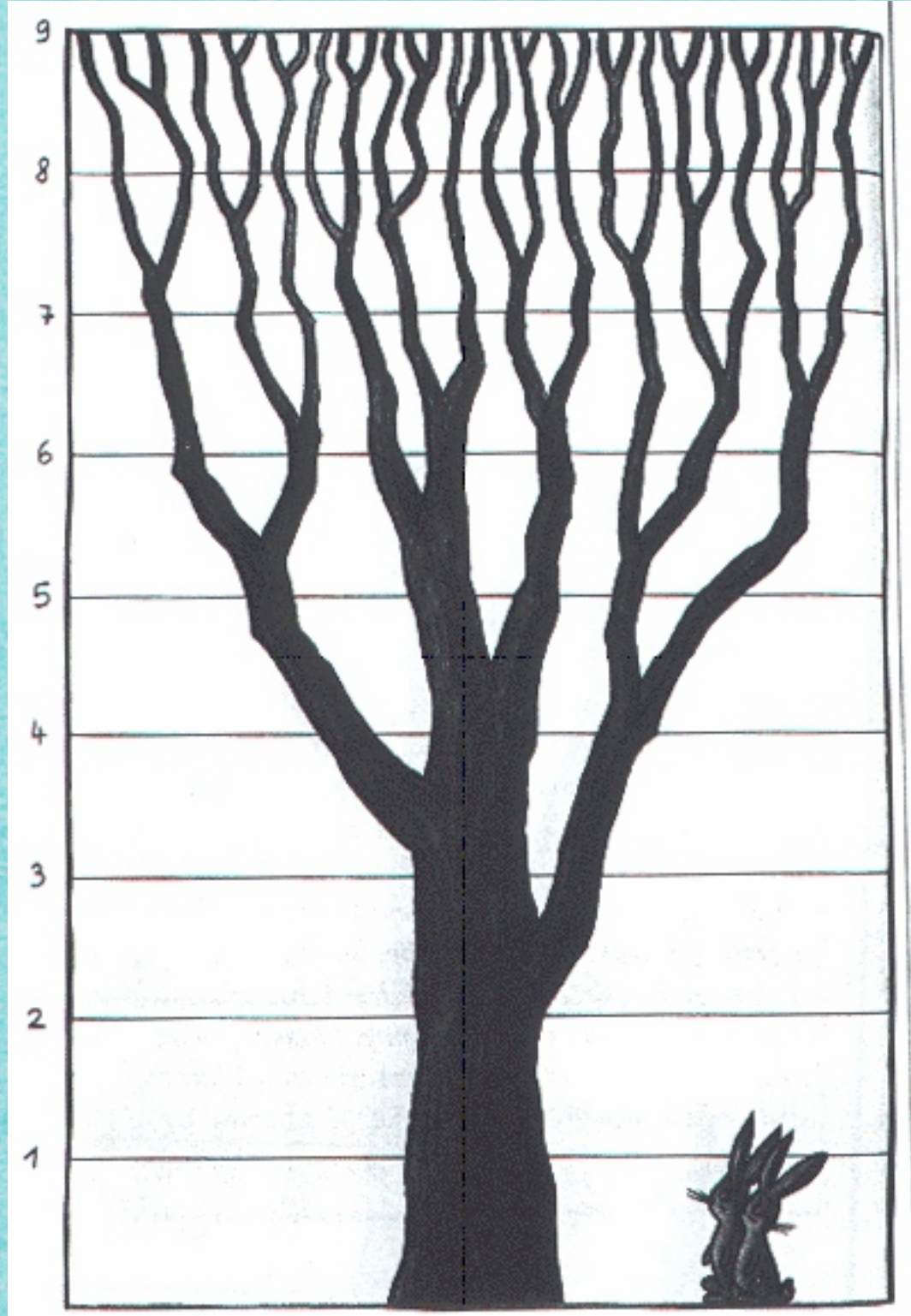
$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen

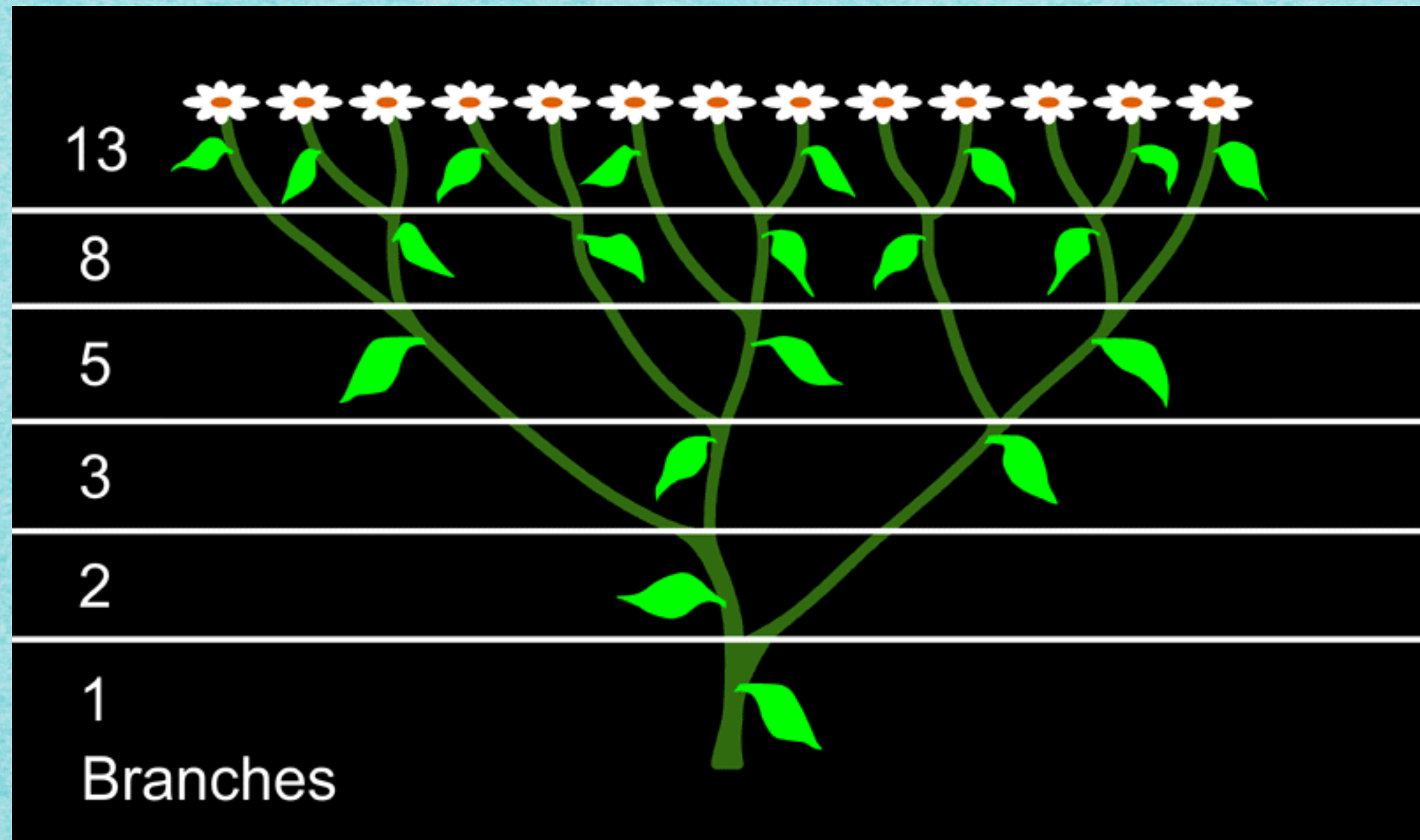


$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

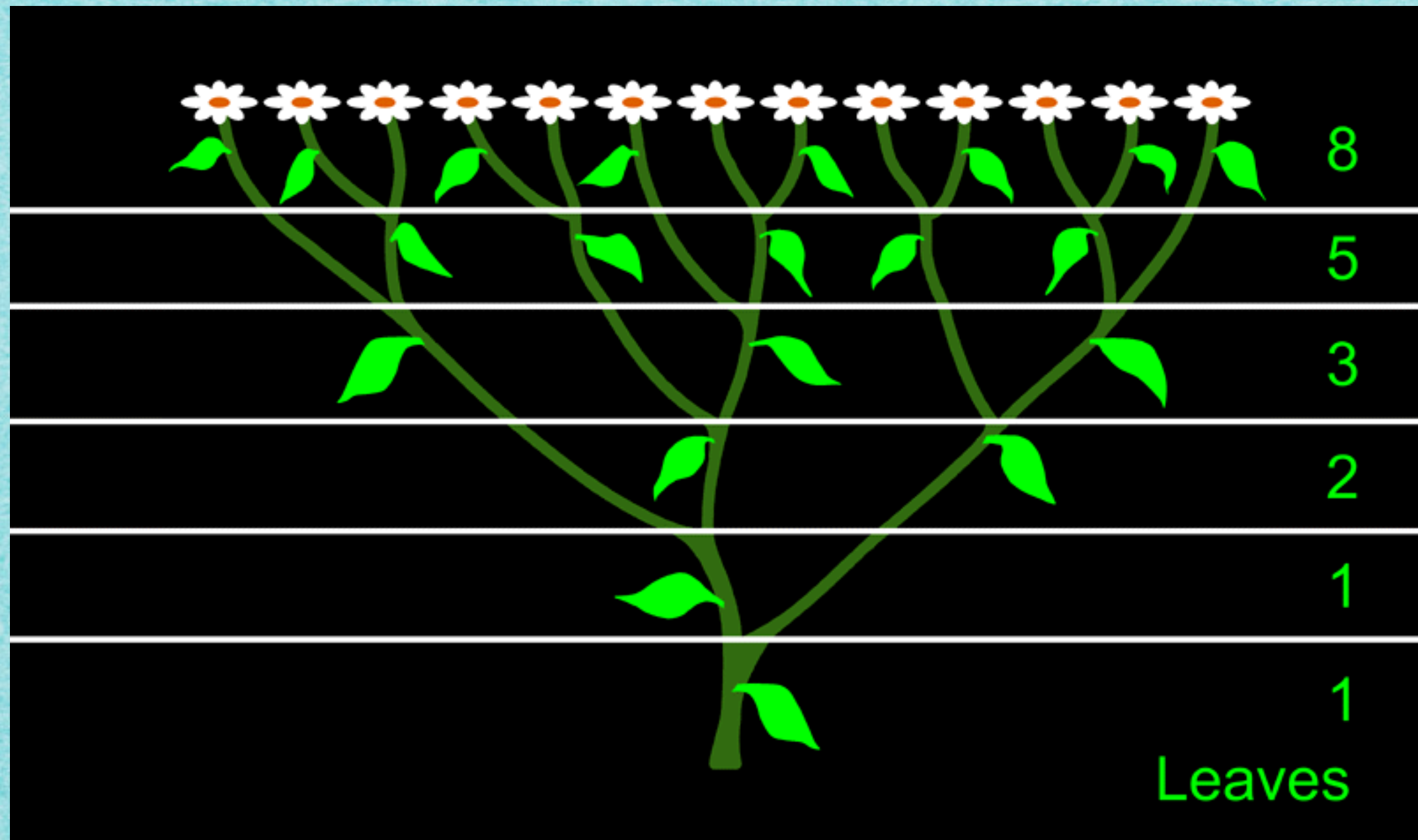
Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

1



Fibonacci-Zahlen

2



Fibonacci-Zahlen

3



Fibonacci-Zahlen

5



Fibonacci-Zahlen

8



Fibonacci-Zahlen

1 3



Fibonacci-Zahlen

2 1

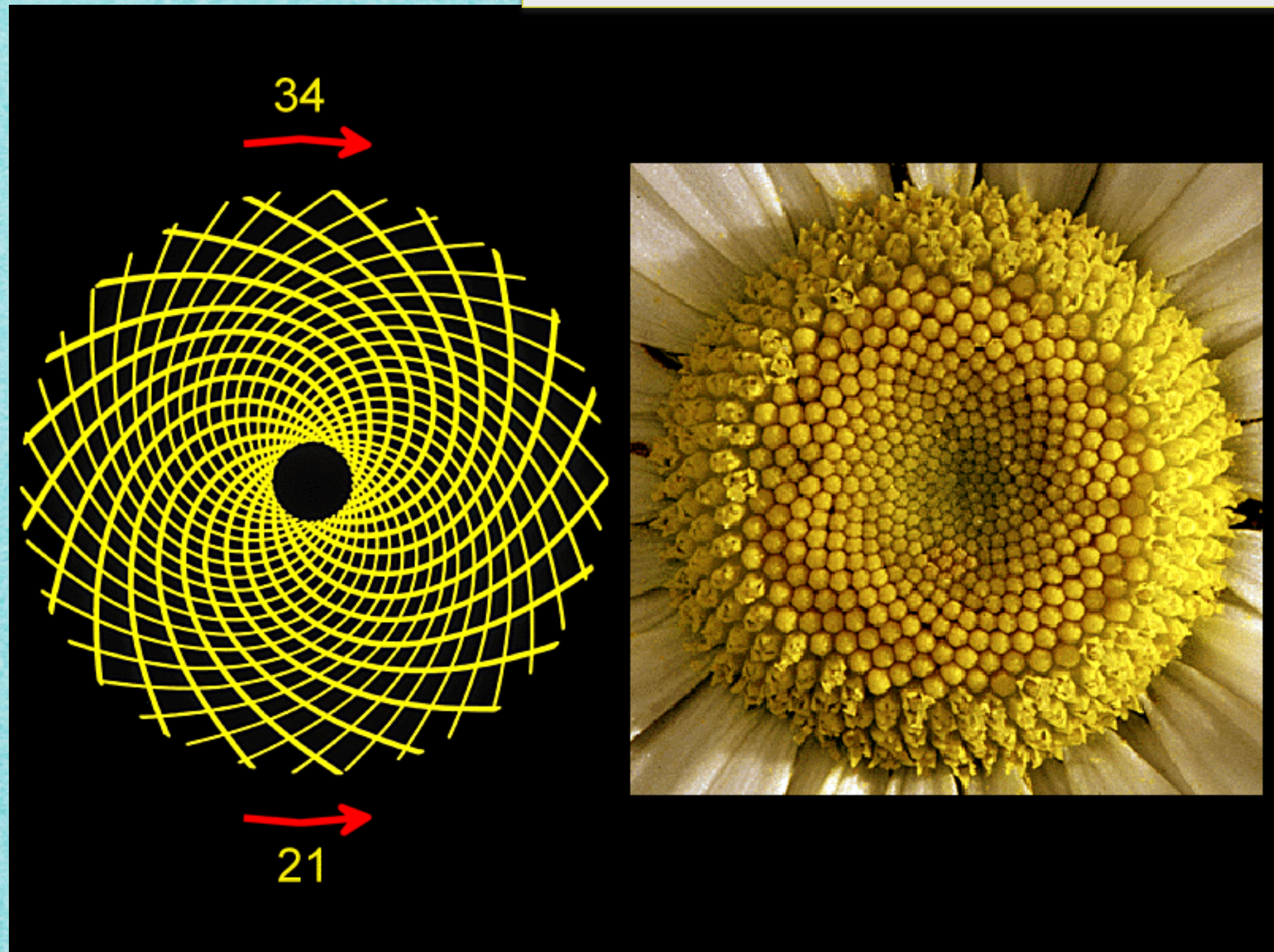


Fibonacci-Zahlen

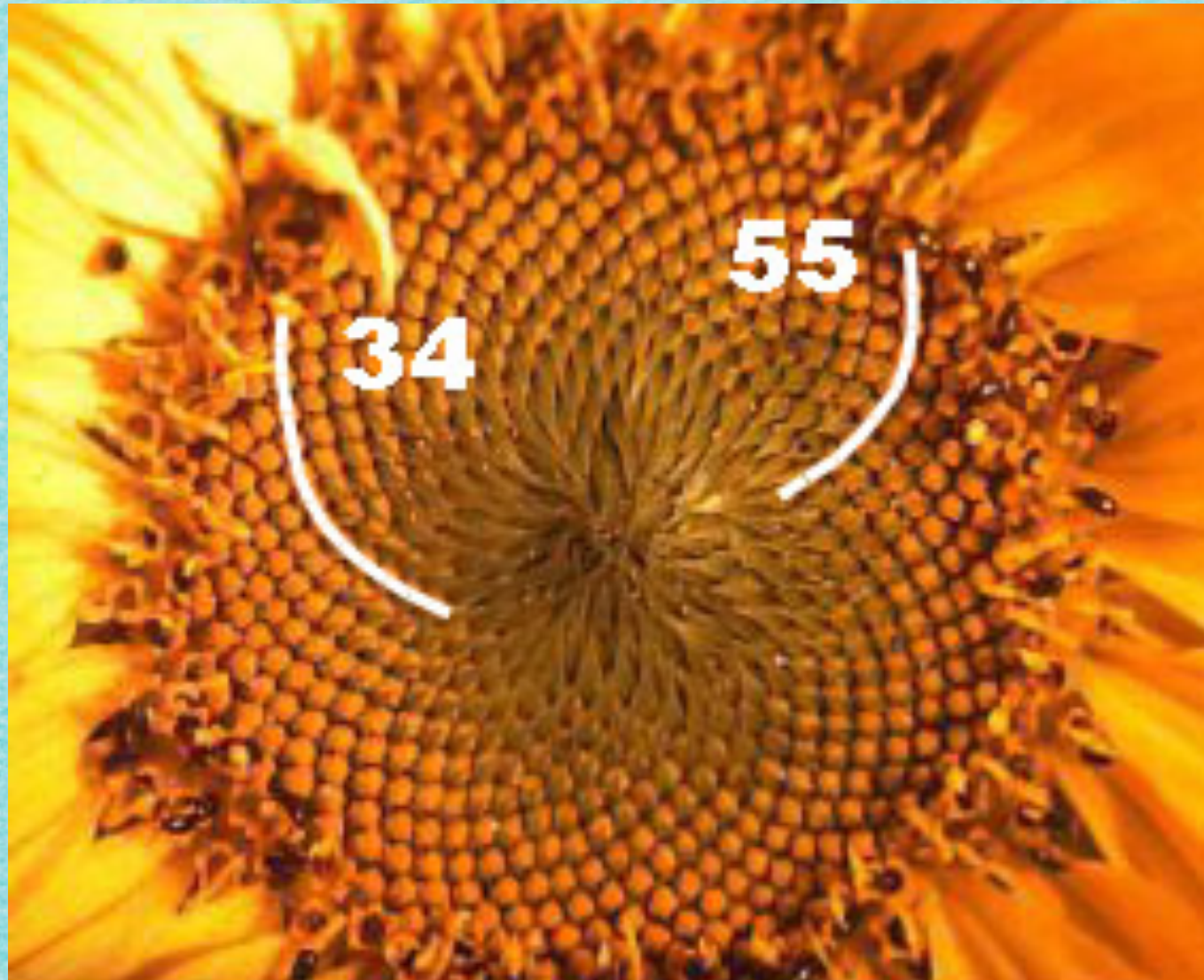
3 4



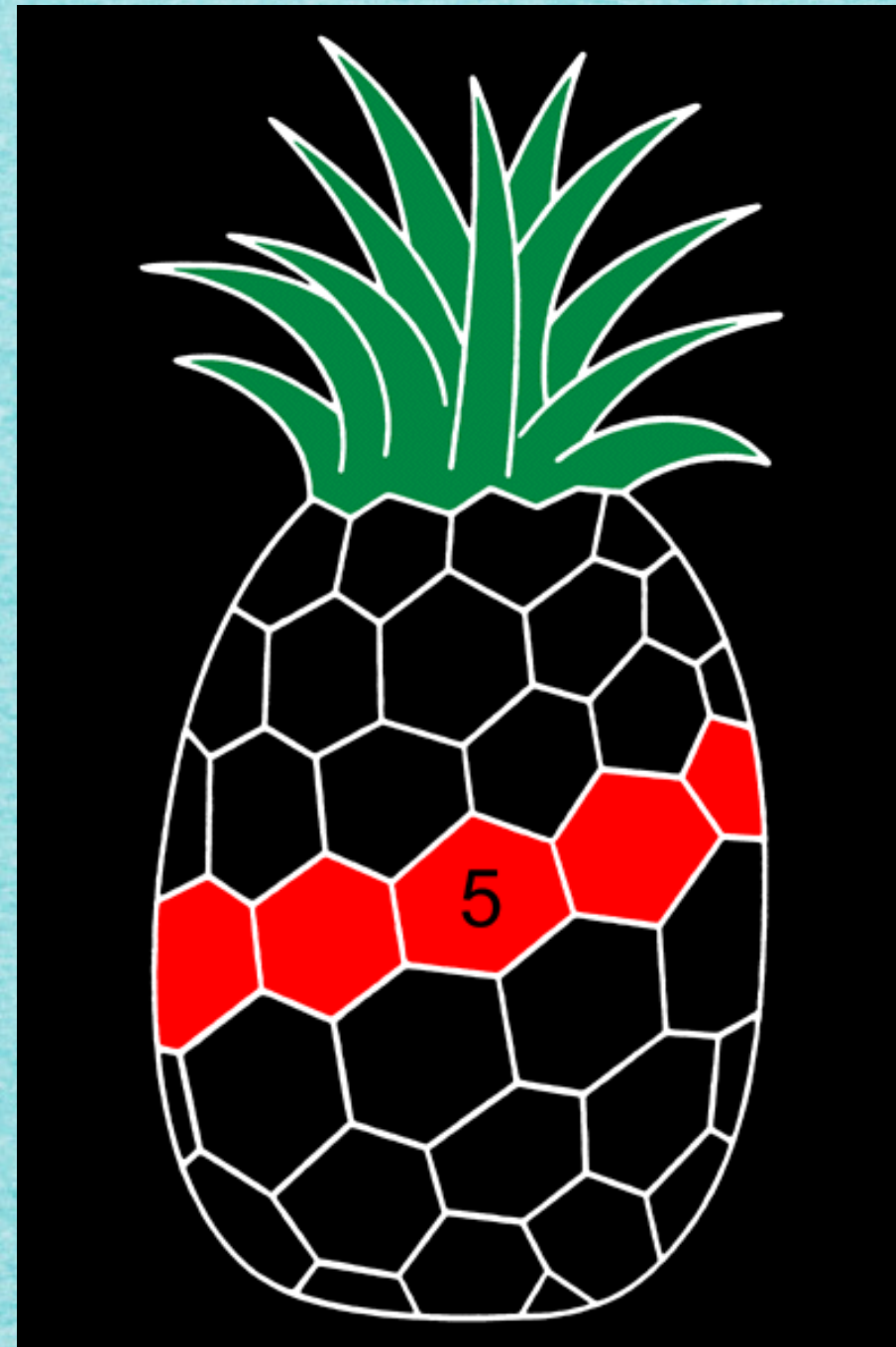
Fibonacci-Zahlen



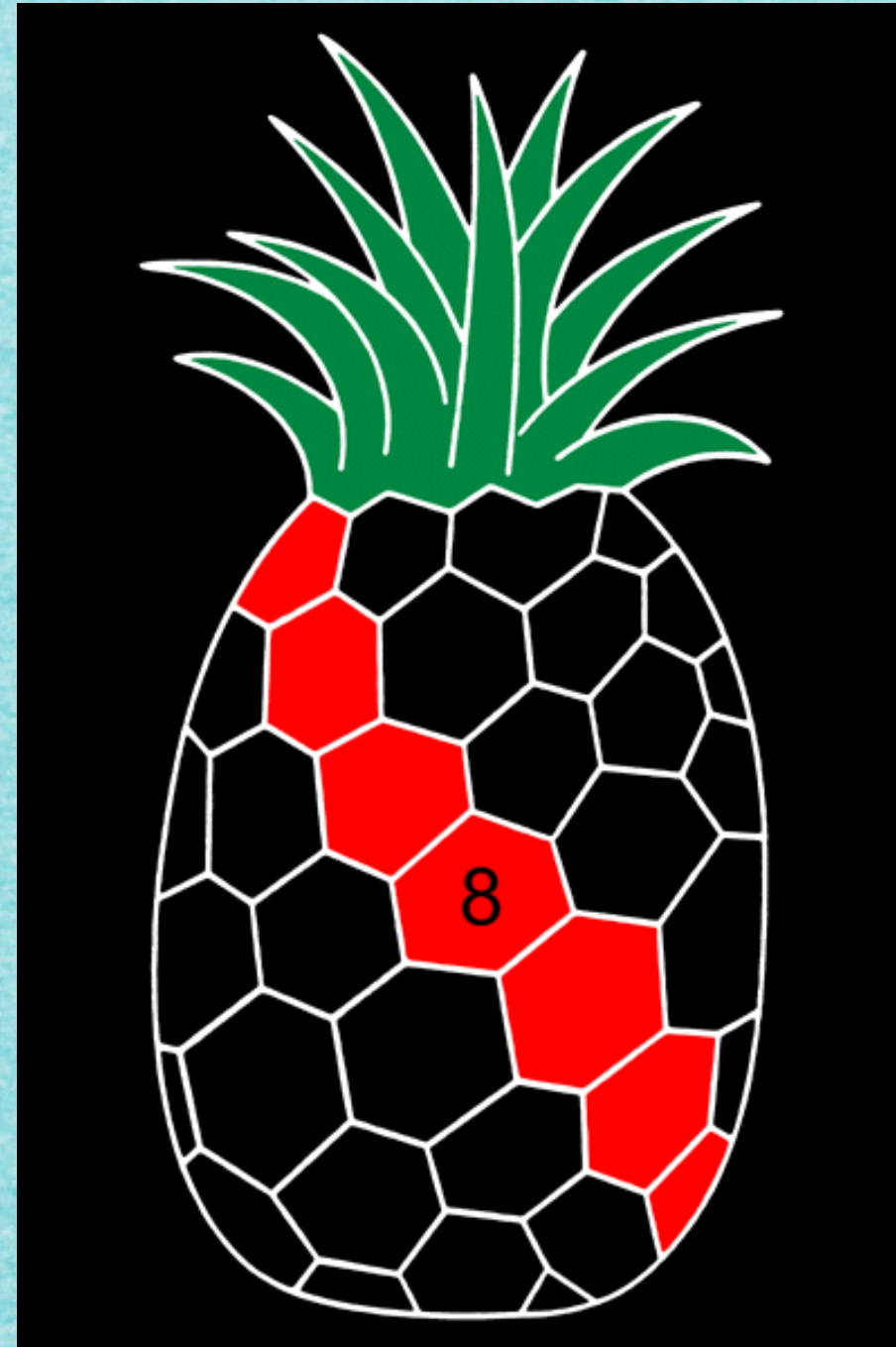
Fibonacci-Zahlen



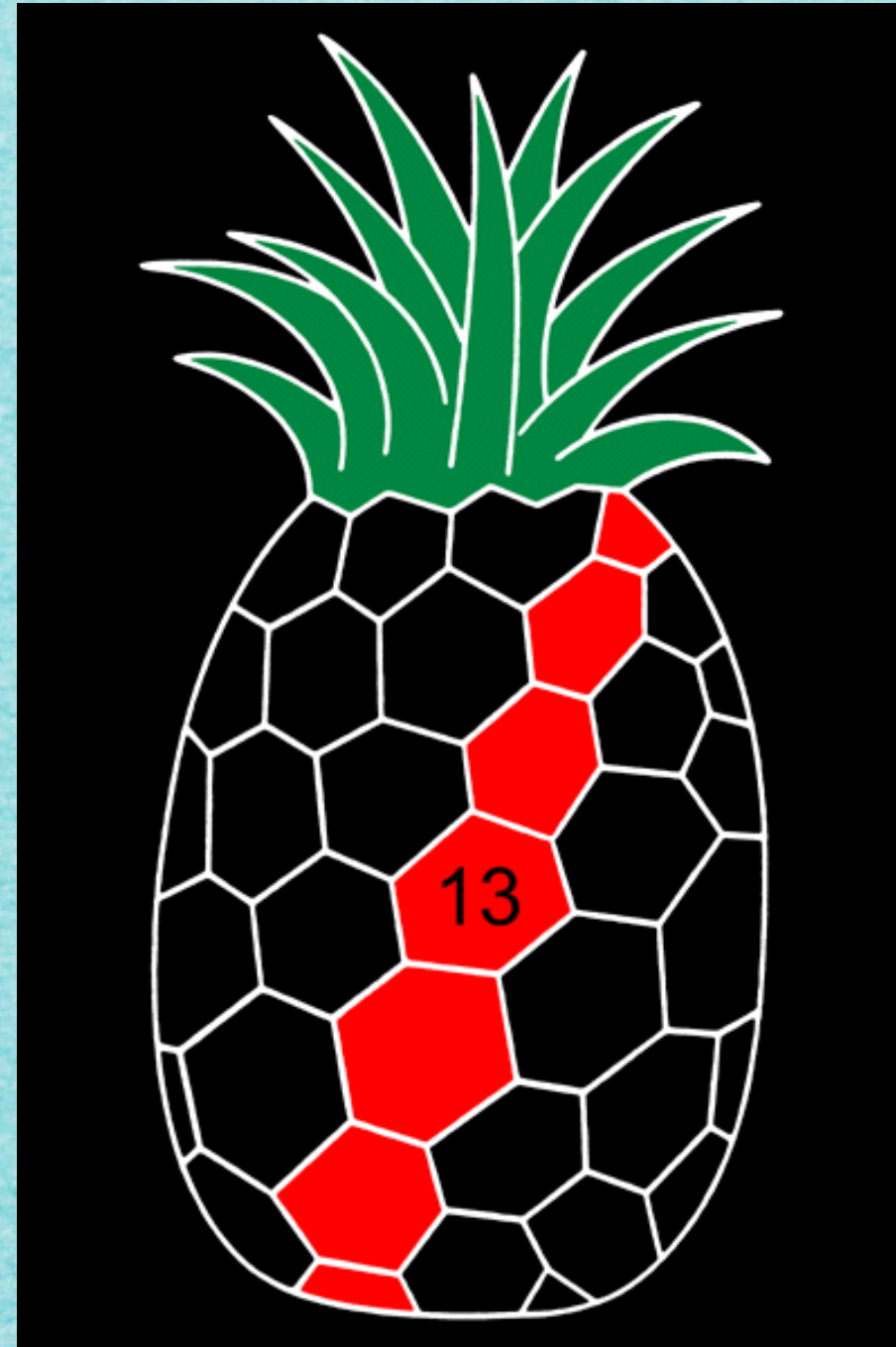
Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



$$3:2=1.500$$

$$5:3=1.666$$

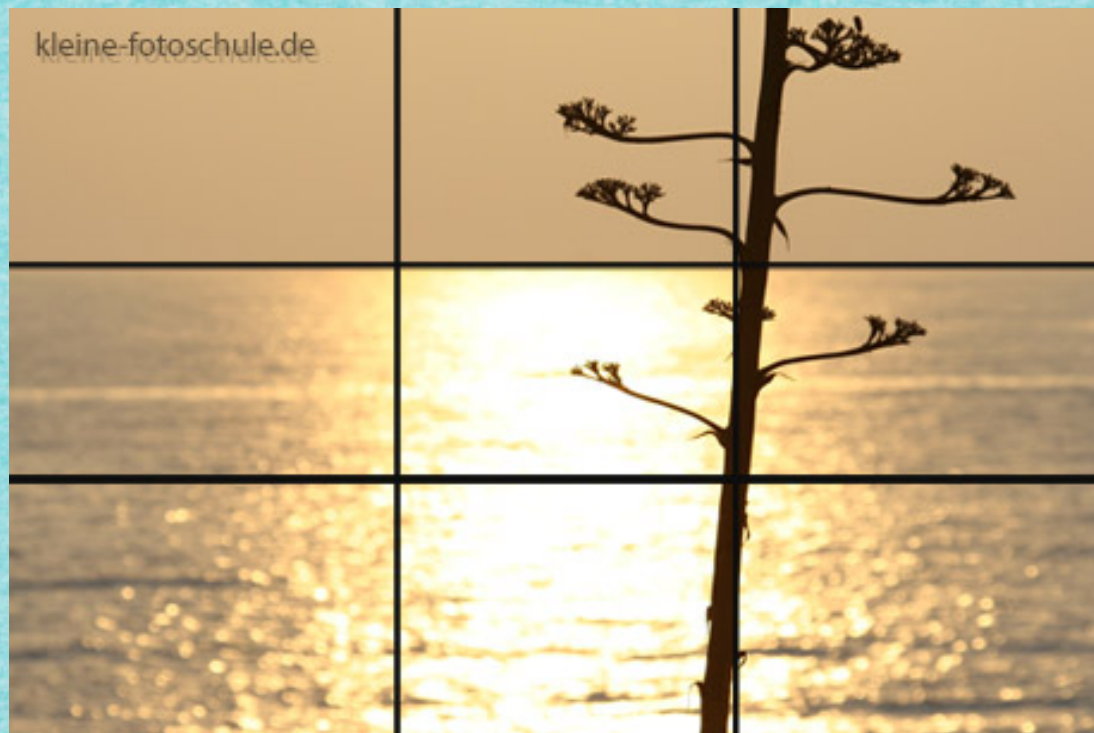
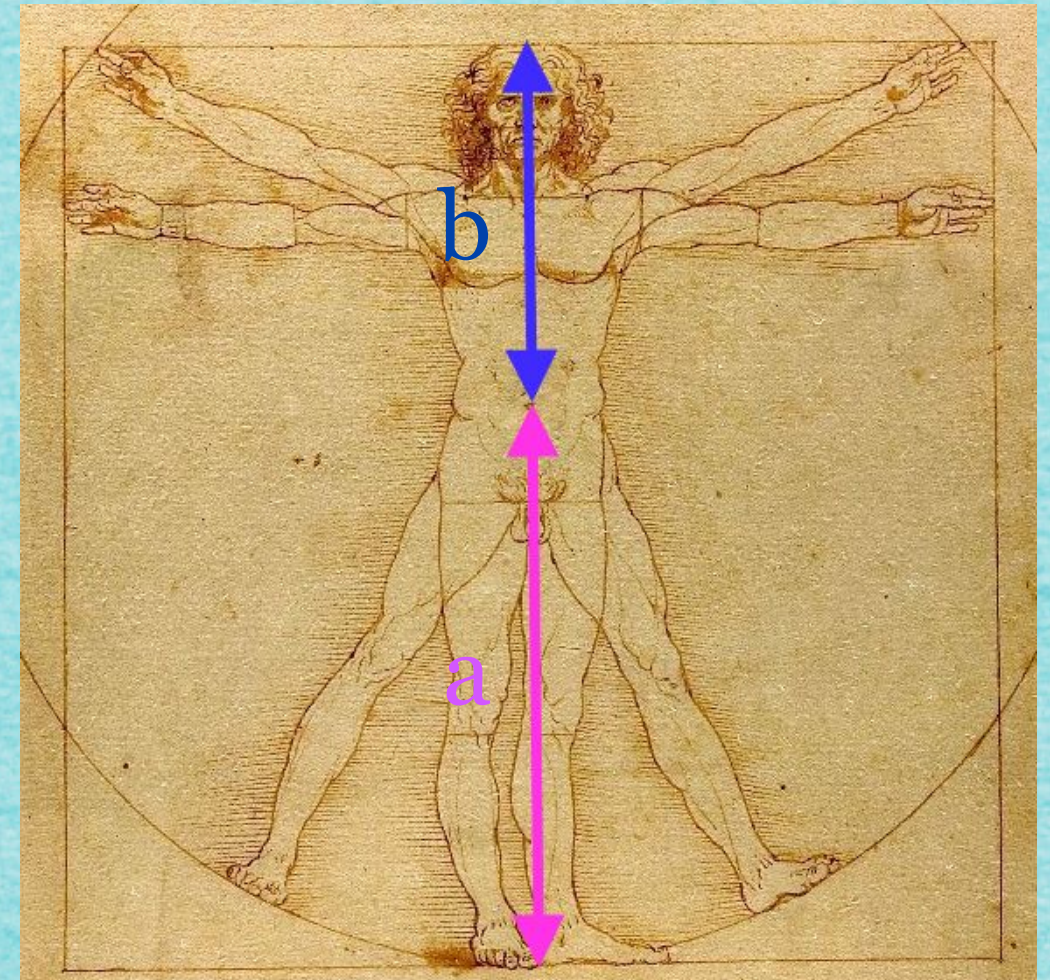
$$8:5=1.600$$

$$13:8=1.625$$

$$21:13=1.615$$

$$34:21=1.619$$

Fibonacci-Zahlen

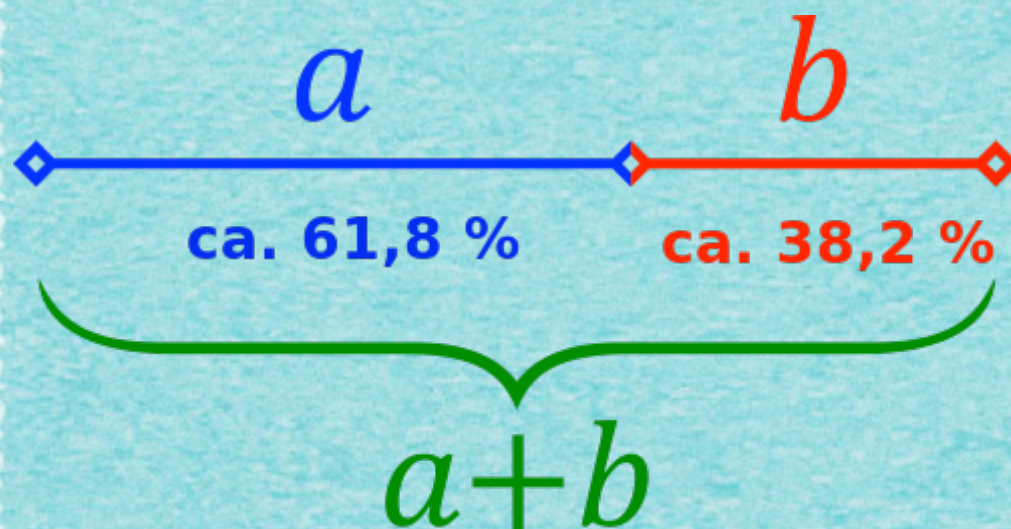


Goldener Schnitt:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Fibonacci-Zahlen

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$



Herleitung des Zahlenwertes [Bearbeiten]

Aus der oben angegebenen [Definition](#)

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

bzw.

$$\frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} = 0$$

folgt mit $\Phi = \frac{a}{b}$ und $\frac{1}{\Phi} = \frac{b}{a}$

$$\Phi - 1 - \frac{1}{\Phi} = 0.$$

Multiplikation mit Φ ergibt die [quadratische Gleichung](#)

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat genau die beiden Lösungen

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033$$

und

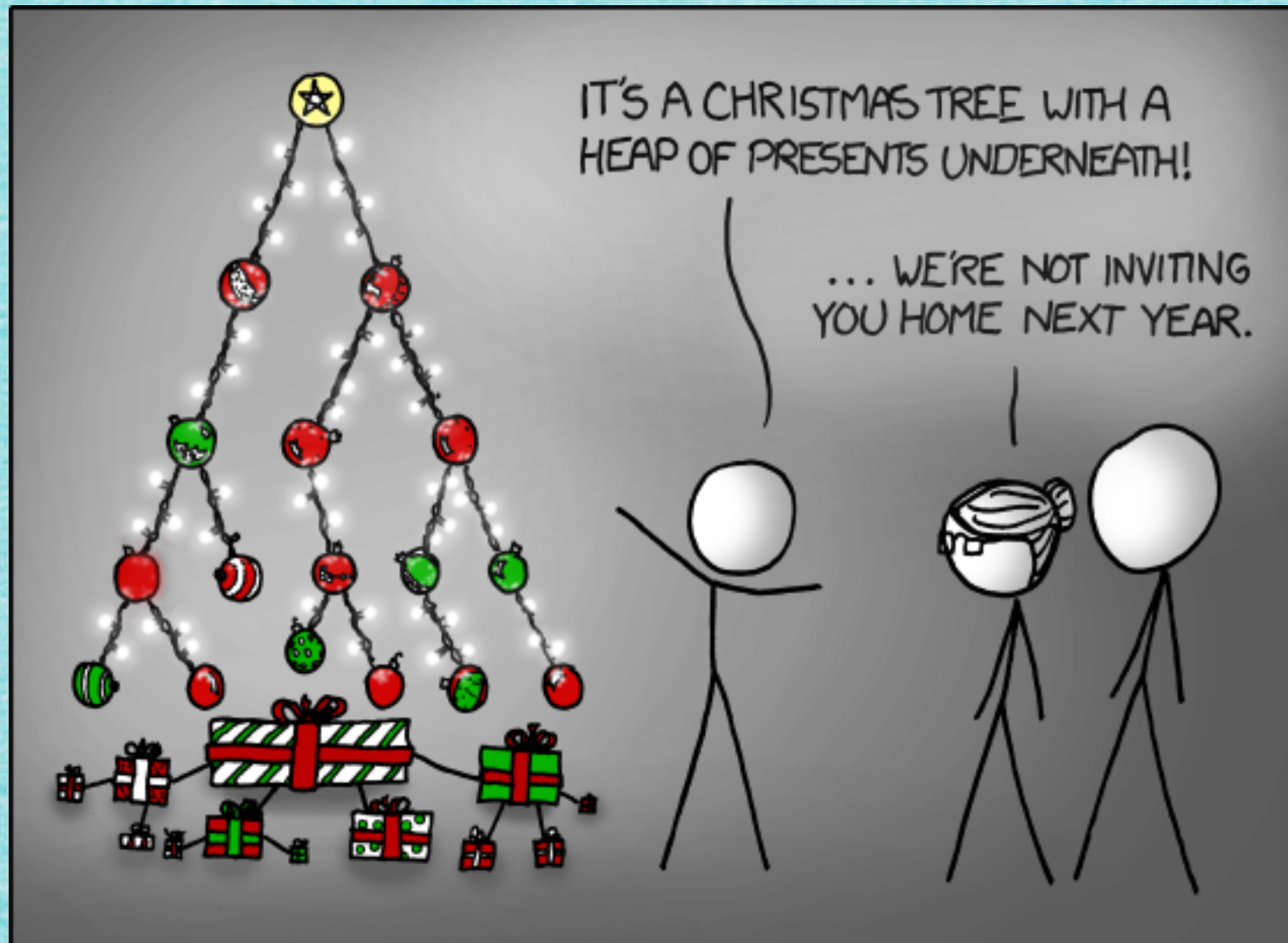
$$\bar{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = -\frac{1}{\Phi} \approx -0,618033.$$

Da $\bar{\Phi}$ negativ ist, ist Φ die gesuchte Goldene Zahl.

Aus diesen Betrachtungen folgt unmittelbar die interessante Beziehung:

$$\frac{1}{\Phi} + 1 = \Phi = \Phi^2 - 1$$

Zusammenfassung Kapitel 4!



Zusammenfassung Kapitel 4!

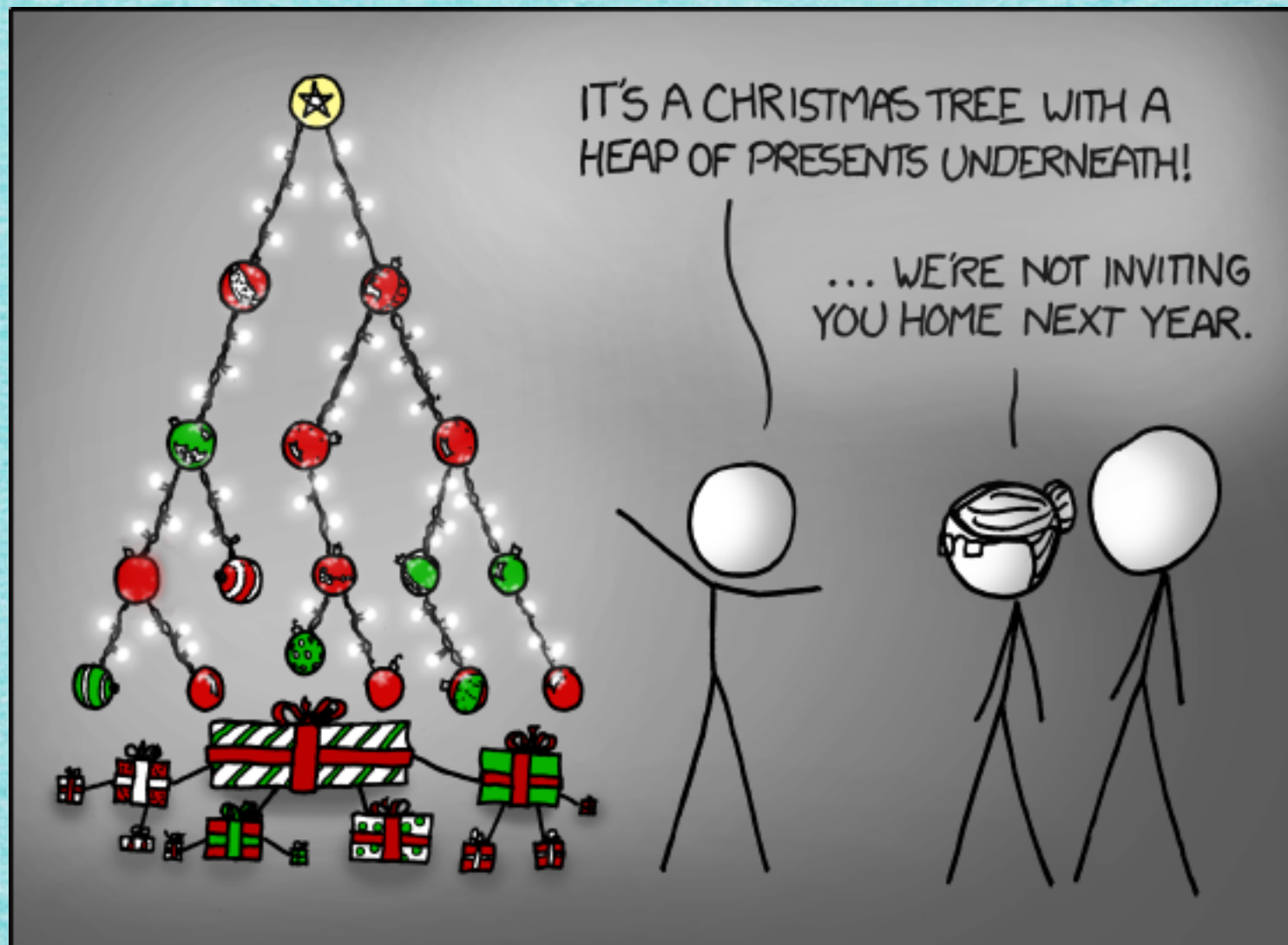


Zusammenfassung Kapitel 4!



NI KO **L** AUS

Zusammenfassung Kapitel 4!



Ende Kapitel 4!

s.fekete@tu-bs.de

Frohe Weihnachten!

