



Technische
Universität
Braunschweig



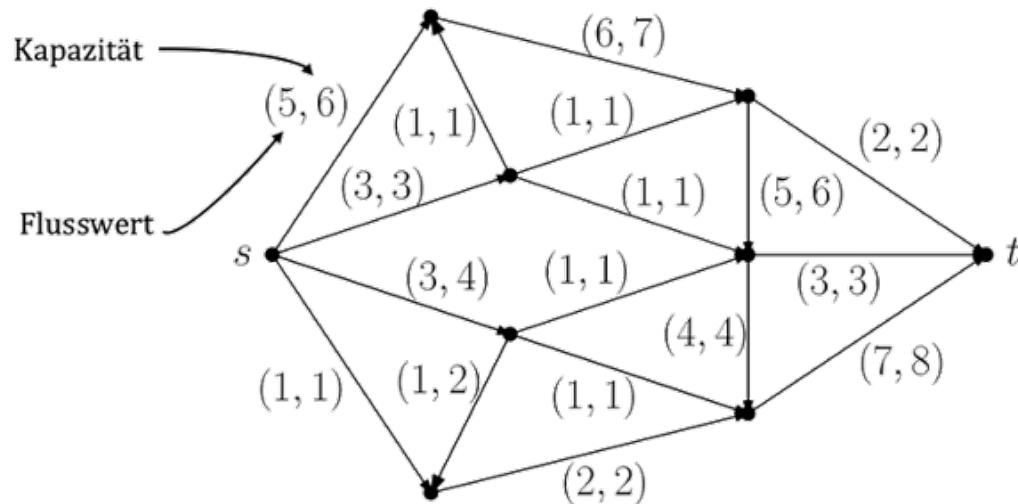
Mathematische Methoden der Algorithmik – Vorlesung #10

Arne Schmidt

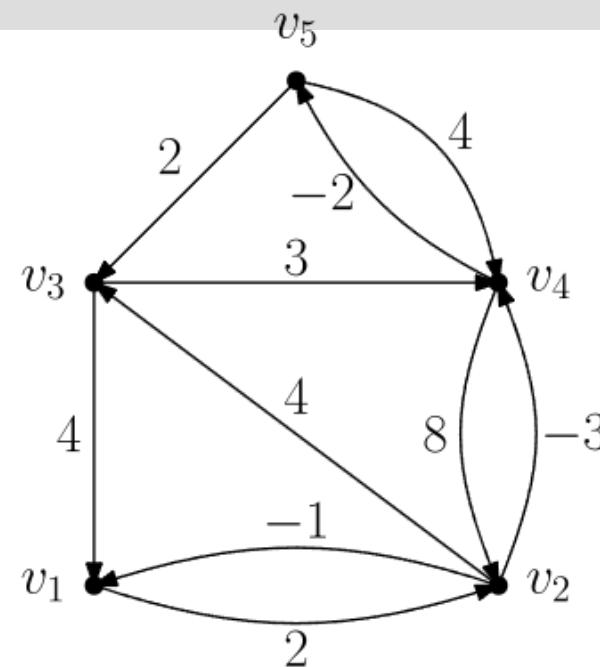
Letzte Woche



Letzte Woche - Graphenprobleme



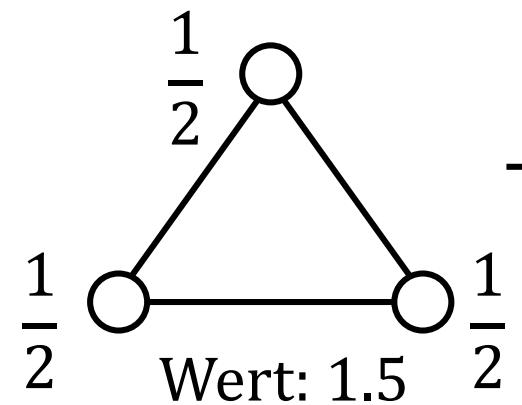
Maximum Flow -> Flow Constraints



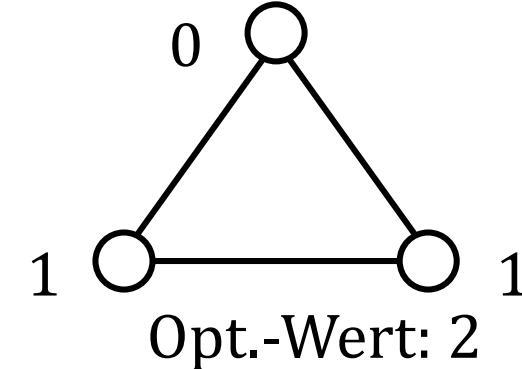
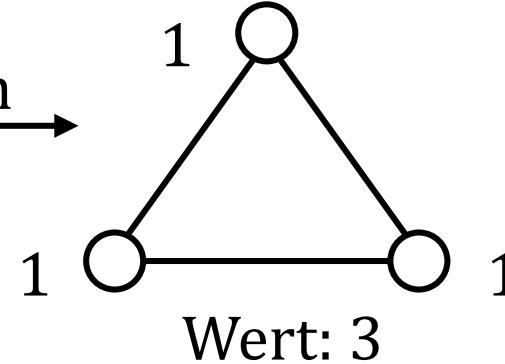
Shortest Path -> Integral LP

$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ v_2 & -1 & 0 & -3 & -3 & -5 \\ v_3 & 4 & 6 & 0 & 3 & 1 \\ v_4 & 4 & 6 & 0 & 0 & -2 \\ v_5 & 6 & 8 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Minimum Vertex Cover



runden



Graphenprobleme: Matchings



Aufgabenverteilung

Personen

Arne

Christian

Marlin

Tobias

Aufgaben

Putzen

Wäsche

Kochen

Einkaufen

Möchten sich einer Aufgabe zuweisen.

Möchten einer Person zugewiesen werden.



Matchings

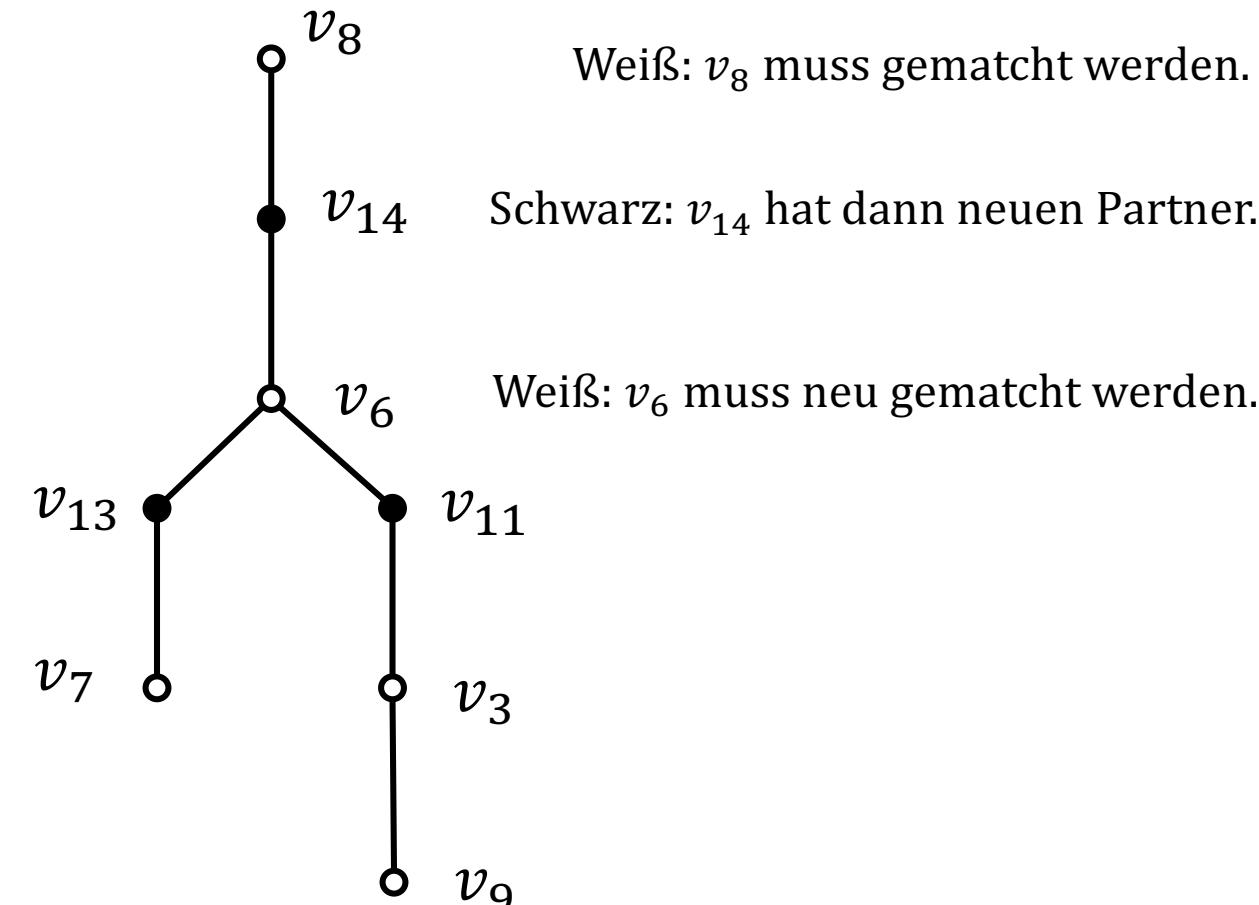
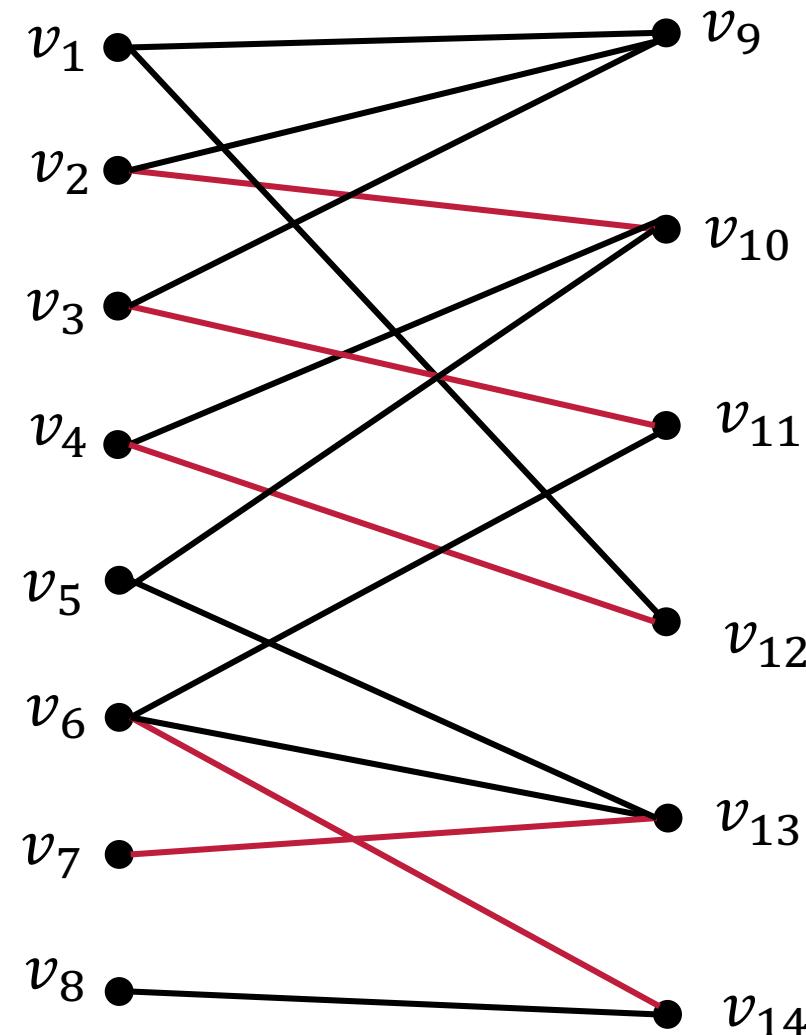
Definition (Matchings)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph

- (1) Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt **Matching**, wenn $e \cap f = \emptyset$ für je zwei Kanten $e, f \in M$ gilt.
- (2) Kanten in M heißen **unabhängig**.
- (3) Ein Matching M heißt **perfektes Matching**, wenn $2|M| = |V|$ gilt.
- (4) Ein Matching heißt **inklusionsmaximal** (engl. **maximal**), wenn $M \cup \{e\}$ für jede Kante $e \in E \setminus M$ kein Matching ist.
- (5) Ein Matching heißt **(kardinalitäts-)maximal** (engl. **maximum**), wenn kein Matching M' mit $|M| < |M'|$ existiert.



Algorithmus – Bipartite Graphen



Alternierender Baum

Weiß: v_8 muss gematcht werden.

Schwarz: v_{14} hat dann neuen Partner.

Weiß: v_6 muss neu gematcht werden.

Matching für bipartite Graphen

Algorithmus (Bipartite Matchings)

Eingabe:

Bipartiter Graph $G = (V, E)$

Ausgabe:

Maximales Matching M

```
1. Function BIPARTITEMATCHING( $G$ )
2.   Set  $M := \emptyset$ 
3.   for  $r \in V_1$  mit  $r$  ungematcht do
4.     Setze  $T := (\{r\}, \emptyset)$  und  $W(T) := \{r\}$ 
5.     While (es ex. Kante  $\{v, w\} \in E$  mit  $v \in W(T)$  und  $w \notin V(T)$ )
6.       If  $w$  ist ungematcht then
7.         Benutze  $w$ , um augmentierenden Pfad zu bilden.
8.         Augmentiere  $M$ 
9.         If es ex. Kein ungematchter Knoten mehr then
10.           Return perfektes Matching  $M$ 
11.         else
12.           Gehe zu Zeile 3.
13.         else
14.           Sei  $\{w, z\}$  Matchingkante an  $w$ .
15.           Füge  $w, z$  zu  $V(T)$  hinzu und  $z$  zu  $W(T)$ 
16.           Füge  $\{v, w\}, \{w, z\}$  zu  $E(T)$  hinzu.
17.   Return  $M$ 
```



Matching Polytop

$$\begin{aligned} & \max \sum_{e \in E} x_e \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1, \quad \forall v \in V \\ & x_e \geq 0, \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

Definition:

Das **Fraktionale Matching Polytop** (FMP) ist das durch das LP beschriebene Polytop (Lösungsraum).

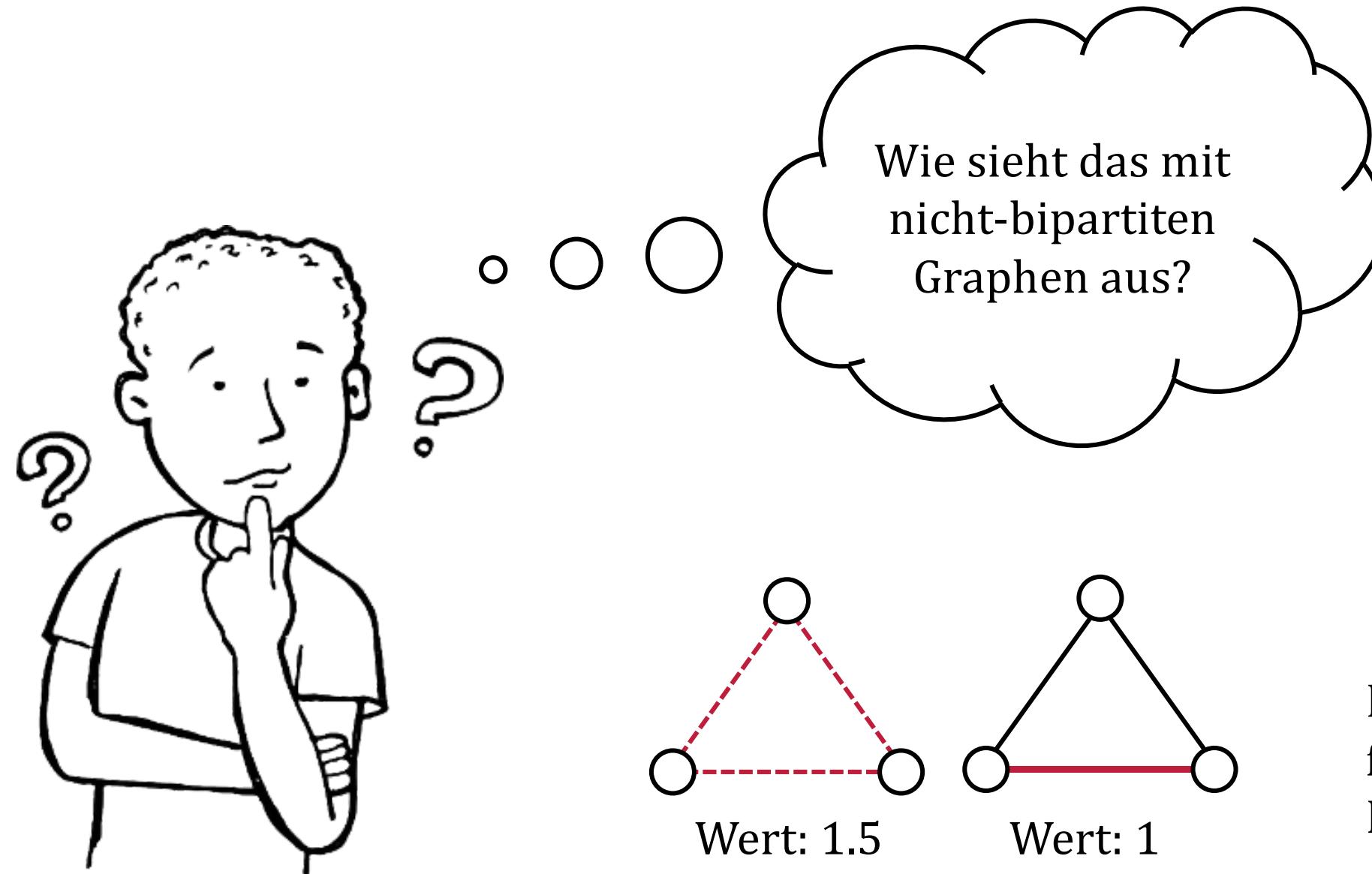
Sind die Variablen aus $\{0,1\}$, beschreibt die konvexe Hülle der ganzzahligen Lösungspunkte das **(Integrale) Matching Polytop** (MP).

$\delta(v)$ ist die Menge an Kanten inzident zu v .

Theorem: Das FMP für bipartite Graphen ist ganzzahlig.



Allgemeine Graphen



Es existieren
fraktionale
Basislösungen!

Allgemeine Graphen mit perfekten Matchings



Perfekte Matchings

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$

s. t.

$$\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} x_e = 1, \quad \forall v \in V$$

$$\sum_{e \in E(B, V \setminus B)} x_e \geq 1, \quad \forall B \in \text{odd}(V)$$

$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$$

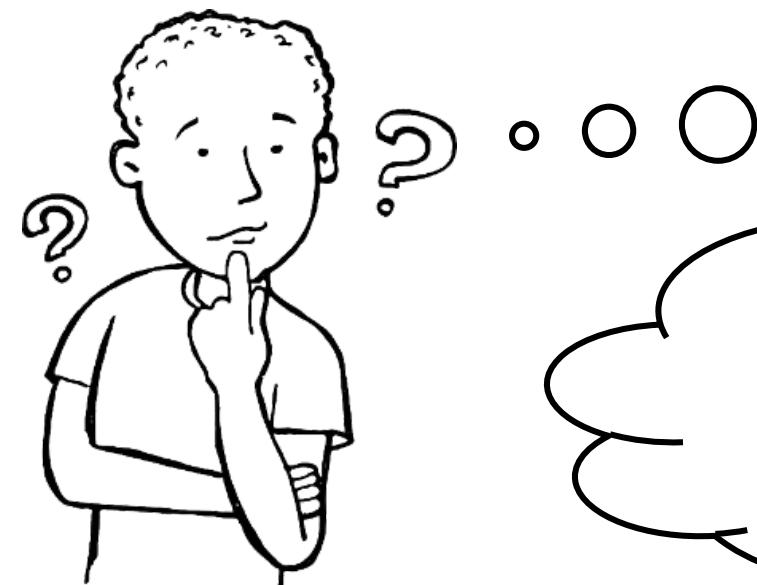
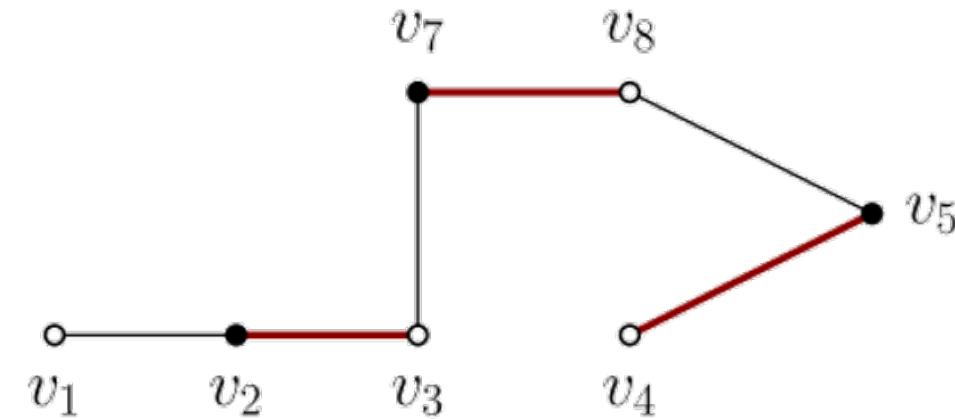
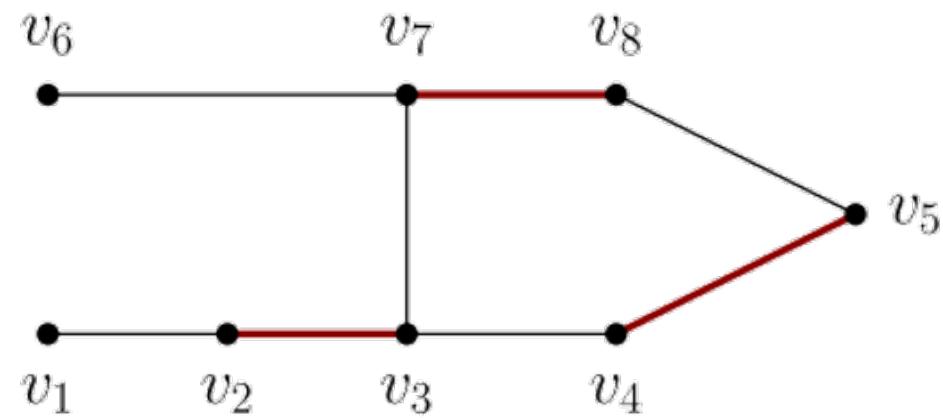
Jeder Knoten muss gematcht sein.

Aus ungeraden Mengen muss eine Kante herausführen.

Theorem: Das PMP (perfekte Matching Polytop) für beliebige Graphen ist ganzzahlig.



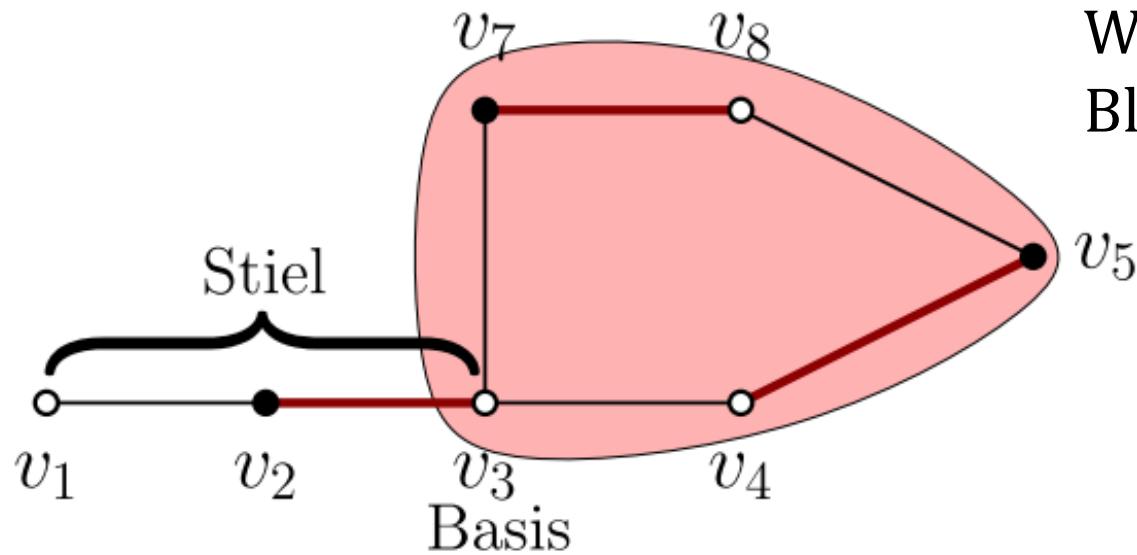
Problem: Ungerade Kreise



Wie vermeide ich Kreise
falsch herum abzulaufen?

Ungerader Kreis minus ein
Knoten lässt sich perfekt
matchen!

Shrink it!



Weg: $(v_1, v_2, v_3, v_7, v_8, v_5, v_4, v_3)$
Blüte: $(v_3, v_7, v_8, v_5, v_4, v_3)$

Definition

Ein M -alternierender Weg (v_1, \dots, v_ℓ) heißt M -Blume, wenn

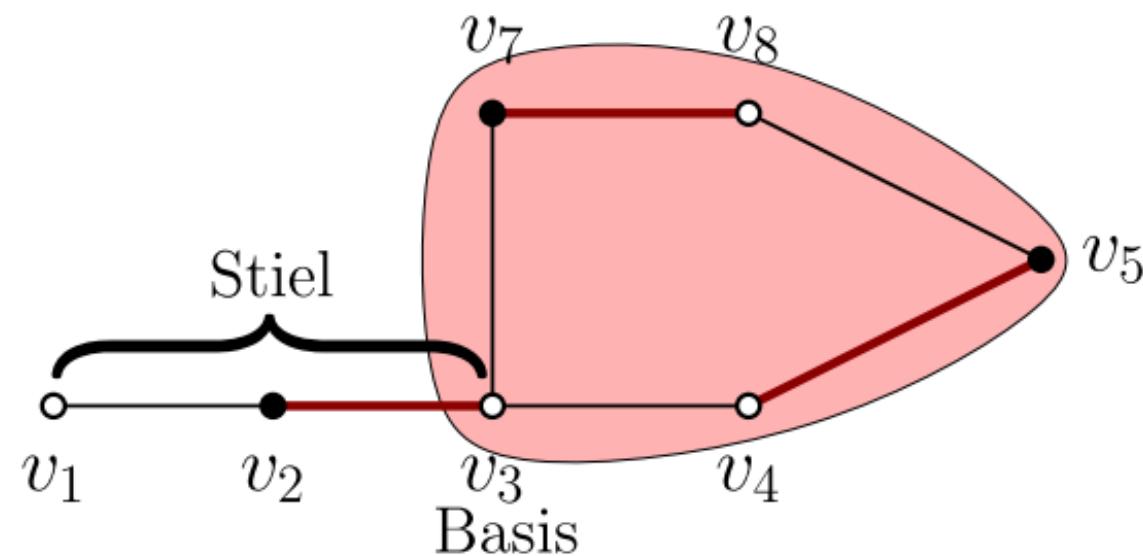
- v_1 nicht von M überdeckt ist.
- $v_1, \dots, v_{\ell-1}$ paarweise verschieden sind.
- $v_i = v_\ell$ für ein ungerades $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ gilt.

Dabei heißt (v_1, \dots, v_i) M -Stiel, (v_i, \dots, v_ℓ) M -Blüte und v_i Basis.

Shrink it!

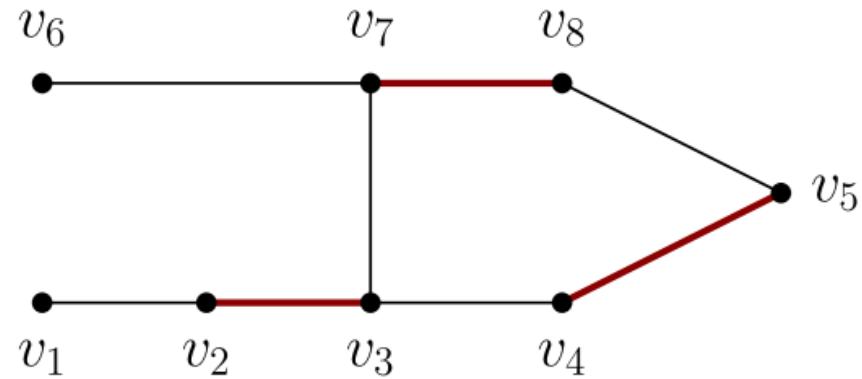


Idee: Schrumpfe
Blüten und fahre mit
der Suche fort.

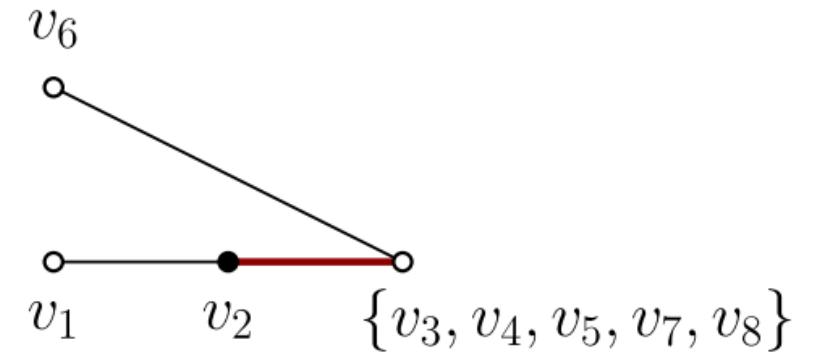
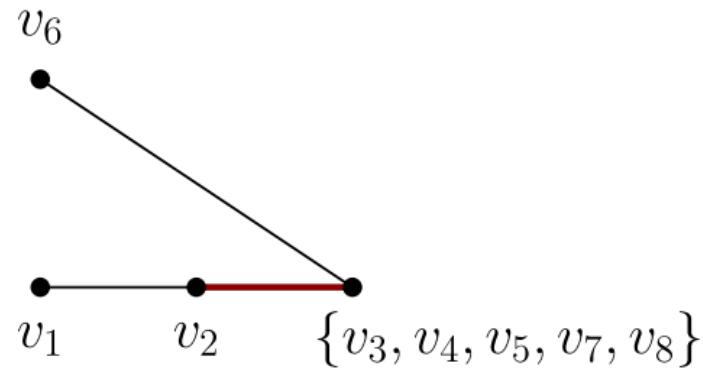
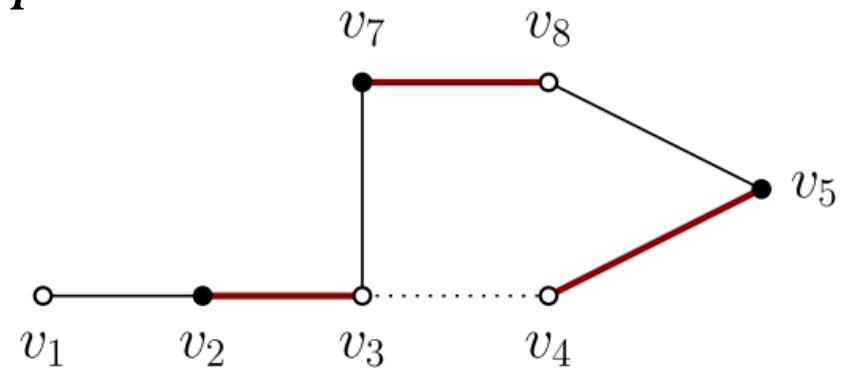


Beispiel

G'

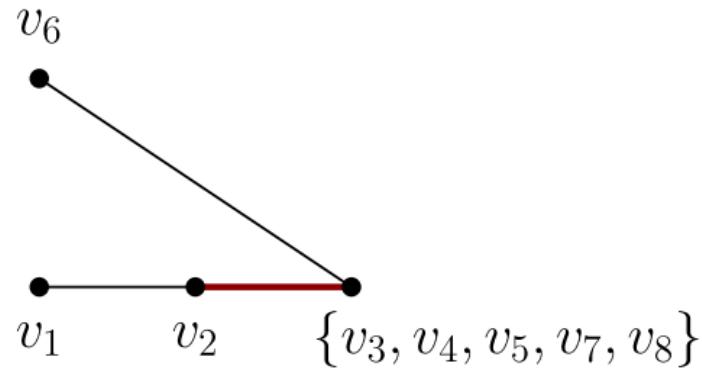


T

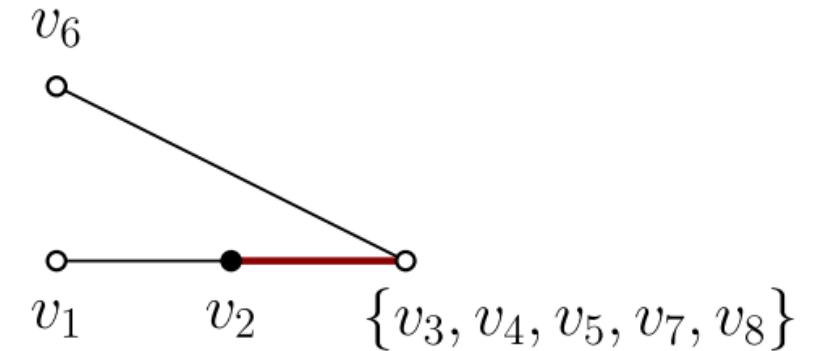


Beispiel

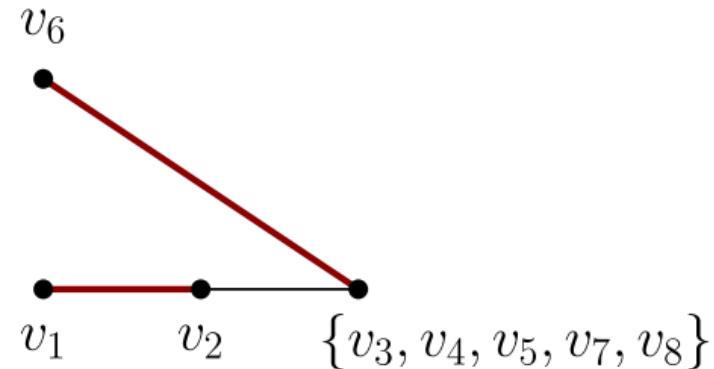
G'



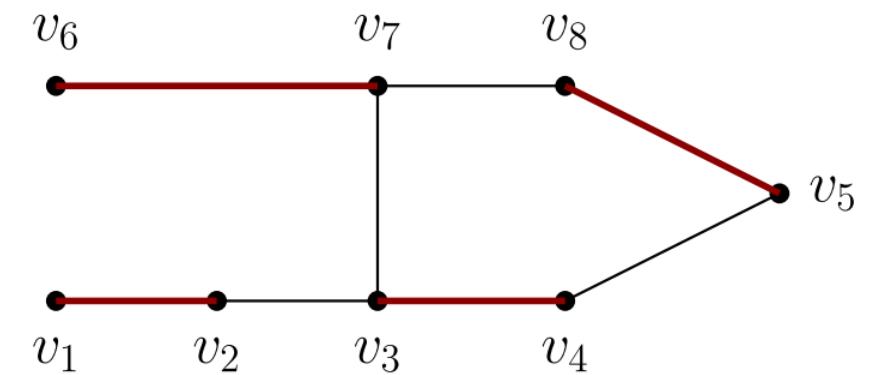
T



Augmentierender Pfad gefunden!



Blüte auflösen



Algorithmus von Edmonds

Algorithmus 5.22

Eingabe:

Bipartiter Graph $G = (V, E)$

Ausgabe:

Maximales Matching M

1. Function BLOSSOM(G)
2. Setze $M' = M = \emptyset$ und $G' = G$
3. **for** $r \in V$ mit r ungematcht **do**
4. Setze $T := (\{r\}, \emptyset)$, $W(T) := \{r\}$ und $S(T) := \emptyset$
5. **While** (es ex. Kante $\{v, w\} \in E'$ mit $v \in W(T)$ und $w \notin S(T)$)
 If w ist ungematcht **then**
 Benutze $\{v, w\}$, um M' zu augmentieren.
 Erweitere M' zu einem Matching M von G
 Ersetze M' durch M und G' durch G .
 Gehe zu Zeile 3.
6. **else if** $w \notin V(T)$, aber w ist in M' gematcht **then**
 Benutze $\{v, w\}$, um T zu erweitern.
7. **else if** $w \in W(T)$ **then**
 Benutze $\{v, w\}$ zum Schrumpfen einer Blüte.
 Aktualisiere M' , G' und T entsprechend.
16. **Return** M



Gewichtete Matchings



Gewichtete Matchings

Problem 5.24: Minimum Cost Perfect Matchings

Gegeben:

Graph $G = (V, E)$ und Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$

Gesucht:

Perfektes Matching $M \subseteq E$ mit $\sum_{e \in M} c(e)$ minimal.

Wichtig:

- Annahme G enthält ein perfektes Matching
- \Rightarrow Für jeden Knoten existiert ein augmentierender Pfad



IP und LP zu MinCost Perfect Matchings

„Relaxierung“

$$\min \sum_{e \in E} x_e c(e)$$

s.t.

$$\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} x_e = 1, \quad \forall v \in V$$

$$\sum_{e \in E(B, V \setminus B)} x_e \geq 1, \quad \forall B \in \text{odd}(V)$$

$$x_e \in \{0,1\}, \quad \forall e \in E$$

$$\min \sum_{e \in E} x_e c(e)$$

s.t.

$$\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} x_e = 1, \quad \forall v \in V$$

$$\sum_{e \in E(B, V \setminus B)} x_e \geq 1, \quad \forall B \in \text{odd}(V)$$

$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$$

Das rechte LP ist ganzzahlig!



Zwei lineare Programme

Optimale Lösungswerte stimmen überein!

$$\min \sum_{e \in E} x_e c(e)$$

s.t.

$$\sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} x_e = 1, \quad \forall v \in V$$

$$\sum_{e \in E(B, V \setminus B)} x_e \geq 1, \quad \forall B \in \text{odd}(V)$$

$$x_e \geq 0, \quad \forall e \in E$$

Primal

$$\max \sum_{v \in V} y_v + \sum_{B \in \text{odd}(V)} y_B$$

s.t.

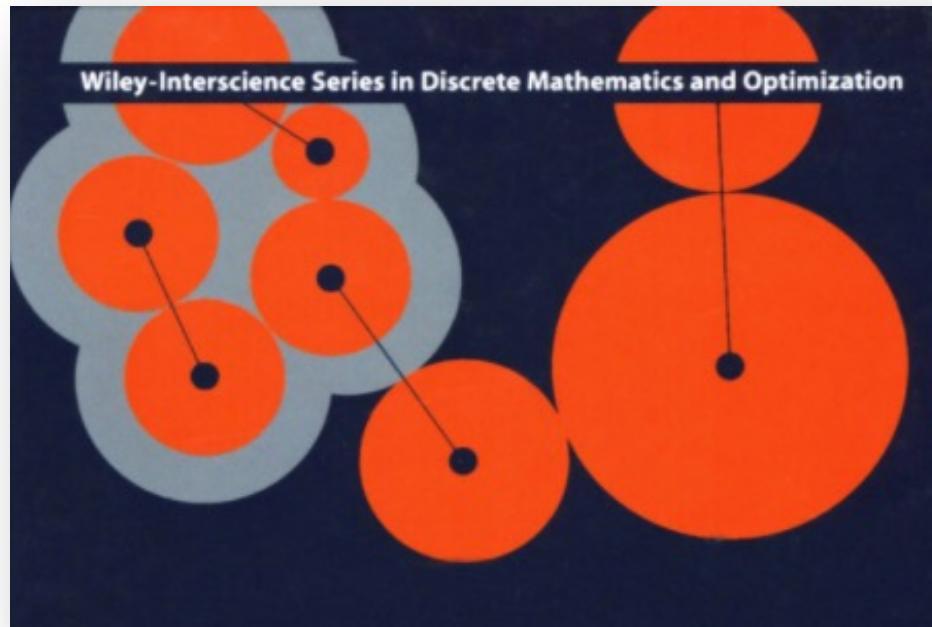
$$y_v + y_w + \sum_{\substack{e \in E(B, V \setminus B) \\ B \in \text{odd}(V)}} y_B \leq c(e), \quad \forall e \in E$$
$$y_B \geq 0, \quad \forall B \in \text{odd}(V)$$

Dual

Was ist das für ein Problem?



Zwei lineare Programme



Lass Kreise um Knoten
möglichst groß wachsen,
sodass sie sich nicht schneiden.

$$\begin{aligned} & \max \sum_{v \in V} y_v + \sum_{B \in \text{odd}(V)} y_B \\ \text{s.t.} \quad & y_v + y_w + \sum_{\substack{e \in E(B, V \setminus B) \\ B \in \text{odd}(V)}} y_B \leq c(e), \quad \forall e \in E \\ & y_B \geq 0, \quad \forall B \in \text{odd}(V) \end{aligned}$$

Dual

Was ist das für ein Problem?

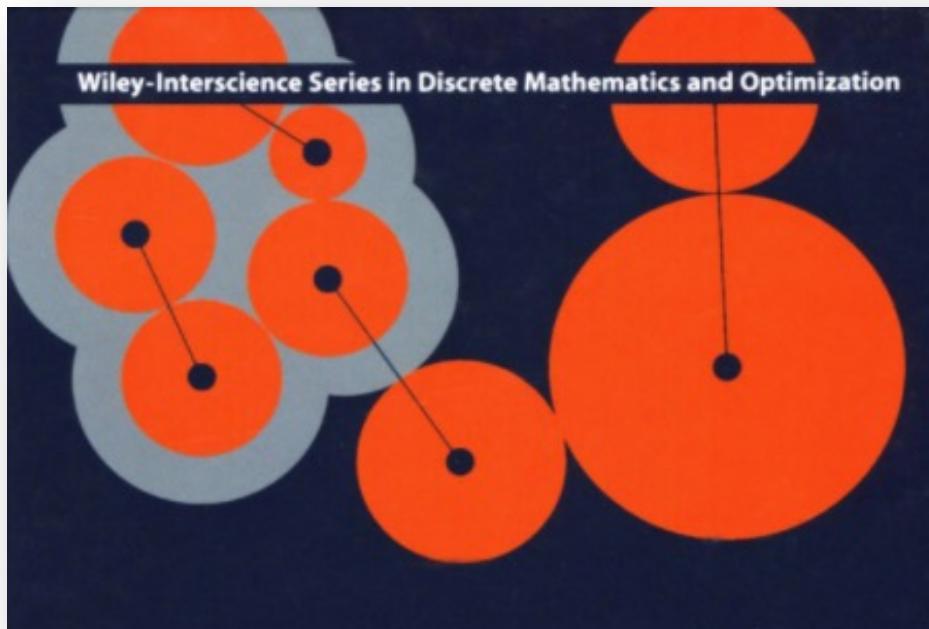


Dualität

Aus komplementären Schlupf folgt:

Sei G ein Graph und $e = \{v, w\} \in E$. Dann gilt:

$$x_e = 1 \Rightarrow y_v + y_w + \sum_{\substack{e \in E(B, V \setminus B) \\ B \in \text{odd}(V)}} y_B = c(e)$$

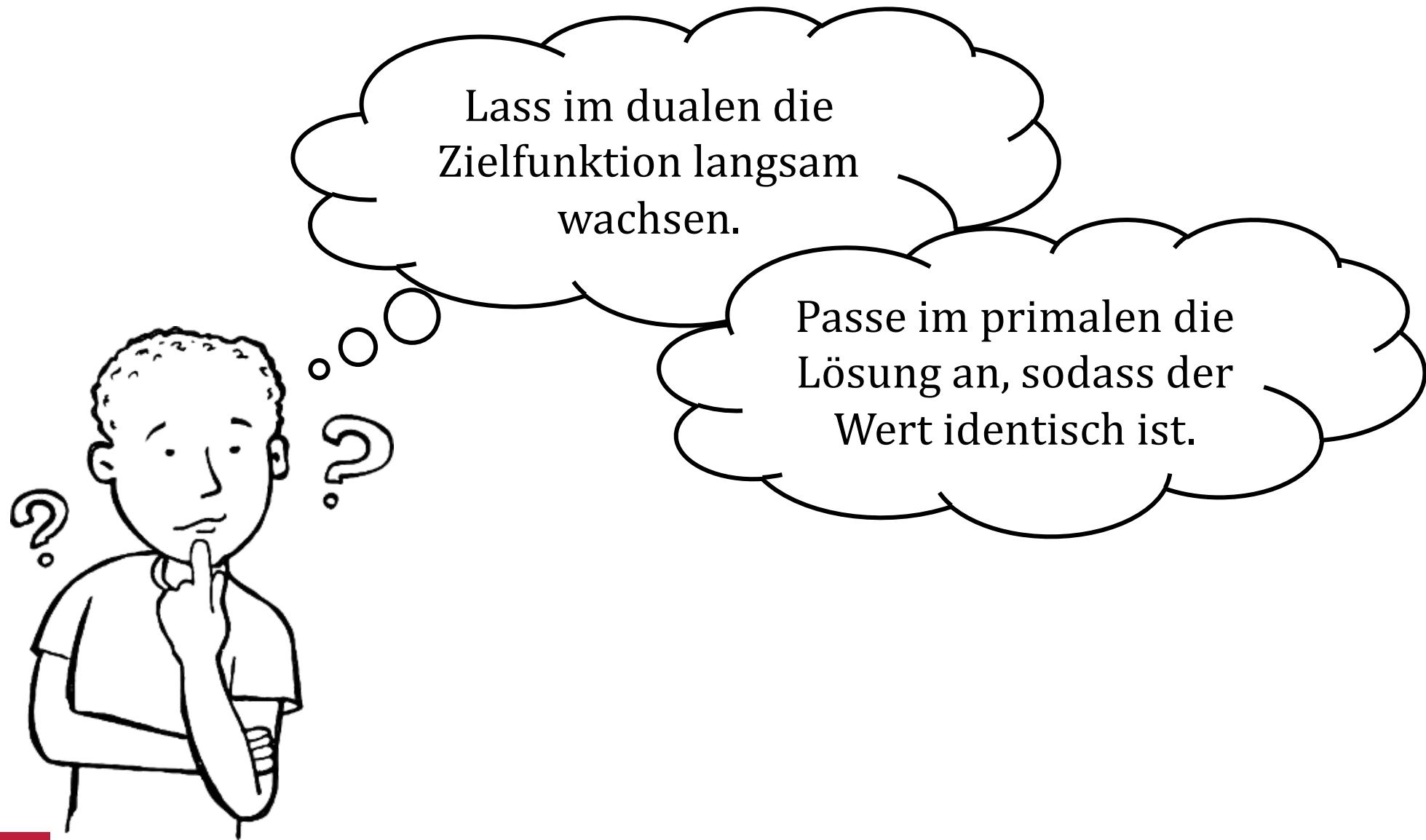


Kante kann nur eine Matchingkante sein, wenn sie durch Kreise überdeckt ist!

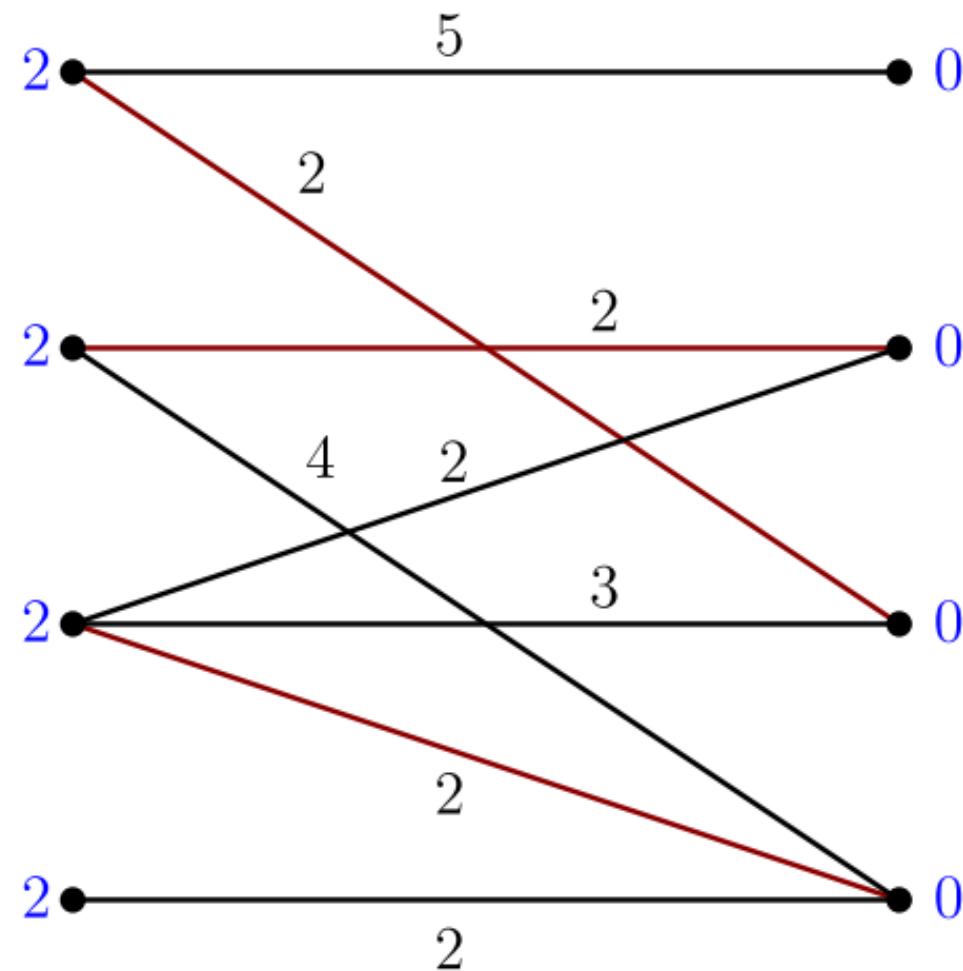
Primal-Dual-Algorithmen



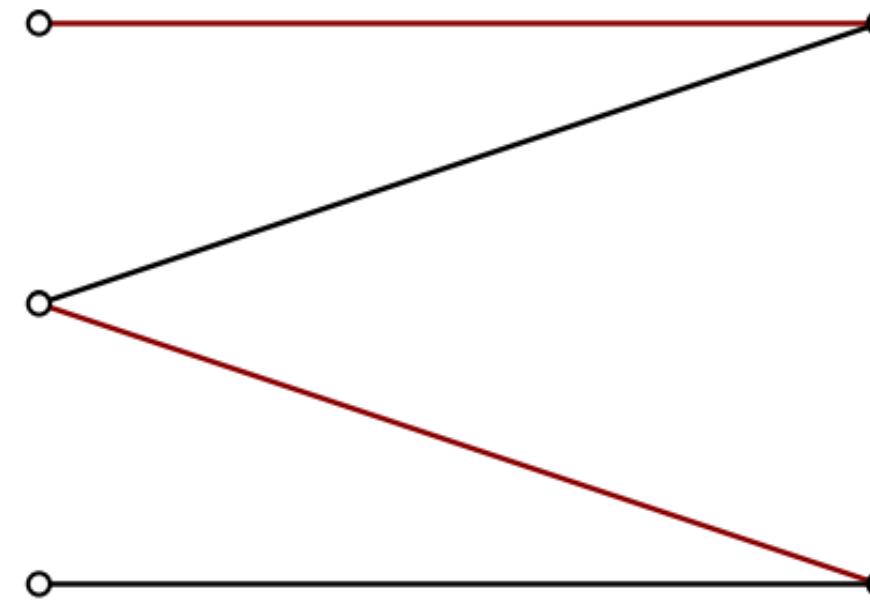
Idee



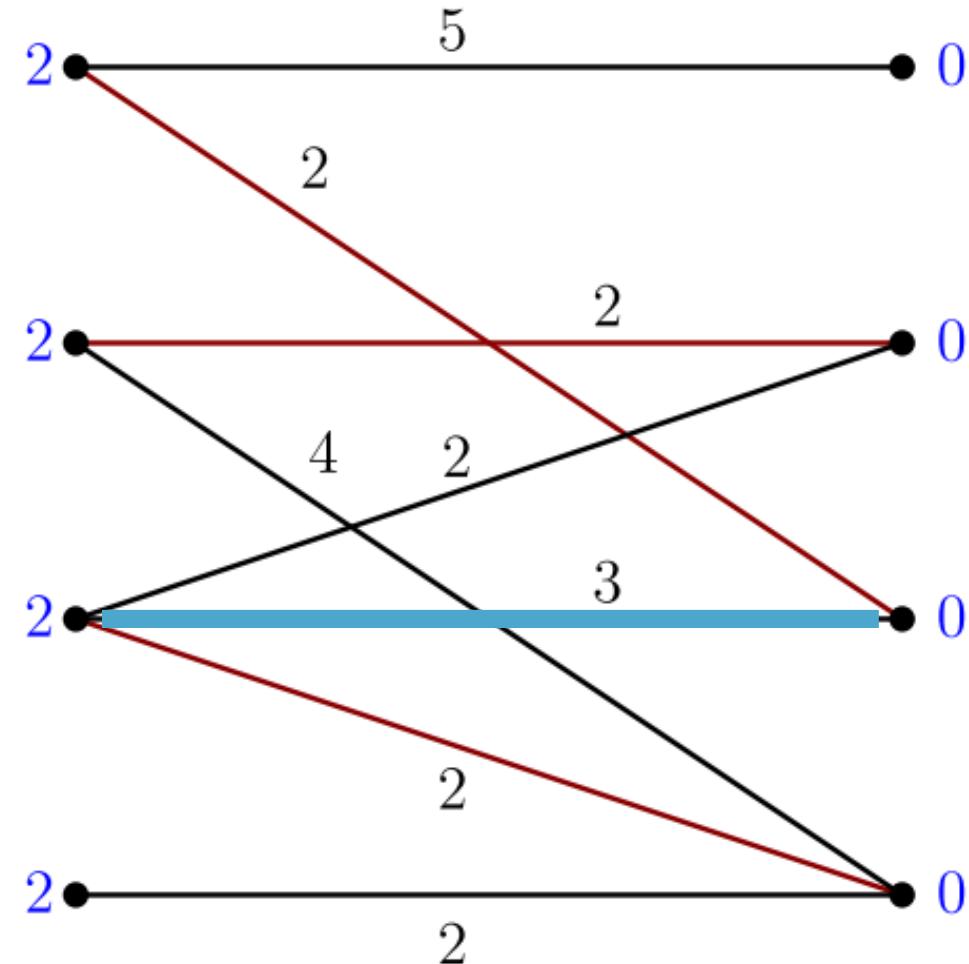
Finden von augmentierenden Pfaden



Konstruiere alternierenden Baum
nur über überdeckte Kanten.



Aktualisieren der Dual-Werte

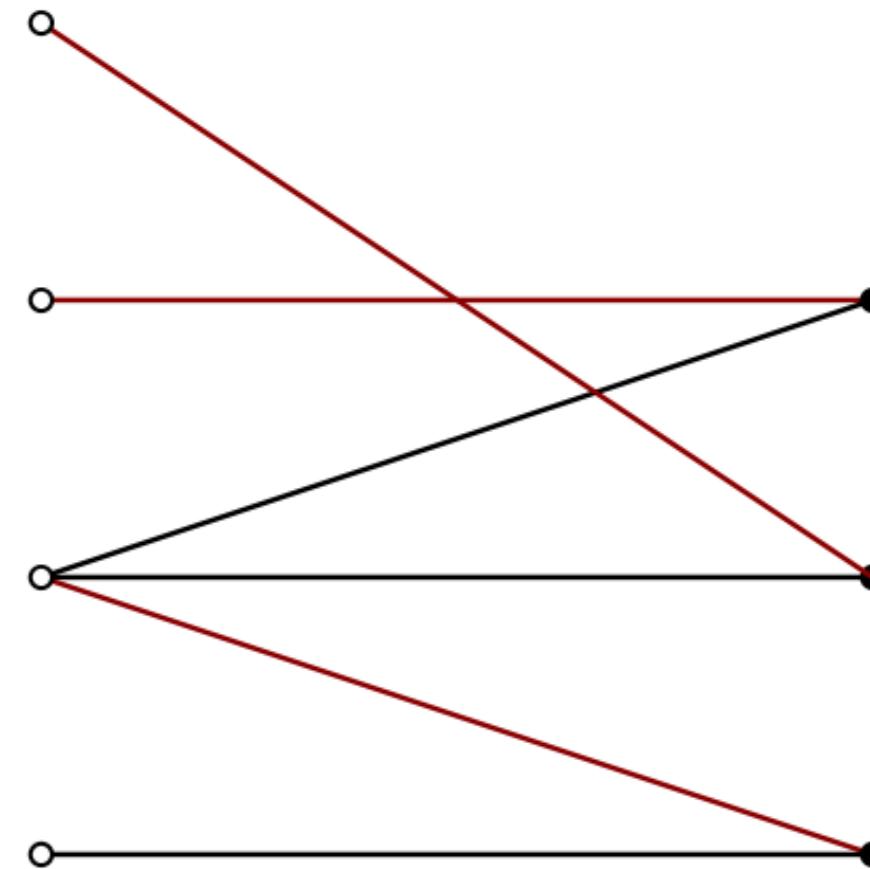
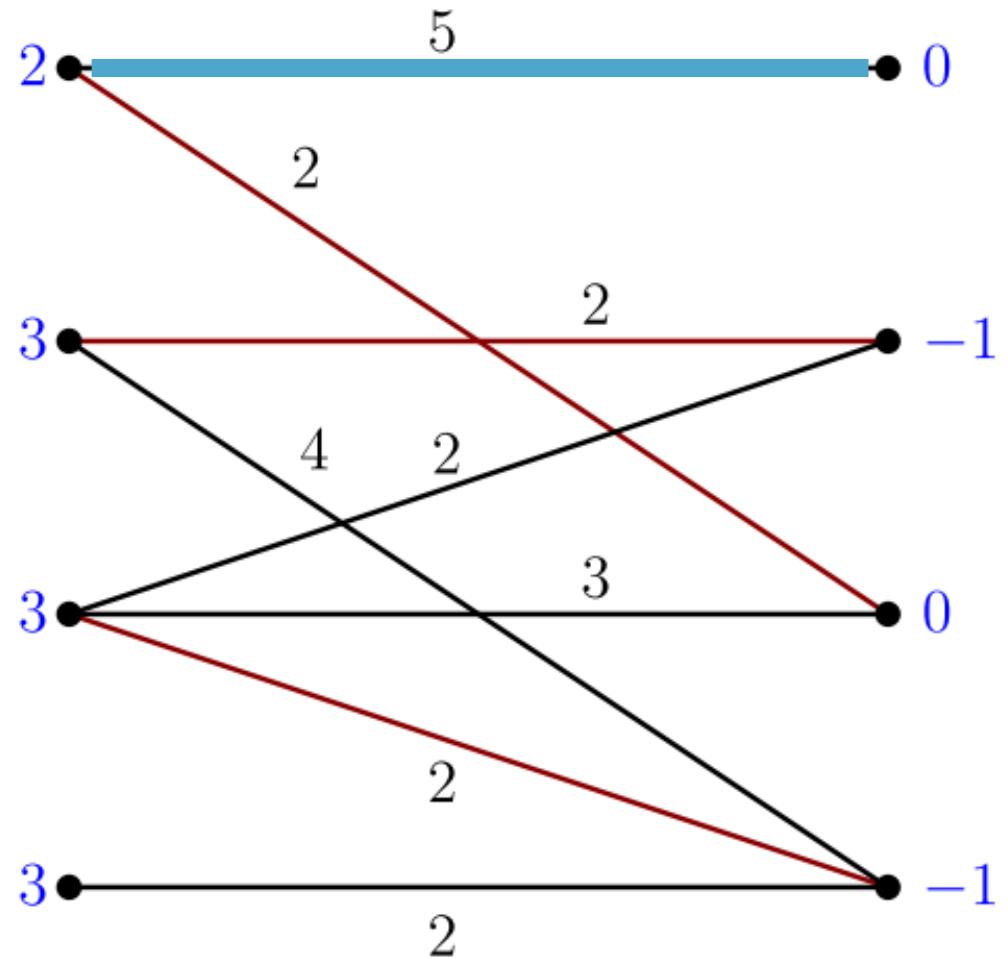


Suche kleinste reduzierte Kosten
von Kanten, die herausführen.
⇒ 1

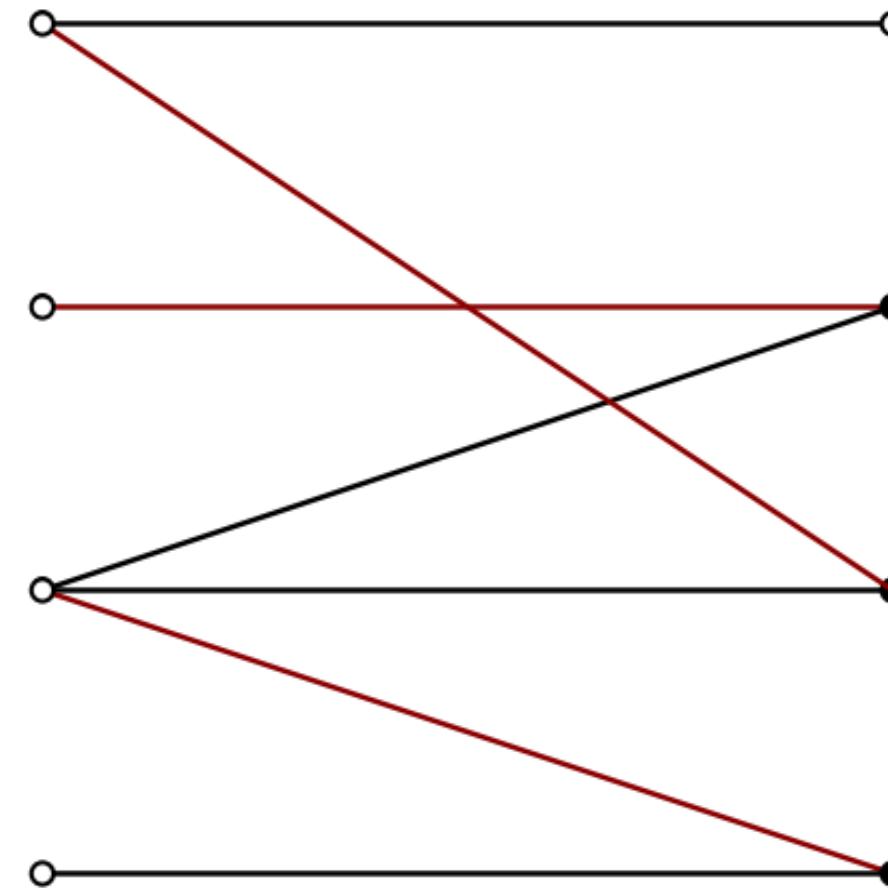
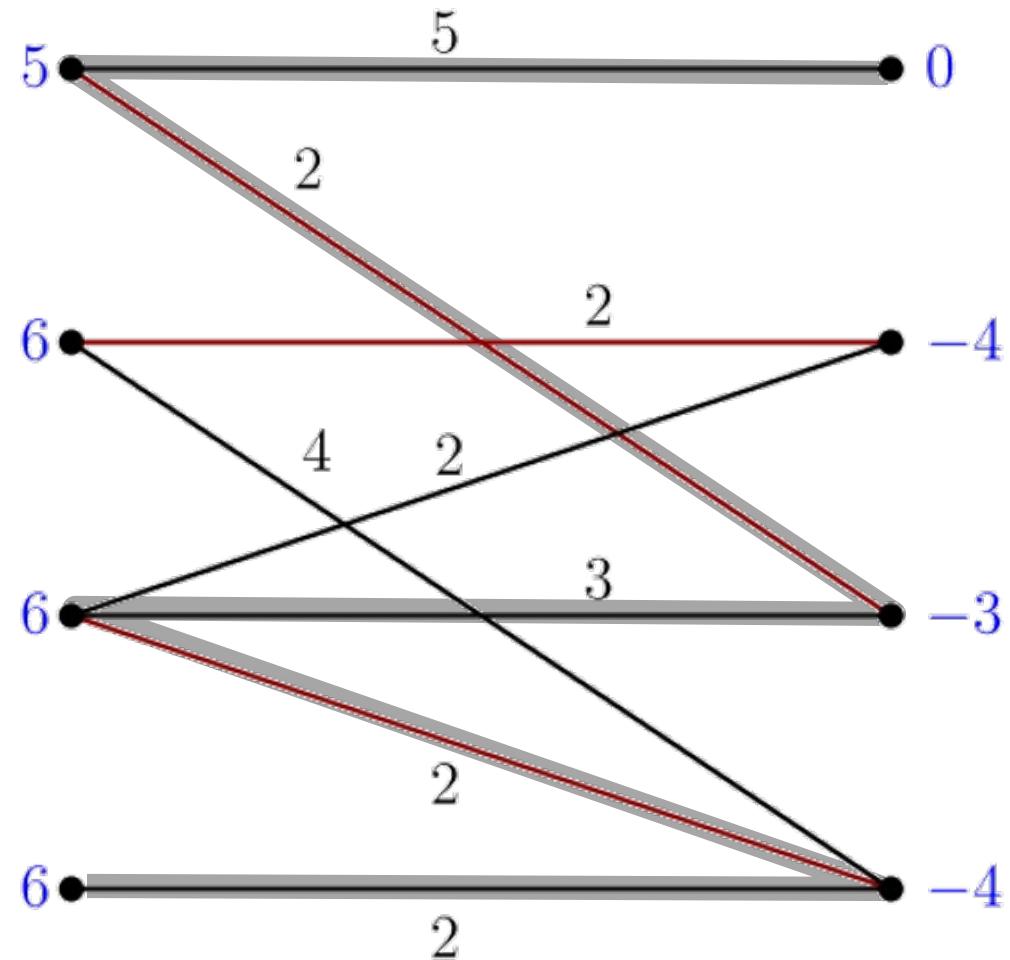
Erhöhe/Verringere Werte von
Knoten um 1.

Aber wie?

Nächste Iteration



Nächste Iteration



Ungarische Methode

Algorithmus

Eingabe:

Bipartiter Graph $G = (V = V_1 \dot{\cup} V_2, E)$, Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$

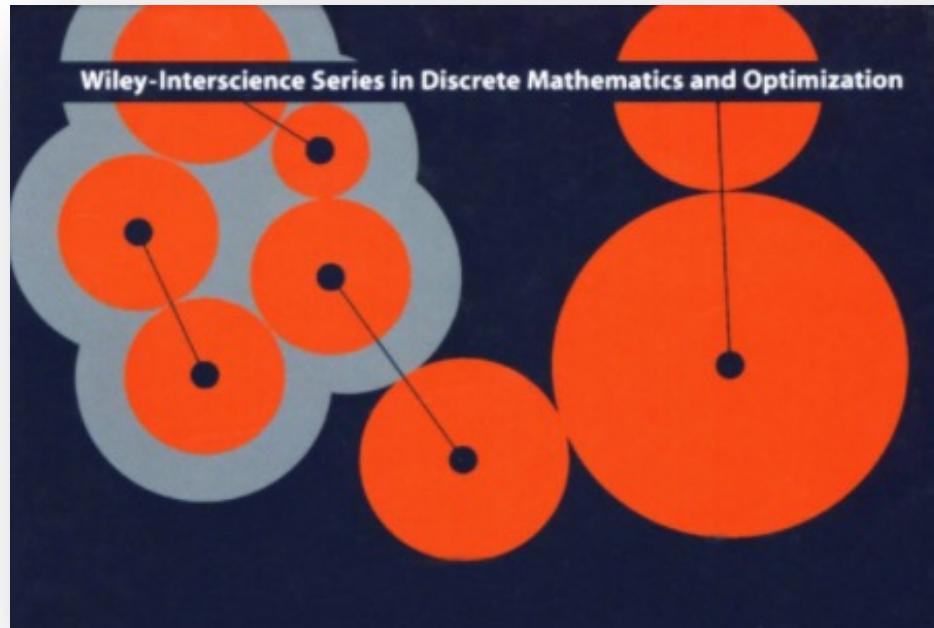
Ausgabe:

Min Cost Perfect Matching M

1. **Function** UNGARISCHEMETHODE(G, c)
2. Setze $y_v := \min_{\{v,w\} \in E} c(\{v,w\})$ für alle $v \in V_1$.
3. Finde maximales Matching M auf überdeckten Kanten.
4. **for** $r \in V_1$ mit r ungematcht **do**
5. Konstruiere alternierenden Baum T mit r als Start.
6. **while** T enthält keinen augmentierenden Pfad **do**
7. Sei $e \in E(W(T), V \setminus W(T))$ eine Kante mit $\bar{c}(e)$ minimal.
8. Setze $y_v := y_v + \bar{c}(e)$ für alle $v \in W(T)$.
9. Setze $y_w := y_w - \bar{c}(e)$ für alle $w \in V(T) \setminus W(T)$.
10. Erweitere T
11. Augmentiere M
12. **return** M

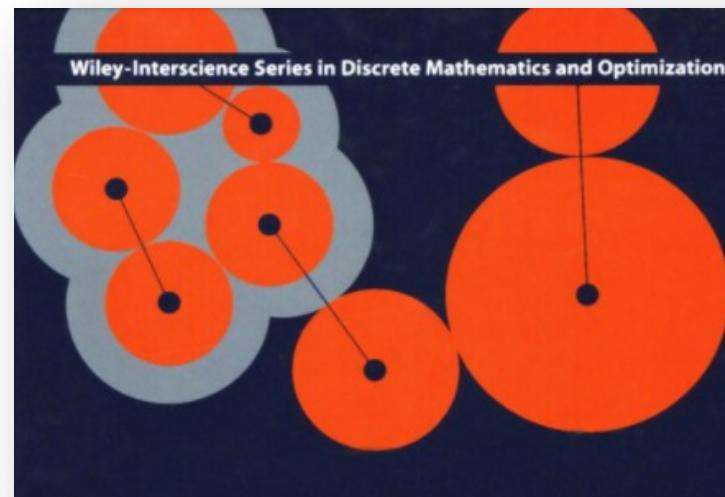
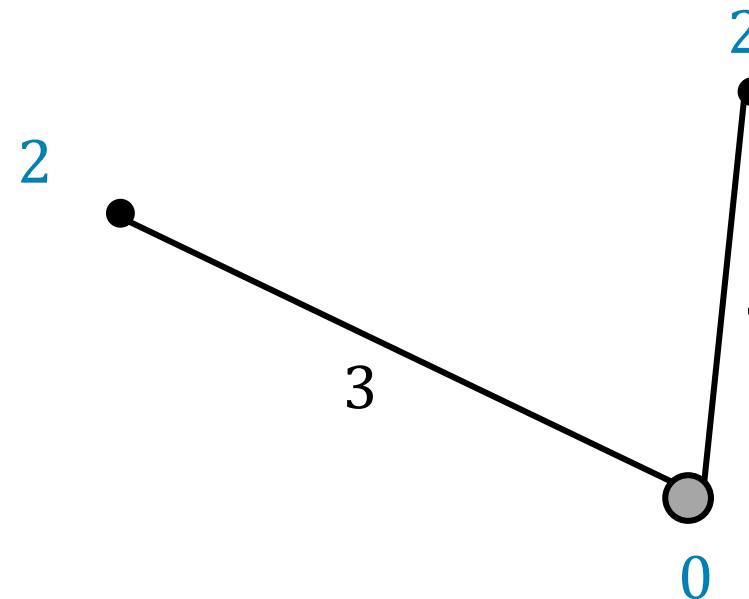
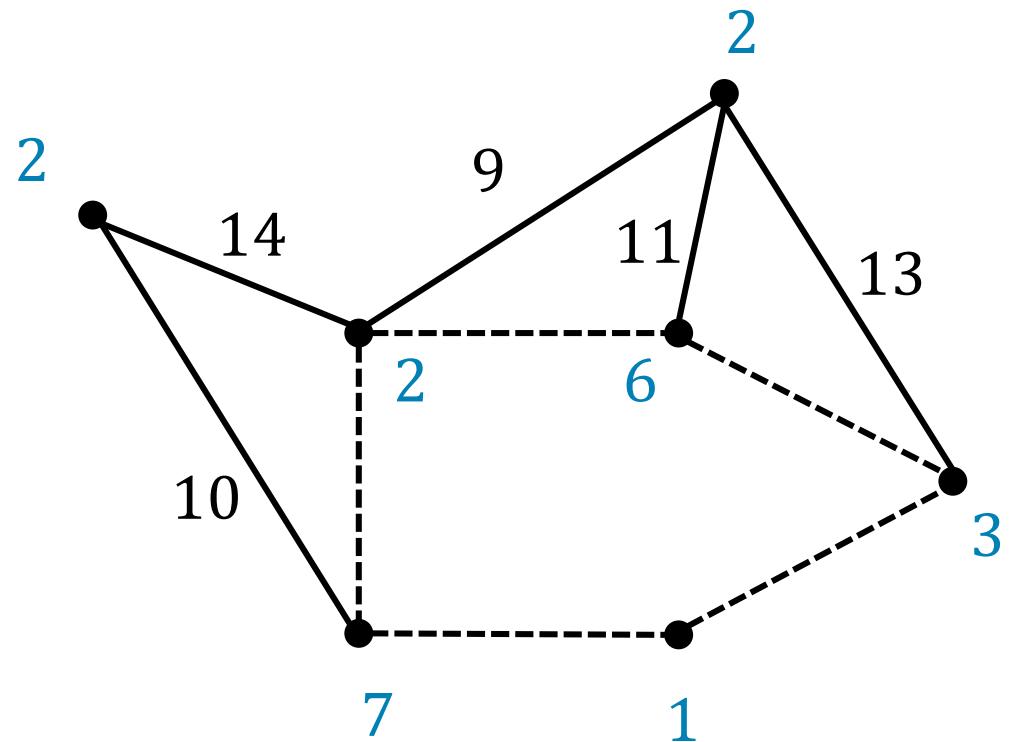


Ungerade Kreise



$$\begin{aligned} & \max \sum_{v \in V} y_v + \sum_{B \in \text{odd}(V)} y_B \\ \text{s. t.} \quad & y_v + y_w + \sum_{\substack{e \in E(B, V \setminus B) \\ B \in \text{odd}(V)}} y_B \leq c(e), \quad \forall e \in E \\ & y_B \geq 0, \quad \forall B \in \text{odd}(V) \end{aligned}$$

Schrumpfen einer Blüte



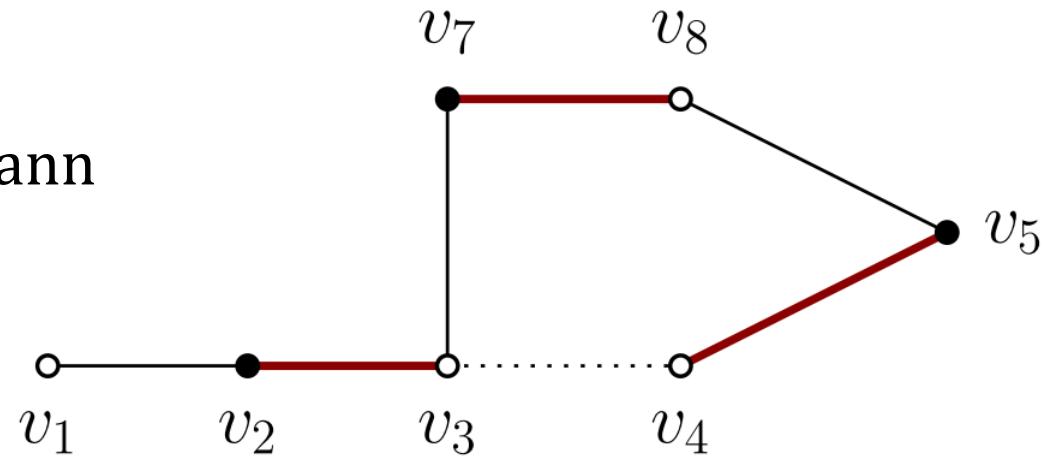
Kanten teilweise über Knoten im Kreis überdeckt.

Die Probleme

Problem 1:

Erhöhen von Dualwerten von weißen Knoten kann Kanten zwischen weißen Knoten überdecken.

⇒ maximal um $\frac{\bar{c}(e)}{2}$ erhöhen.



Problem 2:

Nach Augmentieren: Eine Blüte B kann nur aufgelöst werden, wenn $y_B = 0$.

⇒ B kann später als schwarzer Knoten existieren.

⇒ Schwarze Knoten dürfen um maximal y_B verringert werden.

$$y_B \geq 0, \quad \forall B \in \text{odd}(V)$$



Updateregeln

Betrachte:

1. $\varepsilon_1 := \min\{\bar{c}(e) \mid e \in E(W(T), V \setminus W(T))\}$
2. $\varepsilon_2 := \frac{1}{2} \min\{\bar{c}(e) \mid e = \{v, w\} \text{ mit } v, w \in W(T)\}$
3. $\varepsilon_3 := \min\{y_B \mid \text{Blüte } B \in S(T)\}$

Sei $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

Erhöhe Knoten aus $W(T)$ um ε und verringere Knoten aus $S(T)$ um ε .

Auch hier:

Nach Aktualisieren sind bereits überdeckte Kanten immer noch überdeckt und reduzierte Kosten sind nicht-negativ.



Primal-Dual Methode

Algorithmus

Eingabe:

Graph $G = (V, E)$, Kantenkosten $c: E \rightarrow \mathbb{R}^+$

Ausgabe:

Min Cost Perfect Matching M

1. **Function** PRIMALDUAL(G, c)
2. Setze $G' := G$ und $M' = M = \emptyset$
3. **for** $r \in V$ mit r ungematcht **do**
4. Konstruiere alternierenden Baum T mit r als Start.
5. **while** T enthält keinen augmentierenden Pfad **do**
6. Bestimme $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$
7. Setze $y_v := y_v + \varepsilon$ für alle $v \in W(T)$.
8. Setze $y_w := y_w - \varepsilon$ für alle $w \in S(T)$.
9. **Erweitere** T (solange möglich)
10. Augmentiere M'
11. Konstruiere Matching M für G aus M' in G' .
12. **return** M

Erweitere T :

Case \exists Blüte $B \in S(T)$ mit $y_B = 0$:

Löse Blüte auf.

Passe G', M' und T entsprechend an.

Case Blüte B gefunden:

Schrumpfe B .

Passe G', M' und T entsprechend an.

Case Sonst:

Erweitere T über überdeckte Kanten.

