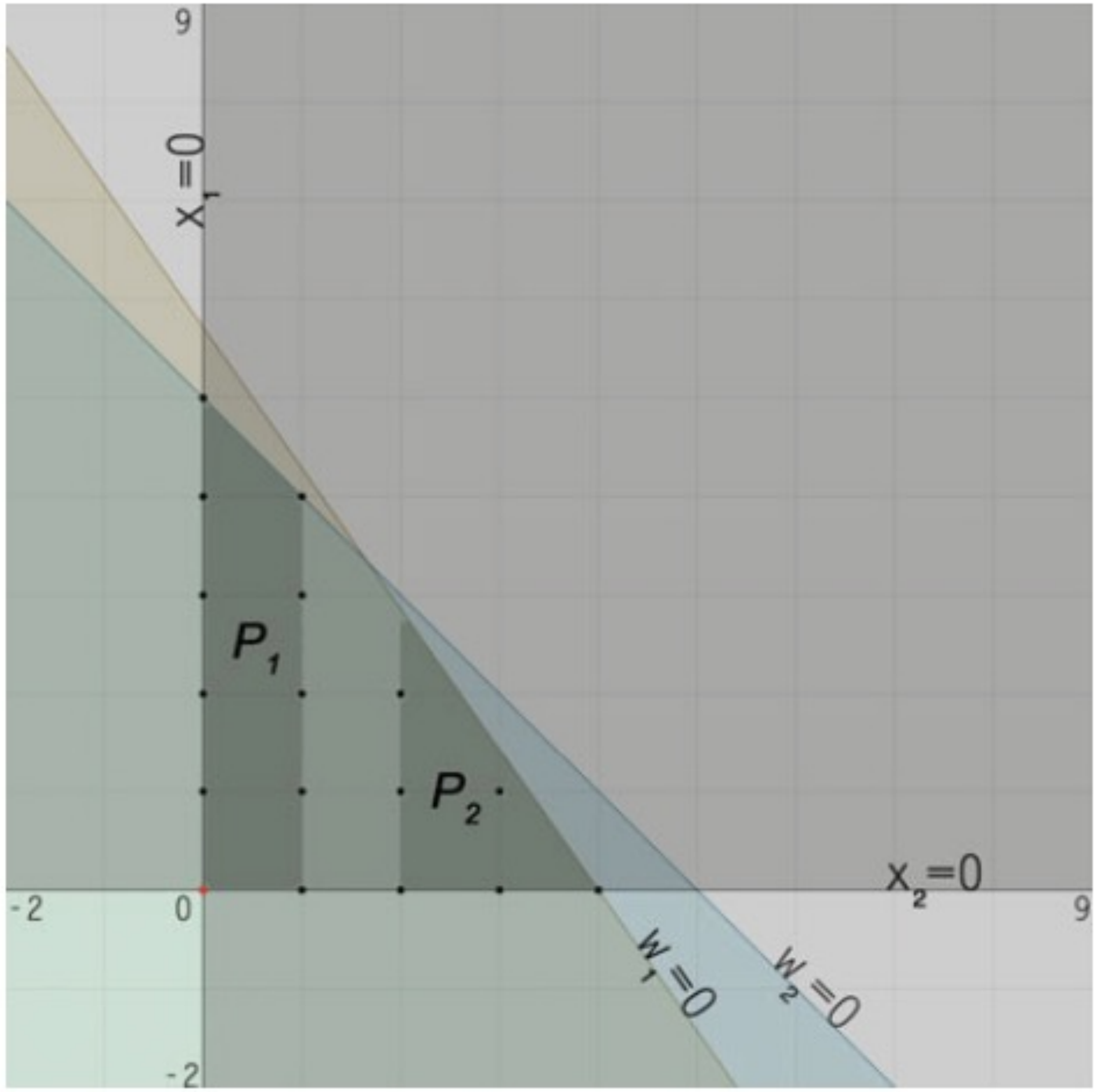
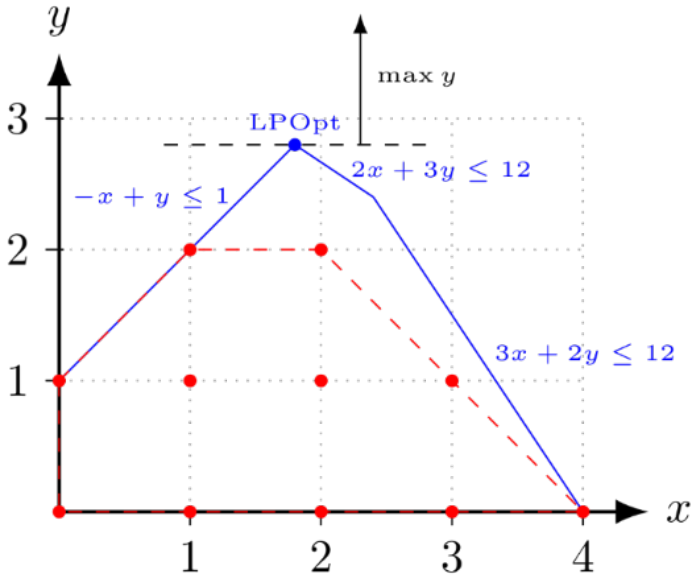
Mathematische Methoden der Algorithmik – Vorlesung #09

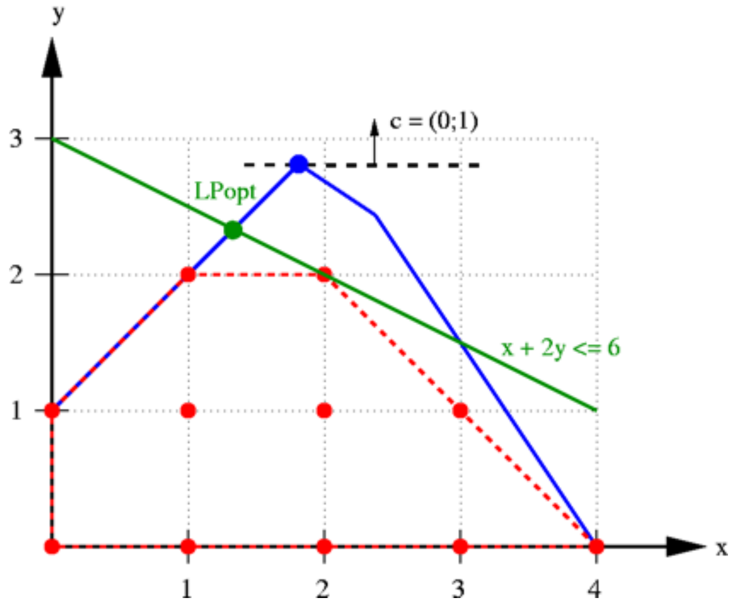
Arne Schmidt

Letzte Woche

...







Branch-and-Bound, Cutting Planes
→ Branch-and-Cut

Gomory-Cuts, Zero-Half-Cuts, Clique Cuts, ...

Clique Cuts

Zwei binäre Variablen heißen **inkompatibel**, wenn sie nicht gleichzeitig den Wert 1 annehmen können.

Eine **Clique** ist eine Menge paarweise inkompatibler Binärvariablen B:

$$C \subseteq B : \forall x_i, x_j \in C : x_i, x_j \text{ sind inkompatibel}$$

Ein **Clique-Cut** ist dann der Constraint $\sum_{j \in C} x_j \leq 1$

Beispiel:

$$x + y \leq 1, x + z \leq 1, y + z \leq 1 \Rightarrow x + y + z \leq 1$$

Die Constraints müssen nicht immer so einfach zu erkennen sein, sondern man muss *propagieren* (betrachte, was passiert, wenn eine Variable auf 0 bzw. 1 gesetzt wird). Etwas verallgemeinert kann die Kombination von 0-1-Belegungen betrachtet werden!

Cover Cuts

Betrachte einen Constraint der Form

$$a^T x \leq z$$

Wenn $x \in \{0,1\}^n$, ist es einfach kleine Mengen C zu finden, die folgende Eigenschaft hat.

$$\sum_{i \in C} a_i x_i > z$$

Ein Cover Cut bzgl. C ist dann ein Constraint der Form

$$\sum_{i \in C} x_i \leq |C| - 1$$

Gerade beim Knapsack Problem tauchen diese Cuts häufig auf („welche Auswahl ist sowieso zu schwer“), daher werden sie oft auch Knapsack Cut genannt.

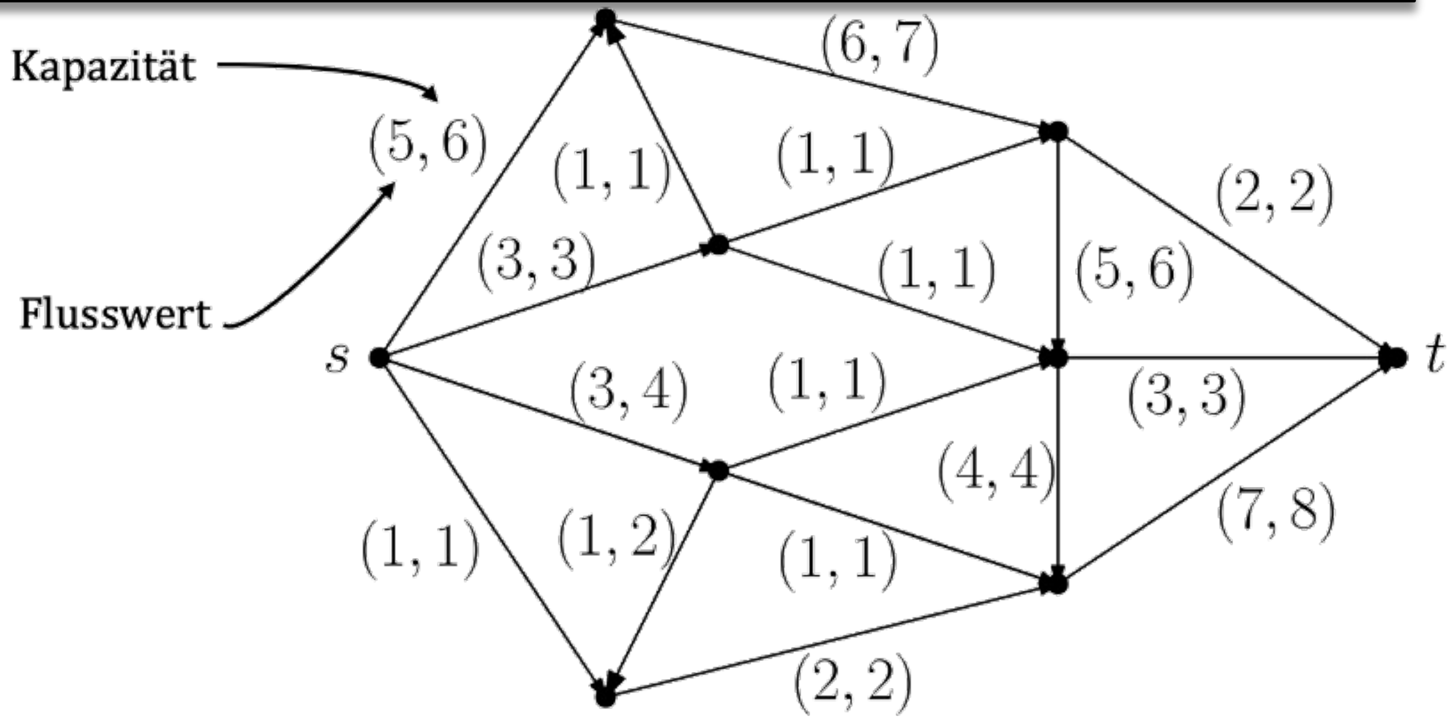
Graphenprobleme – Maximale Flüsse

Flüsse

Gegeben: Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$, eine Kapazitätsfunktion $u: A \to \mathbb{R}^+$, Knoten $s, t \in V$.
Gesucht: Eine Flussfunktion $f: A \to \mathbb{R}^+$ mit

- $f_e \leq u_e$ („Kapazitätsbeschränkung“)
- $\forall v \in V \setminus \{s,t\}: \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e = \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e$ („Flusserhaltung“)
- $\sum_{e \in \delta^+(v)} f_s - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_s$ größtmöglich.

Oft spricht man bei der Eingabe auch von einem Netzwerk $N = (D, u, s, t)$.



Flüsse als LP

Mit Hilfe eines LPs kann man das recht einfach lösen.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{e=(s,v)\in A} f_e \\
\text{s.t.} \quad & \\
& f_e \leq u_e, \qquad \forall e \in A \\
& \sum_{e=(v,w)\in A} f_e - \sum_{e=(w,v)\in A} f_e = 0, \qquad \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\
& f_e \geq 0
\end{aligned}
$$

Constraints dieser Form heißen auch **Flow-Constraint**.

Das duale LP dazu sieht allerdings nicht ganz so hübsch aus.

Wichtig bei Flüssen ist, dass ein Fluss immer in s-t-Pfade zerlegt werden kann (vor allem wegen Flusserhaltung). Damit lässt sich ein anderes LP modellieren.

Flüsse als LP II

Jeder s-t-Pfad erhöht den Fluss um den entsprechenden Wert. Eine Kante kann dabei in mehreren Pfaden auftauchen. Entsprechende Werte addieren sich und dürfen die Kapazität nicht überschreiten!

$$\max \sum_{s-t-\text{Pfad } P} x_P$$

s.t.

$$\sum_{e \in P} x_P \leq u_e, \qquad \forall e \in A$$

$$x_P \geq 0$$

Warum eignet sich dieses LP nicht, um das Problem zu lösen?

Exponentiell viele Variablen!

Aber über das duale lässt sich was spannendes sehen!

Das Duale zum Fluss-LP

Jeder s-t-Pfad erhöht den Fluss um den entsprechenden Wert. Eine Kante kann dabei in mehreren Pfaden auftauchen. Entsprechende Werte addieren sich und dürfen die Kapazität nicht überschreiten!

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{s-t-\text{Pfad } P} x_P \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{e \in P} x_P \leq u_e, \qquad \forall e \in A \\ & x_P \geq 0 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in A} u_e y_e \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{e \in P} y_e \geq 1, \qquad \forall s-t-\text{Pfad } P \\ & y_e \geq 0 \end{aligned}$$

Von jedem Pfad soll also eine Kante ausgewählt werden, ein so gennanter Cut. Dabei soll die Summe der Kapazitäten dieser Kanten kleinstmöglich sein, also ein minimaler Cut.

Minimum Cut Problem

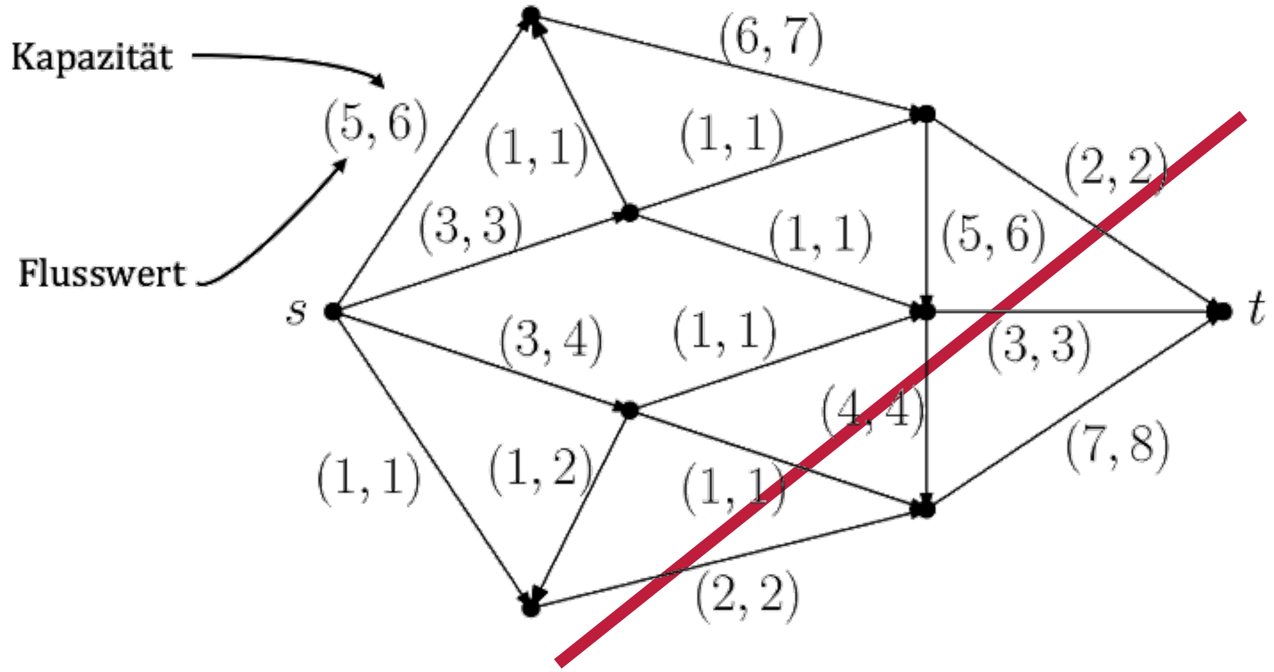
Gegeben: Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$, eine Kapazitätsfunktion $u: A \to \mathbb{R}^+$, Knoten $s, t \in V$.
Gesucht: Eine Menge C mit $s \in C, t \notin C$ und $\sum_{e \in \delta^+(C)} u_e$ minimal

$$\min \sum_{e \in A} u_e y_e$$

s.t.

$$\sum_{e \in P} y_e \geq 1, \qquad \forall s - t - \text{Pfad } P$$

$$y_e \in \{0,1\}$$



Minimum Cut Problem

Gegeben: Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$, eine Kapazitätsfunktion $u: A \to \mathbb{R}^+$, Knoten $s, t \in V$.
Gesucht: Eine Menge C mit s $\in C, t \notin C$ und $\sum_{e \in \delta^+(C)} u_e$ minimal

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{e \in A} u_e y_e \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \sum_{e \in P} y_e \geq 1, \qquad \forall s - t - \text{Pfad } P \\
&\qquad y_e \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

$\rightarrow$

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{e \in A} u_e y_e \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \sum_{e \in P} y_e \geq 1, \qquad \forall s - t - \text{Pfad } P \\
&\qquad y_e \geq 0
\end{aligned}$$

Lemma:
(1) Jede ganzzahlige Lösung des MinCut Ips ist eine Lösung des MinCut LPs.
(2) Zur optimalen Lösung des LPs mit Wert Z existiert eine Lösung des IP mit Wert Z.

Integrality Gap

Betrachte ein Maximierungsproblem P und das dazu duale Minimierungsproblem D.
Dann besteht folgende Beziehung

$$\zeta_{IP}(P) \leq \zeta_{LP}(P) = \zeta_{LP}(D) \leq \zeta_{IP}(D)$$

Wobei ζ der jeweilige optimale Lösungswert des IP bzw. des relaxierten LPs von P bzw D entspricht.

Der Quotient $\frac{\zeta_{IP}}{\zeta_{LP}}$ für Minimierungsprobleme bzw. $\frac{\zeta_{LP}}{\zeta_{IP}}$ für Maximierungsprobleme heißt **Integrality Gap**

Korollar: Der Integrality-Gap für das angegebene MinCut-IP ist 1.

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Theorem: Für ein Netzwerk $N = (D, u, s, t)$ ist der Wert eines maximalen Flusses gleich dem Wert eines minimalen Schnittes.

Beweis: Folgt nun nur noch aus starker Dualität!

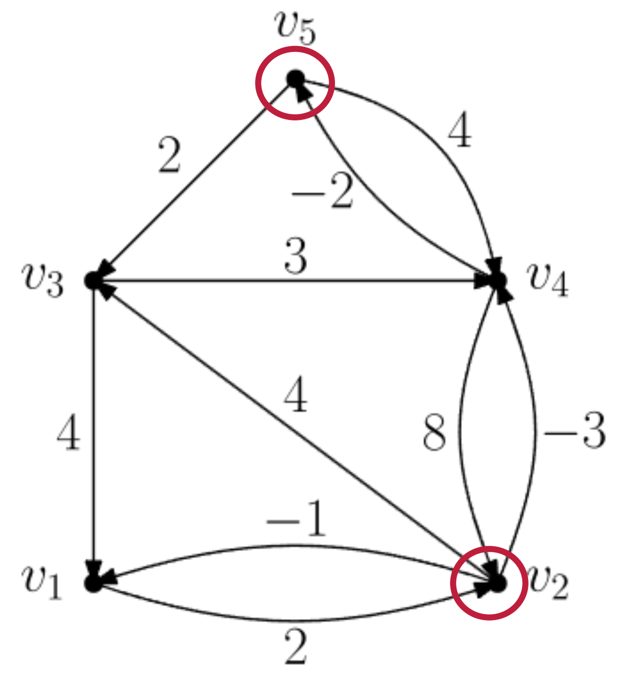
Gibt es noch weitere Graphenprobleme für die ein IP mit Integralitygap 1 existiert?

Graphenprobleme – Kürzeste Wege

Kürzeste Wege

Gegeben:
- Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$,
- Kostenfunktion $c: A \to \mathbb{R}^+$,
- Knoten $s, t \in V$.

Gesucht: Einen gewichtsminimalen Pfad von s nach t.



Wie Modelliere ich das als IP?

Entlang eines Pfades: Wenn ich einen Knoten besuche, muss ich auch von dort weiter!

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & -3 & -5 \\ 4 & 6 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 8 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Kürzeste Wege modellieren

Also, suche eine
Auswahl an Kanten

An jedem Knoten (außer s und t)
muss etwas herausgehen, wenn
etwas hereinkommt

Eine Kante muss
aus s herausführen.

Kürzeste Wege Modell

Sei x_e eine Entscheidungsvariable, ob die Kante $e \in A$ Teil des kürzesten Weges ist.
Dann löst das folgende IP das kürzeste Wege Problem.

$$\min \sum_{e \in A} c_e x_e$$

s.t.

$$\sum_{e \in \delta^+(s)} x_e = 1$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} x_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} x_e = 0, \qquad \forall v \in V \setminus \{s, t\}$$

$$x_e \in \{0,1\}$$

Theorem:
Das IP für das kürzeste Wege Problem besitzt Integrality Gap 1.

→ Tafel / Whiteboard!

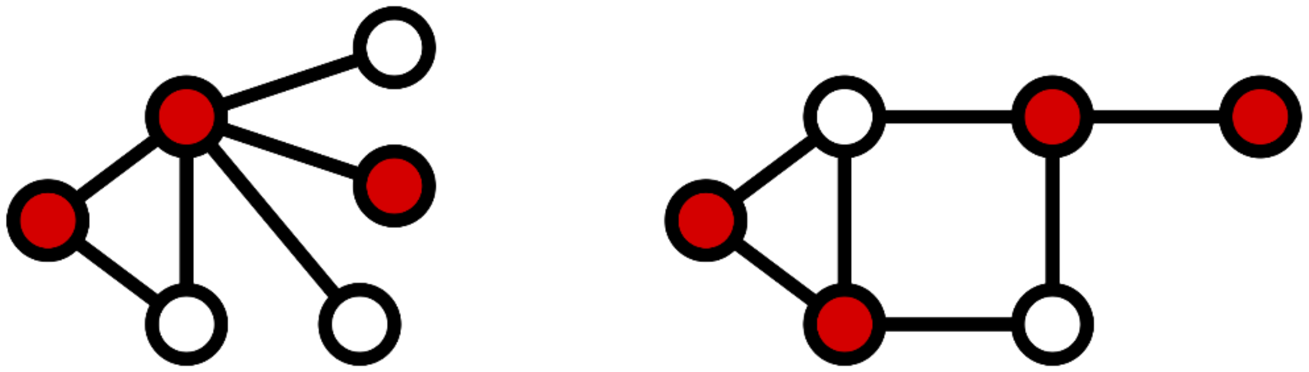
Wie sieht das mit etwas schwereren Problemen aus?

Graphenprobleme – Vertex Cover

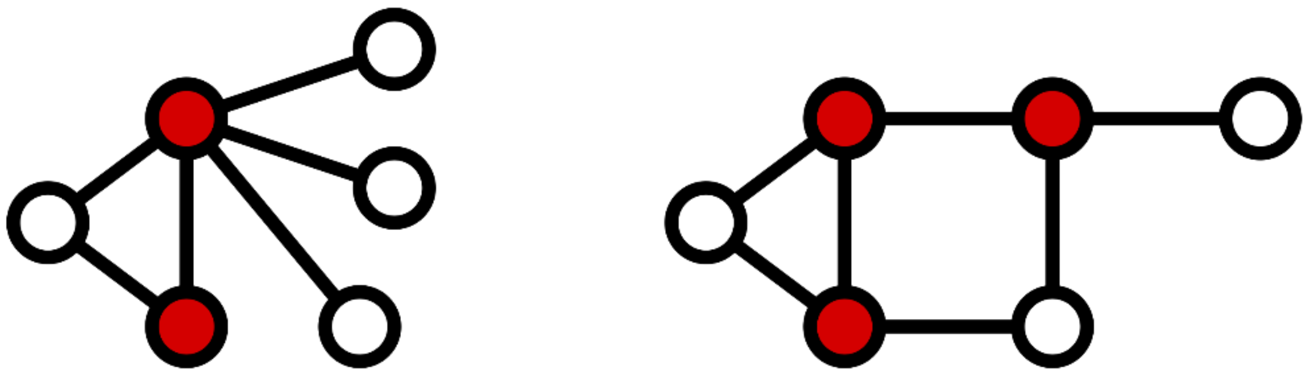
Wiederholung: Minimum Vertex Cover

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$.
Gesucht: Eine kleinste Menge $VC \subseteq V$, sodass für jede Kante $e = \{u, v\}$ entweder $u \in VC$ oder $v \in VC$.

Vertex Cover



Minimum Vertex Cover



Minimum Vertex Cover als IP

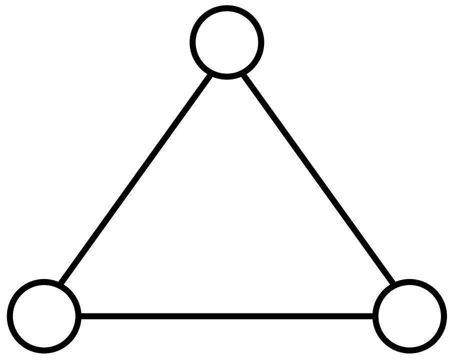
$$\min \sum_{v \in V} x_v$$ Minimiere Anzahl der ausgewählten Knoten.

s.t.

$$x_v + x_w \geq 1, \qquad \forall e = \{v, w\} \in V$$ Jede Kante muss überdeckt sein.

$$x_v \in \{0, 1\}, \qquad \forall v \in V$$ Jede Kante darf maximal einmal ausgewählt sein.

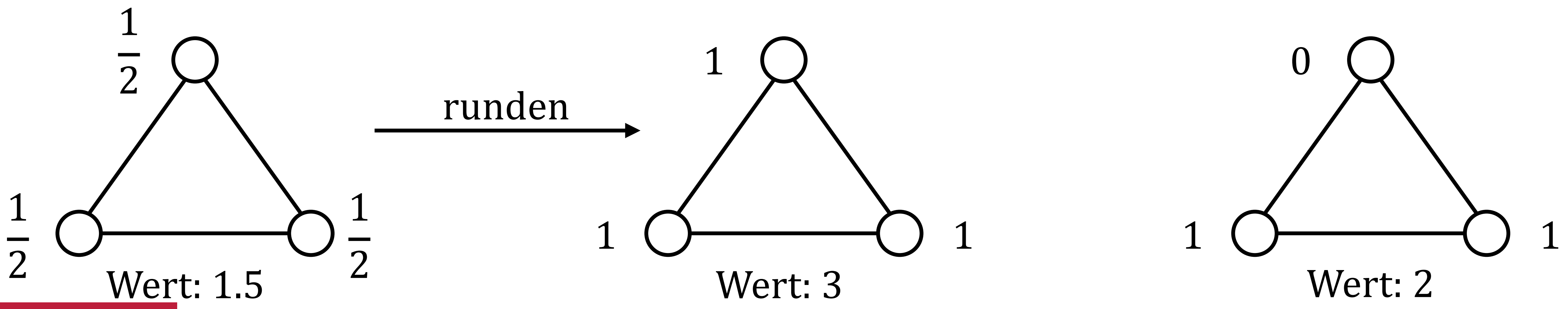
Theorem:
Die Relaxierung des IP ist halb-integral, d.h. in einer optimalen Basislösung ist $x \in \{0, ½, 1\}^n$.



Runden von Lösungen

Korollar:
Das IP für Minimum Vertex Cover besitzt ein Integralitygap von ≤ 2.

Beweis:
Löse die Relaxierung. Runde dann alle Variablen mit ≥ 1 auf exakt 1. Durch Halb-Integralität kann sich die Zielfunktion im Wert nur verdoppeln, liefert aber eine ganzzahlige Lösung. Die beste ganzzahlige Lösung kann nicht schlechter sein.



Approximationsmethode: LP-Lösungen runden

Kann man zeigen, dass das Runden der fraktionalen Werte den ZF-Wert um maximal Faktor ρ verschlechtert und dabei eine gültige, ganzzahlige Lösung entsteht, dann approximiert man das Problem mit Faktor ρ, d.h. für den optimalen Wert P_{opt} und dem erhaltenen Wert P_{alg} gilt $\rho P_{opt} \leq P_{alg}$ (für Minimierungsprobleme) bzw $\rho P_{opt} \geq P_{alg}$ (für Maximierungsprobleme).

Korollar:
Es existiert eine 2-Approximation für Vertex Cover.

Runden muss nicht immer trivial sein! Ggf. muss ein Teil auf- und ein Teil abgerundet werden!