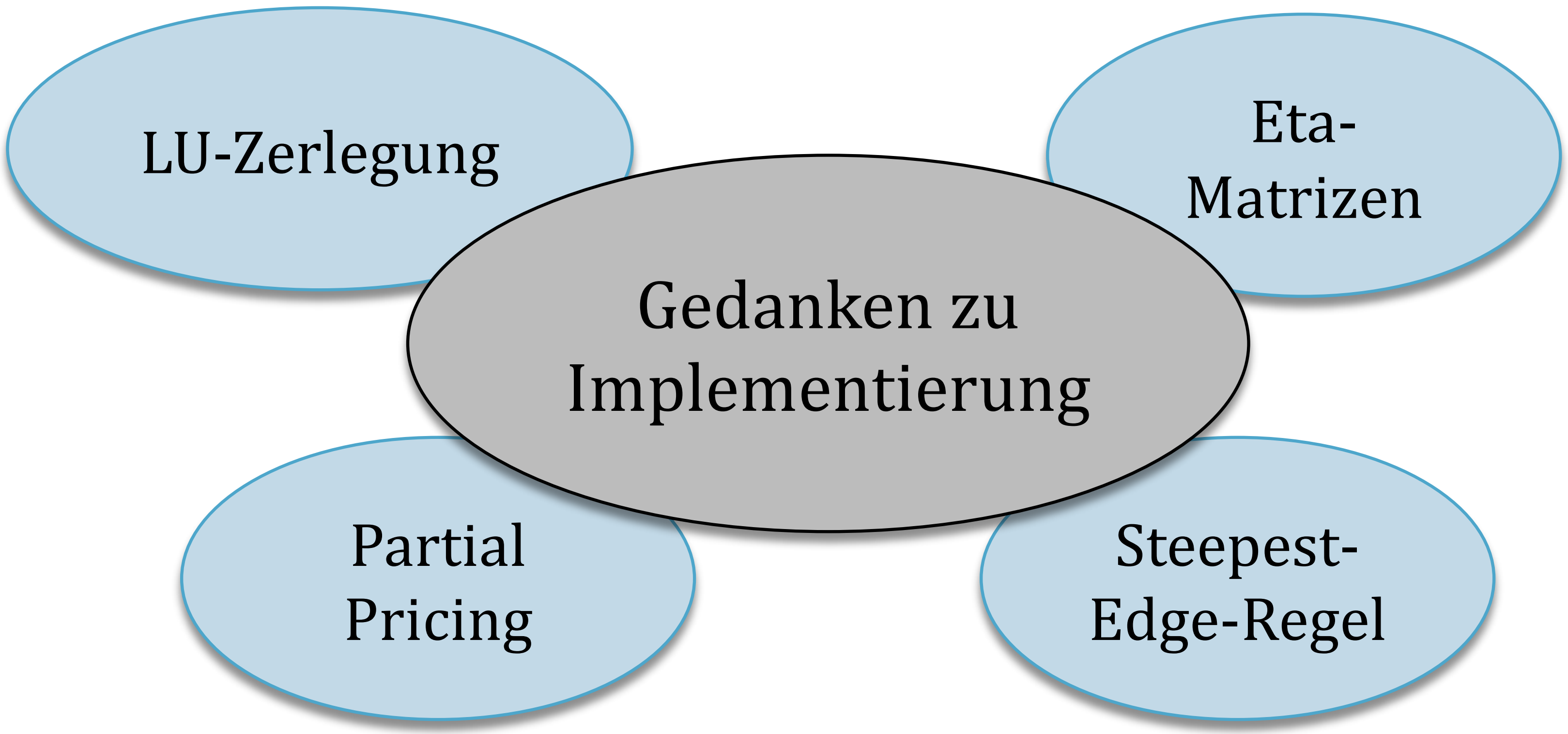
Technische
Universität
Braunschweig

Mathematische Methoden der Algorithmik – Vorlesung #07

Arne Schmidt

Letzte Woche

Gedanken zur Implementierung



LPs in allgemeiner Form

LPs in allgemeiner Form

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\max c^T x \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad a \leq Ax \leq b \\
&\qquad \ell \leq x \leq u
\end{aligned}
}
$$

Sowohl die Contraints als auch die Variablen besitzen eine obere und untere Schranke.

Naiver Ansatz:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\max c^T x \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad Ax \leq b \\
&\qquad -Ax \leq -a \\
&\qquad x \leq u \\
&\qquad x \geq \ell
\end{aligned}
}
$$

Das verdoppelt aber die Constraints!

Fragen

Was machen wir mit Constraints / Variablen, die keine untere / obere Schranke besitzen?

Was passiert mit den Schlupfvariablen?

Können wir Simplex einfach anpassen?

Schranken

$$\begin{array}{l} \max c^T x \\ \text{s.t.} \\ \qquad a \leq Ax \leq b \\ \qquad \ell \leq x \leq u \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{maximize} & & & 3x_1 & - & x_2 & & \\ \text{subject to} & 1 & \leq & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & 2 & \leq & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\ & ? & & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -2 & \leq & x_1 & & & & ? \\ & 0 & \leq & & & x_2 & \leq & 6 \end{array}$$

Ist a, b, ℓ, u für einen Constraint bzw. eine Variable nicht gegeben, ersetzen wir diese mit $-\infty$ (für untere Schranken) bzw ∞ (für obere Schranken).

Schlupf

Bisher hatten wir für w_i immer den Wert angegeben, wie viel Luft noch bis zur Gleichheit existiert. Das funktioniert hier nicht mehr.

Stattdessen können wir einfach den Wert des Constraints festhalten und schauen, ob er sich innerhalb der Schranken (engl. bounds) befindet.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximize} & & & 3x_1 & - & x_2 & & \\
\text{subject to} & 1 & \leq & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & 2 & \leq & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & & & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -2 & \leq & x_1 & & & & \\
 & 0 & \leq & & & x_2 & \leq & 6
\end{array}
$$

$$w_1 = -x_1 + x_2$$
$$w_2 = -3x_1 + 2x_2$$
$$w_3 = 2x_1 - x_2$$

Mit $1 \leq w_1 \leq 5, 2 \leq w_2 \leq 10, -\infty \leq w_3 \leq 0$

Halte die Schranken der Variablen im Dictionary fest!

Dictionary mit Schranken

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximize} & & & 3x_1 - x_2 & & \\
\text{subject to} & 1 & \leq & -x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
& 2 & \leq & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 10 \\
& & & 2x_1 - x_2 & \leq & 0 \\
& -2 & \leq & x_1 & & \\
& 0 & \leq & x_2 & \leq & 6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|rrrl}
l & & & \boxed{-2} & \boxed{0} & \\
& u & & \infty & 6 & \\
\hline
& & \zeta = & 3x_1 - & x_2 = & -6 \\
\hline
1 & 5 & w_1 = & -x_1 + & x_2 = & 2 \\
2 & 10 & w_2 = & -3x_1 + & 2x_2 = & 6 \\
-\infty & 0 & w_3 = & 2x_1 - & x_2 = & -4
\end{array}
$$

Die Nichtbasisvariablen waren implizit immer 0. Das funktioniert hier nicht mehr so einfach.
Wir müssen festhalten, ob sie die obere oder untere Schranke einhalten! (Markiert mit einer Box.)

Ist das angegebene Dictionary gültig?
Ist das angegebene Dictionary optimal?

Pivotschritt

$$\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximize} & & & 3x_1 - x_2 & & \\
\text{subject to} & 1 & \leq & -x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
& 2 & \leq & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 10 \\
& & & 2x_1 - x_2 & \leq & 0 \\
& -2 & \leq & x_1 & & \\
& 0 & \leq & x_2 & \leq & 6
\end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l}
l & & \qquad\quad \boxed{-2} \qquad \boxed{0} \\
 & u & \qquad\quad \infty \qquad\quad 6 \\
\hline
 & & \zeta = 3x_1 - x_2 = -6 \\
\hline
1 & 5 & w_1 = -x_1 + x_2 = 2 \\
2 & 10 & w_2 = -3x_1 + 2x_2 = 6 \\
-\infty & 0 & w_3 = 2x_1 - x_2 = -4
\end{array}$$

x_1 ist derzeit an der unteren Grenze und taucht positiv in ζ auf.
D.h. Eine Erhöhung von x_1 ist sinnvoll!

Was passiert, wenn x_1 erhöht wird?
→ Die w_i nähern sich ihrer oberen oder unteren Schranke!
Um wieviel können wir x_1 also erhöhen?

$\boxed{w_1 \geq 1 \Rightarrow x_1 \leq -1,}$ $\quad w_2 \geq 2 \Rightarrow x_1 \leq -\frac{2}{3}, \quad w_3 \leq 0 \Rightarrow x_1 \leq 2$

Pivotschritt – Recap

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximize} & & & 3x_1 - x_2 & & \\
\text{subject to} & 1 & \leq & -x_1 + x_2 & \leq & 5 \\
& 2 & \leq & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 10 \\
& & & 2x_1 - x_2 & \leq & 0 \\
& -2 & \leq & x_1 & & \\
& 0 & \leq & x_2 & \leq & 6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|rcl}
l & & & \boxed{1} \quad \boxed{0} & \\
& u & & 5 \quad\;\; 6 & \\
\hline
& & \zeta = & -3w_1 + 2x_2 & = -3 \\
\hline
-2 & \infty & x_1 = & -w_1 + x_2 & = -1 \\
2 & 10 & w_2 = & 3w_1 - x_2 & = 3 \\
-\infty & 0 & w_3 = & -2w_1 + x_2 & = -2
\end{array}
$$

Ist also das Pivot an der unteren Grenze, prüfe wie groß es werden darf, sodass alle aktuellen Basisvariablen noch in ihren Grenzen bleiben. Halte dabei im neuen Dictionary fest, ob die herausgehende Variable ihre obere oder untere Schranke angenommen hat.

Andersherum:
Ist das Pivot aktuell an der oberen Grenze, prüfe wie weit es kleiner werden darf.
Achtung: Das Pivot muss dann negativ in der Zielfunktion auftreten!

Alle Pivotschritte am Beispiel

$$
\begin{array}{rr|rcrcrcr}
l & & & & \boxed{-2} & & \boxed{0} & & \\
 & u & & & \infty & & 6 & & \\
\hline
 & & \zeta & = & 3x_1 & - & x_2 & = & -6 \\
\hline
1 & 5 & w_1 & = & -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\
2 & 10 & w_2 & = & -3x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\
-\infty & 0 & w_3 & = & 2x_1 & - & x_2 & = & -4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|rcrcrcr}
l & & & & \boxed{1} & & \boxed{0} & & \\
 & u & & & 5 & & 6 & & \\
\hline
 & & \zeta & = & -3w_1 & + & 2x_2 & = & -3 \\
\hline
-2 & \infty & x_1 & = & -w_1 & + & x_2 & = & -1 \\
2 & 10 & w_2 & = & 3w_1 & - & x_2 & = & 3 \\
-\infty & 0 & w_3 & = & -2w_1 & + & x_2 & = & -2
\end{array}
$$

Tausche x_1 mit w_1.

Alle Pivotschritte am Beispiel

$$
\begin{array}{cc|rcrcrcr}
l & & & & \boxed{1} & & \boxed{0} & & \\
& u & & & 5 & & 6 & & \\
\hline
& & \zeta & = & -3w_1 & + & 2x_2 & = & -3 \\
\hline
-2 & \infty & x_1 & = & -w_1 & + & x_2 & = & -1 \\
2 & 10 & w_2 & = & 3w_1 & - & x_2 & = & 3 \\
-\infty & 0 & w_3 & = & -2w_1 & + & x_2 & = & -2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc|rcrcrcr}
l & & & & \boxed{1} & & \boxed{2} & & \\
& u & & & 5 & & 10 & & \\
\hline
& & \zeta & = & 3w_1 & - & 2w_2 & = & -1 \\
\hline
-2 & \infty & x_1 & = & 2w_1 & - & w_2 & = & 0 \\
0 & 6 & x_2 & = & 3w_1 & - & w_2 & = & 1 \\
-\infty & 0 & w_3 & = & w_1 & - & w_2 & = & -1
\end{array}
$$

Degeneriert?!

Tausche x_2 mit w_2.

Ein Dictionary ist degeneriert, wenn eine Basisvariable eine seiner Schranken annimmt.

Alle Pivotschritte am Beispiel

$$
\begin{array}{rr|rcrcrcr}
l & & & & \boxed{1} & & \boxed{2} & & \\
 & u & & & 5 & & 10 & & \\
\hline
 & & \zeta & = & 3w_1 & - & 2w_2 & = & -1 \\
\hline
-2 & \infty & x_1 & = & 2w_1 & - & w_2 & = & 0 \\
0 & 6 & x_2 & = & 3w_1 & - & w_2 & = & 1 \\
-\infty & 0 & w_3 & = & w_1 & - & w_2 & = & -1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|rcrcrcr}
l & & & & -\infty & & \boxed{2} & & \\
 & u & & & \boxed{0} & & 10 & & \\
\hline
 & & \zeta & = & 3w_3 & + & w_2 & = & 2 \\
\hline
-2 & \infty & x_1 & = & 2w_3 & + & w_2 & = & 2 \\
0 & 6 & x_2 & = & 3w_3 & + & 2w_2 & = & 4 \\
1 & 5 & w_1 & = & w_3 & + & w_2 & = & 2
\end{array}
$$

Tausche w_1 mit w_3.

Alle Pivotschritte am Beispiel

$$
\begin{array}{cc|ccccccc}
l & & & & -\infty & & \boxed{2} & & \\
 & u & & & \boxed{0} & & 10 & & \\
\hline
 & & \zeta & = & 3w_3 & + & w_2 & = & 2 \\
\hline
-2 & \infty & x_1 & = & 2w_3 & + & w_2 & = & 2 \\
0 & 6 & x_2 & = & 3w_3 & + & 2w_2 & = & 4 \\
1 & 5 & w_1 & = & w_3 & + & w_2 & = & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc|ccccccc}
l & & & & -\infty & & 0 & & \\
 & u & & & \boxed{0} & & \boxed{6} & & \\
\hline
 & & \zeta & = & 1.5w_3 & + & 0.5x_2 & = & 3 \\
\hline
-2 & \infty & x_1 & = & 0.5w_3 & + & 0.5x_2 & = & 3 \\
2 & 10 & w_2 & = & -1.5w_3 & + & 0.5x_2 & = & 3 \\
1 & 5 & w_1 & = & -0.5w_3 & + & 0.5x_2 & = & 3
\end{array}
$$

Tausche w_2 mit x_2.

Phase I

Fragen

Wenn das initiale Dictionary nicht gültig ist, müssen wir eine Phase I starten.

Wie sieht das duale System aus?

Dualisieren allgemeiner LPs

Primal:

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad Ax \le b \\ &\qquad -Ax \le -a \\ &\qquad x \le u \\ &\qquad -x \le -\ell \end{aligned}$$

$\xrightarrow{\text{Inkl. Schlupf}}$

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad Ax + f = b \\ &\qquad -Ax + p = -a \\ &\qquad x + t = u \\ &\qquad -x + g = -\ell \\ &\qquad x \text{ free}, f, p, t, g \ge 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} &\min b^T v - a^T q + u^T s - \ell^T h \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad A^T(v - q) - (h - s) = c \\ &\qquad v, q, h, s \ge 0 \end{aligned}$$

Komplementärer Schlupf bei Optimalität: $f_i v_i = 0, p_i q_i = 0, t_j s_j = 0, g_j h_j = 0$

Herleitung eines (nicht) linearen Programms

Dual:

$$\boxed{\begin{aligned} &\min b^T v - a^T q + u^T s \ - \ell^T h \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad A^T(v-q) - (h-s) = c \\ &\qquad v,q,h,s \geq 0 \end{aligned}}$$

Wir definieren uns für eine Variable ξ: $\xi^+ \ := \max(\xi, 0)$ und $\xi^- \ := \max(-\xi, 0)$

Damit ist $\xi^+\xi^- = 0$ und $\xi^+ - \xi^- = \xi$.

Wenn wir also schreiben:

$$v = y^+, q = y^-, h = z^+, s = z^-$$

Erhalten wir

$$\boxed{\begin{aligned} &\min b^T y^+ - a^T y^- + u^T z^- - \ell z^+ \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad A^T y - z = c \end{aligned}}$$

Ein nicht-lineares Programm als duales

$$\boxed{\begin{aligned}&\max c^T x\\&\text{s.t.}\\&\qquad a \le Ax \le b\\&\qquad \ell \le x \le u\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\min b^T y^+ - a^T y^- + u^T z^- - \ell z^+\\&\text{s.t.}\\&\qquad A^T y - z = c\end{aligned}}$$

Das dargestellte duale Programm wird auch **stückweise lineares Programm** genannt.

Ein nicht-lineares Programm als duales

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximize} & & & 2x_1 & - & x_2 & & \\
\text{subject to} & 0 & \leq & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & 2 & \leq & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & & & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -2 & \leq & x_1 & & & & \\
 & 1 & \leq & & & x_2 & \leq & 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\text{minimize} & 6y_1^+ + 10y_2^+ & & + \ 2z_1^+ & - \ z_2^+ & \\
 & \quad - \ 2y_2^- & + \infty y_3^- & + \infty z_1^- & + 5z_2^- & \\
\text{subject to} & y_1 - \ y_2 + & y_3 - & z_1 & & = 2 \\
 & y_1 + \ 2y_2 - & y_3 - & & z_2 & = -1
\end{array}$$

Konvention:

$$\infty \cdot a = \begin{cases} -\infty, & wenn\ a < 0 \\ 0, & wenn\ a \\ \infty, & wenn\ a > 0 \end{cases}$$

Duales Dictionary

$$-\xi = -6y_1^+ - 10y_2^+ - 2z_1^+ + z_2^+ + 2y_2^- - \infty y_3^- - \infty z_1^- - 5z_2^-$$

Im Dictionary haben wir

$$\begin{aligned} z_1 &= -2 + y_1 - y_2 + y_3 \\ z_2 &= 1 + y_1 + 2y_2 - y_3 \end{aligned}$$

Das ist für $z_1 = -2$ nicht gültig: $z_1 < 0 \Rightarrow z_1^- > 0 \Rightarrow -\xi = -\infty$!

Um eine gültige Lösung zu finden, ändern wir die primale Zielfunktion ab: $\eta = -2x_1 - x_2$
Damit erhalten wir ein gültiges, duales Dictionary.

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 + y_1 - y_2 + y_3 \\ z_2 &= 1 + y_1 + 2y_2 - y_3 \end{aligned}$$

Duales Dictionary

$$
\begin{aligned}
-\xi &= -6y_1^+ - 10y_2^+ - 2z_1 + z_2 + 2y_2^- - \infty y_3^- \\
z_1 &= \quad 2 + \quad y_1 - \quad y_2 + \quad y_3 \\
z_2 &= \quad 1 + \quad y_1 + \quad 2y_2 - \quad y_3
\end{aligned}
$$

Um zu entscheiden, ob wir y_1, y_2, y_3 in die Basis tauschen, müssen wir jeweils unterscheiden, ob sie negativ, oder positiv werden. Wie verändert sich dann die Zielfunktion?

- Erhöhe y_1: $-6 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = -7 < 0$
- Verringere y_1: $-(-2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 1 > 0 \Longrightarrow$ Verbessert unsere Zielfunktion
- Erhöhe y_2: $-10 - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -6 < 0$
- Verringere y_2: $2 - (-2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) = -2 < 0$
- Erhöhe y_3: $0 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -3 < 0$
- Verringere y_3: $-\infty - \big(-2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)\big) = -\infty < 0$

Pivotschritt

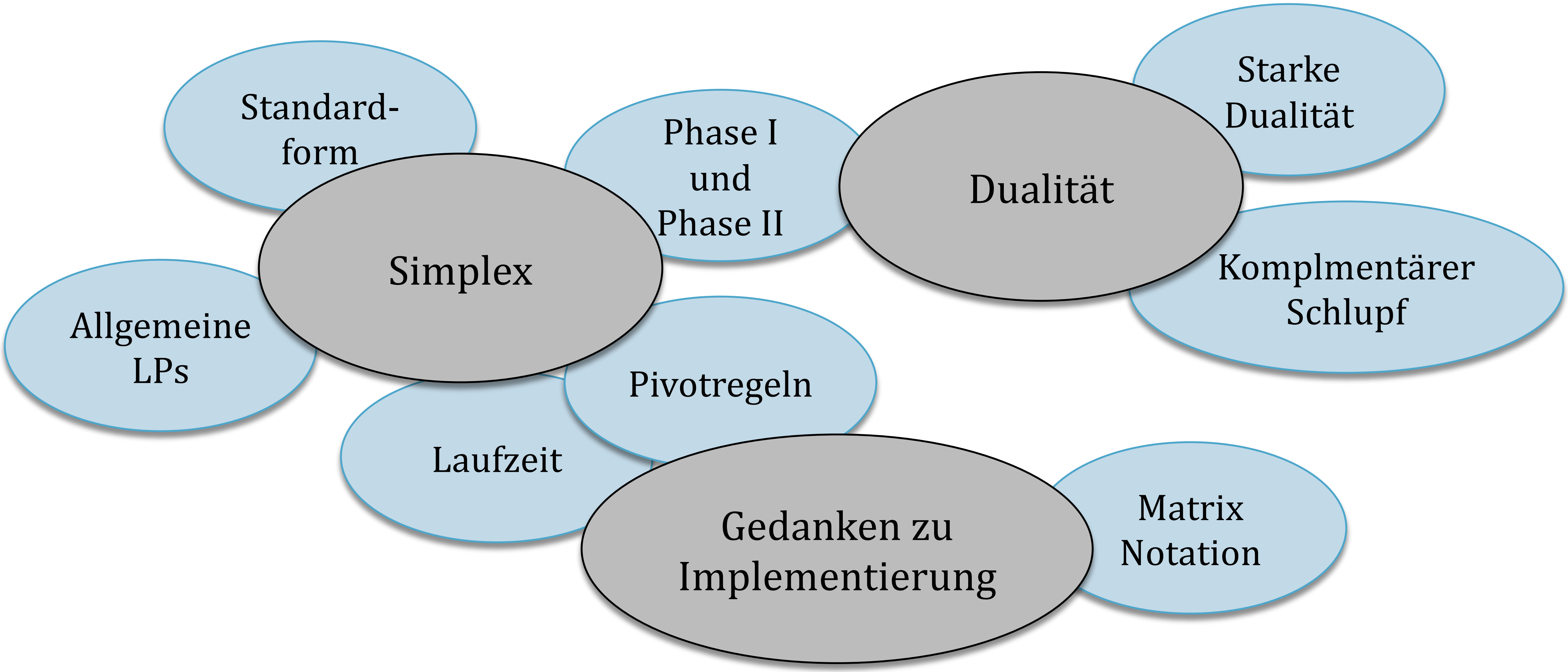
$$
\begin{aligned}
-\xi &= -6y_1^+ - 10y_2^+ - 2z_1 + z_2 + 2y_2^- - \infty y_3^- \\
z_1 &= 2 + y_1 - y_2 + y_3 \\
z_2 &= 1 + y_1 + 2y_2 - y_3
\end{aligned}
$$

Wir tauschen also y_1 rein durch Verkleinern. Dadurch erreicht z_2 zuerst die 0. Damit:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 1 + z_2 - 3y_2 + 2y_3 \\
y_1 &= -1 + z_2 - 2y_2 - y_3
\end{aligned}
$$

Im primalen geht nun x_2 rein und w_1 raus.
Für w_1 gilt außerdem: $y_1^- > 0 \Rightarrow q_1 > 0 \Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow w_1 = a_1$.
Nimmt also die untere Schranke an.

Was bisher geschah...



Ausblick

Viele Probleme erfordern ganzzahlige Lösungen.

Nächste Woche: Wie findet man optimale, ganzzahlige Lösungen.

Danach: Wie lassen sich andere Probleme lösen? Gibt es allgemeine Techniken?

Gibt es einen Unterschied zwischen Problemen, die NP-schwer sind oder die effizient lösbar sind?