Übung 3

- Phase 1 mit $b \not\geq 0$, $c \not\leq 0$
- Modellieren und Dualisieren.

Betrachte folgendes Dictionary

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta &= 0 + 1x_1 - 2x_2 + 1x_3 \\ w_1 &= -1 - 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \\ w_2 &= 2 + 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 \end{aligned}}$$

Es gilt $b \not\geq 0$ und $c \not\leq 0$. Wir brauchen also eine Phase I.

$\Rightarrow$ Ersetze b durch nicht-neg. Einträge. Bspw. $\binom{1}{1}$ und führe dann primalen Simplex durch.

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta &= 0 + 1x_1 - 2x_2 + 1x_3 \\ w_1 &= 1 - 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 \\ w_2 &= 1 + 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 \end{aligned}} \xrightarrow{x_1 \leftrightarrow w_1} \boxed{\begin{aligned} \zeta &= 1 - 1w_1 - 1x_2 - 0x_3 \\ x_1 &= 1 - 1w_1 + 1x_2 - 1x_3 \\ w_2 &= 2 - 1w_1 \qquad\quad - 2x_3 \end{aligned}}$$

Optimales Dictionary $\Rightarrow$ Phase I fertig

Alte, duale ZF: $-\xi = 0 + y_1 - 2y_2$

nun ist $\quad y_1 = \boxed{1 + z_1 + y_2}$

$$-\xi = 1 + 1z_1 - 1y_2$$

Zurücktragen in das Dictionary (Achte auf Vorzeichen!):

②

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta &= -1 - w_1 - x_2 - 0x_3 \\ x_1 &= -1 - w_1 + x_2 - x_3 \\ w_2 &= 1 - w_1 \qquad\;\; - 2x_3 \end{aligned}}$$

Dual zulässig!

$\Rightarrow$ Wende dualen Simplex an!

$\Rightarrow$ Pivotisiere über x_1, x_2

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta &= -2 - 2w_1 - x_1 - x_3 \\ x_2 &= 1 + w_1 + x_1 + x_3 \\ w_2 &= 1 - w_1 \qquad\;\; - 2x_3 \end{aligned}}$$

Dual und primal zulässig

$\hookrightarrow$ opt gefunden.

Modellierung

Gegeben: Vollständiger bipartiter Graph $G = (V_1 \dot\cup V_2, E)$
mit $n := |V_1|$, $m := |V_2|$,

$c: E \to \mathbb{R}^+$ eine Kantenkostenfunktion

$a: V_1 \to \mathbb{R}^+$ eine Angebotsfunktion

$k: V_2 \to \mathbb{R}^+$ eine Konsumfunktion.

Annahme: $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} k_j$

Gesucht: Menge $M \subseteq E$, und Fkt. $x: E \to \mathbb{R}^+$ sodass $\sum_{e \in M} c_e x_e$ minimal und $\sum_{e \in \delta(j)} x_e = k_j \; \forall j \in V_2$ und $\sum_{e \in \delta(i)} x_e = a_i \; \forall i \in V_1$

Modelliere dieses Problem als LP. Gib das duale LP an.

$$\begin{aligned} \min \; & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s.t.} \; & \sum_{e \in \delta(i)} x_e = a_i \quad \forall i \in V_1 \\ & \sum_{e \in \delta(j)} x_e = k_j \quad \forall j \in V_2 \\ & x_e \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \; & \sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{j=1}^{m} k_j u_j \\ \text{s.t.} \; & y_i + u_j \leq c_{ij} \quad \forall \{i,j\} \in E \\ & y_i, u_j \text{ frei} \quad \forall i \in V_1, j \in V_2 \end{aligned}$$

Durch das Duale:

Um eine Kante überhaupt für Transport nutzen zu dürfen, muss die Kante gedeckt sein ($y_i + u_j = c_{ij}$). ~~Wenn also Angebot/ Nachfrage gr~~

Schauen wir uns einen Spezialfall an:

$n = m$, $a_i = 1 \ \forall i \in V_1$, $k_j = 1 \ \forall j \in V_2$, $V = V_1 \cup V_2$

Also

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e \qquad \text{s.t.} \quad \sum_{e \in \delta(i)} x_e = 1 \quad \forall i \in V = V_1 \cup V_2, \qquad x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$$

$$\max \sum_{i \in V} y_i \qquad \text{s.t.} \quad y_i + y_j \leq c_{ij} \quad \forall \{i,j\} \in E, \qquad y_i \text{ frei} \quad \forall i \in V$$

Welches Problem steckt dahinter?

$\rightarrow$ Min Cost Perfect Matching ... Zumindest, wenn $x_e \in \{0,1\}$

Zeige oder widerlege: Es gibt eine opt. Lösung x des LPs, sodass für alle $e \in E$ gilt: $x_e = 0$ oder $x_e = 1$.

Sketch: Betrachte Graph mit $x_e \neq 0$, $x_e \neq 1$ und ohne isolierte Knoten.

$\Rightarrow$ Jeder Knotengrad ist mind. 2.

$\Rightarrow$ Es existiert Kreis $C = \{e_1, \dots, e_k\}$ mit $k \% 2 = 0$ (da bipartit)

Sei $\lambda = \min_{e \in C}(x_e)$ und betrachte

(A) $x_e^A := \begin{cases} x_e + \lambda, & \text{falls } e \text{ gerader Index in } C \\ x_e - \lambda, & \text{falls } e \text{ ungerader Index in } C \end{cases}$, $x_e^A = c_e$ falls $e \notin C$

(B) $x_e^B := \begin{cases} x_e - \lambda, & \text{falls } e \text{ gerader Index in } C \\ x_e + \lambda, & \text{falls } e \text{ ungerader Index in } C \end{cases}$, $x_e^B = c_e$ falls $e \notin C$

Beobachtung:

(A) und (B) ~~sind~~ sind immer noch gültige Lösungen des LP.

Außerdem ist x eine konv. Kombination aus x^A und x^B:

$$x_e = \frac{1}{2} x_e^A + \frac{1}{2} x_e^B = \frac{1}{2}(x_e \pm \lambda) + \frac{1}{2}(x_e \mp \lambda) = x_e .$$

Damit muss

$$\sum_{e \in E} c_e x_e^A \leq \sum_{e \in E} c_e x_e \quad \text{oder} \quad \sum_{e \in E} c_e x_e^B \leq \sum_{e \in E} c_e x_e \quad \text{gelten.}$$

Annahme: x^A ist teurer als x $\Rightarrow$ x^B ist günstiger als x

$\Rightarrow$ x war nicht optimal!

Analog für x^B.

$\Rightarrow$ x^A, x, x^B sind gleich teuer!

$\Rightarrow$ Modifiziere Lösung, sodass eine Kante weniger genutzt wird und wiederhole Prozess.

$\Rightarrow$ Es muss eine ganzzahlige optimale (Basis-)Lösung existieren.

Noch etwas stärker aus der Argumentation:

<u>Jede</u> optimale Basislösung ist ganzzahlig!