Technische Universität Braunschweig

# Algorithmen und Datenstrukturen – Übung #4

## Dynamische Datenstrukturen

Ramin und Chek-Manh

12.12.2024

# Programm heute

Verkettete Listen

Ganz schnell Eulertouren finden

Binäre Suchbäume

Operationen auf binären Suchbäumen

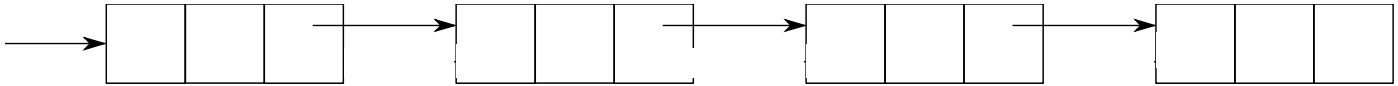
Binäre Suchbäume mergen

AVL-Bäume

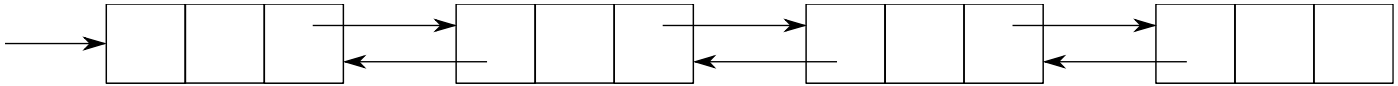
# (Zyklisch) Verkettete Listen

# Listen

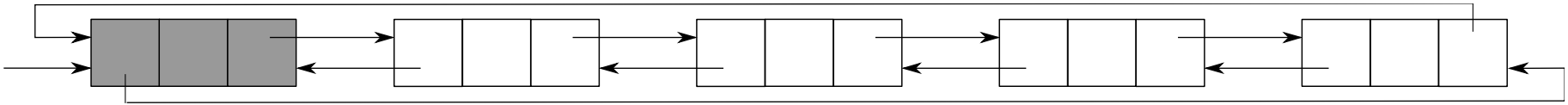
Einfach verkettet:



Doppelt verkettet:

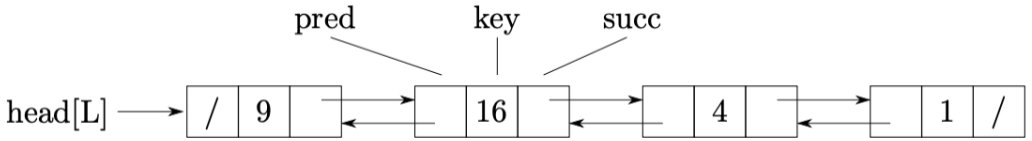


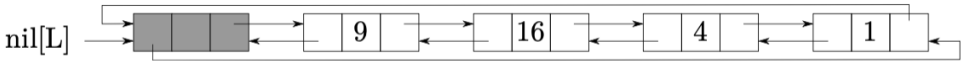
Zyklisch doppelt verkettet (mit Wächter):



# Wächter

```
1: function LISTE-DELETE(L, x)
2:     if pred[x] ≠ NIL then
3:         succ[pred[x]] ← succ[x]
4:     else
5:         head[L] ← succ[x]
6:     if succ[x] ≠ NIL then
7:         pred[succ[x]] ← pred[x]
```




```
1: function LIST-DELETE'(L, x)
2:     succ[pred[x]] ← succ[x]
3:     pred[succ[x]] ← pred[x]
```

# Laufzeiten in Listen

| Operation | Einfach | Doppelt | Zyklisch |
|---|---|---|---|
| Suchen | $O(n)$ | $O(n)$ | $O(n)$ |
| Einfügen | $O(1)$ | $O(1)$ | $O(1)$ |
| Löschen | $O(n)$ | $O(1)$ | $O(1)$ |
| Merge* | $O(1)$** | $O(1)$** | $O(1)$ |

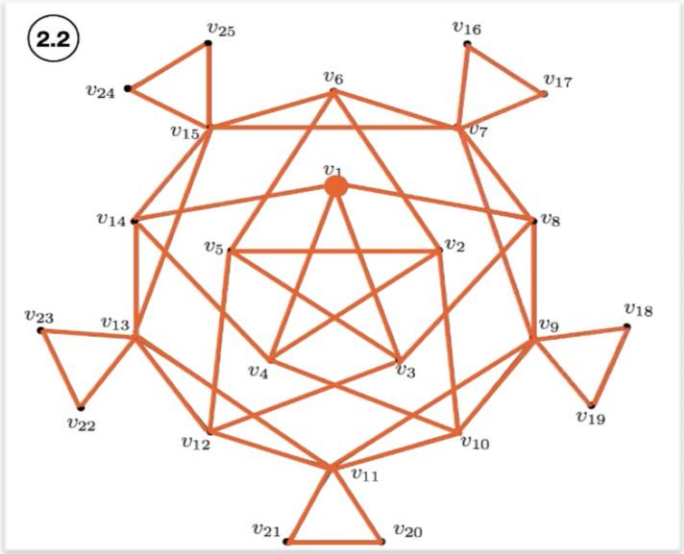
*: Verschmelze zwei Listen der Größe $n$ und $m$.
**: Sofern Adresse des letzten Elements bekannt. Andernfalls $O(\min(n, m))$.

# Eulertouren

Zwei Algorithmen zum Finden von Eulertouren

**Fleury**
- Laufe Kanten ab, sodass stets der Zusammenhang erhalten bleibt
- Finde Weg auf einmal, ohne Stift abzusetzen
- Bekannt aus den Hausaufgaben :)

# Eulertouren

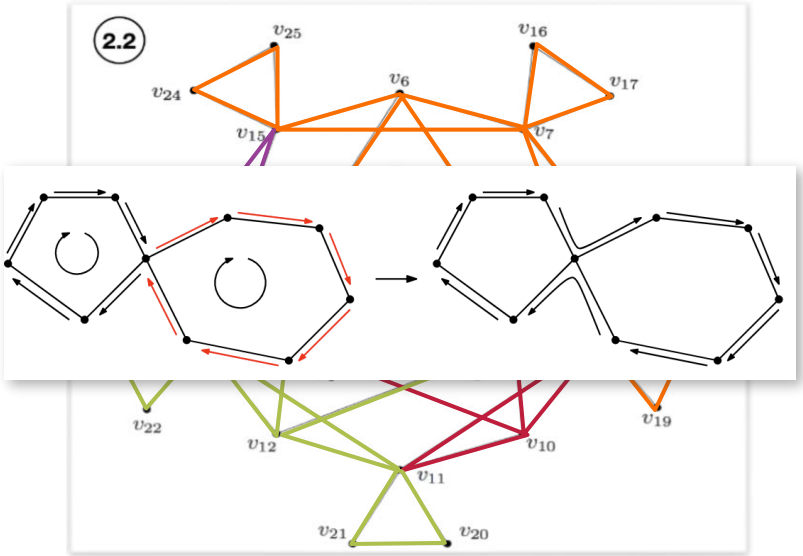



Zwei Algorithmen zum Finden von Eulertouren

**Fleury**

- Laufe Kanten ab, sodass stets der Zusammenhang erhalten bleibt
- Finde Weg auf einmal, ohne Stift abzusetzen
- Bekannt aus den Hausaufgaben :)

# Eulertouren




Zwei Algorithmen zum Finden von Eulertouren

**Fleury**
- Laufe Kanten ab, sodass stets der Zusammenhang erhalten bleibt
- Finde Weg auf einmal, ohne Stift abzusetzen
- Bekannt aus den Hausaufgaben :)

**Hierholzer**
- Finde immer wieder Wege in der Menge der noch nicht benutzten Kanten
- Merge diese neuen Wege mit dem schon existierenden Weg, bis alle Kanten genutzt sind

# Laufzeiten

**Algorithmus**

**Laufzeit**

1. https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/335305.335345

# Laufzeiten

| Algorithmus | Fleury | Fleury (mit Optimierungen)[1] | Hierholzer |
|---|---|---|---|
| Laufzeit | $O(m^2)$ | $O(m(\log m)^3 \log\log m)$ | $O(m)$ |

1. https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/335305.335345

# Laufzeiten

# Laufzeiten

| Algorithmus | Fleury | Fleury (mit Optimierungen)[1] | Hierholzer |
|---|---|---|---|
| Laufzeit | $O(m^2)$ | $O(m(\log m)^3 \log\log m)$ | $O(m)$ |

Wie genau soll das gehn?

→ Dafür müssen wir etwas an den Details feilen … und schlau Datenstrukturen nutzen

1. https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/335305.335345

# Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

**Eingabe:** Zusammenhängender Graph $G$ mit höchstens 2 ungeraden Knoten

**Ausgabe:** Ein Eulerweg, bzw. eine Eulertour in $G$

1: starte in einem Knoten $v$
   (wenn einer mit ungeradem Grad existiert, dort, sonst beliebig)
2: verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg $W$ von $v$ aus zu bestimmen
3: **while** es existieren unbenutzte Kanten **do**
4:  wähle einen Knoten $w$ aus $W$ mit positivem Grad im Restgraphen
5:  verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg $W'$ von $w$ aus zu bestimmen
6:  verschmelze $W$ und $W'$

**Algorithmus 2.8:** Hierholzers Algorithmus zum Finden eines Eulerweges oder einer Eulertour

○ $O(n+m)$ □ $O(m)$? △ $O(n+m)$? ◇ $O(|W|+|W'|)$?

# Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

**Eingabe:** Graph $G$

**Ausgabe:** Ein Weg in $G$

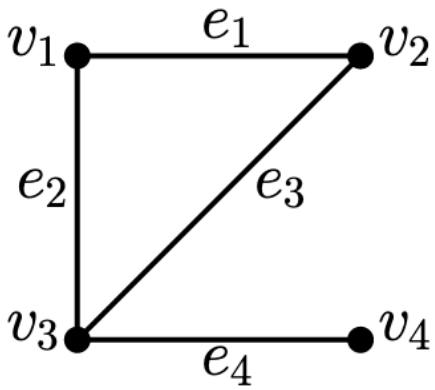
1: starte in einem Knoten $v_0$
   (wenn einer mit ungeradem Grad existiert, dort, sonst beliebig)
2: $i \leftarrow 0$
3: **while** es gibt eine zu $v_i$ inzidente, unbenutzte Kante **do**
4: wähle eine zu $v_i$ inzidente, unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$
5: laufe zum Nachbarknoten $v_j$
6: lösche $\{v_i, v_j\}$ aus der Menge der unbenutzten Kanten
7: $v_{i+1} \leftarrow v_j$
8: $i \leftarrow i + 1$

**Algorithmus 2.7:** Algorithmus zum Finden eines Weges in einem Graphen

Können wir einen Weg $W$ in $O(|W|)$ Zeit bestimmen? Ideen?

# Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Benutze Adjazenzliste und doppelt verkettete Listen.




$v_1$: $v_2, v_3$

$v_2$: $v_3, v_1$

$v_3$: $v_1, v_2, v_4$

$v_4$: $v_3$

# Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Benutze Adjazenzliste und doppelt verkettete Listen.

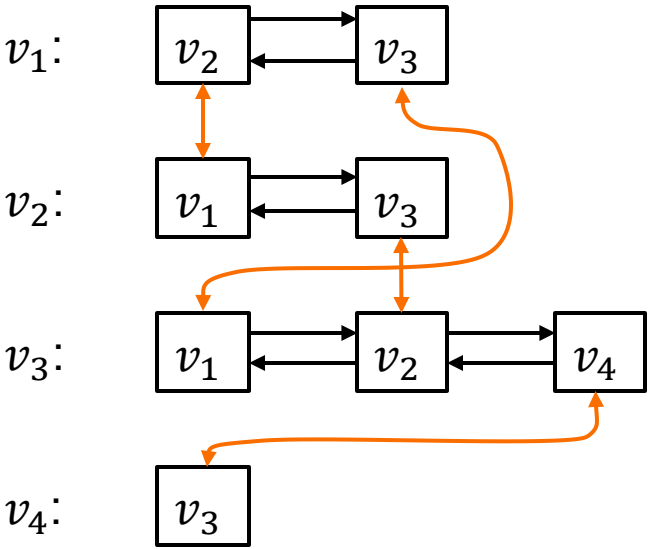
Verwende zusätzliche Pointer für gleiche Kanten.

$v_1$: $v_2, v_3$

$v_2$: $v_3, v_1$

$v_3$: $v_1, v_2, v_4$

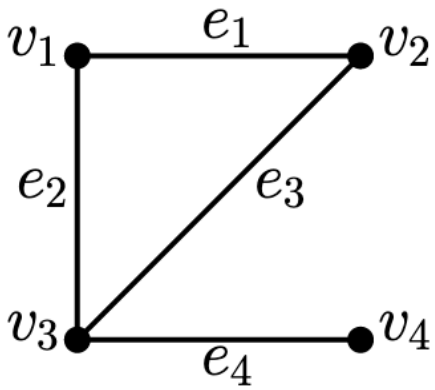
$v_4$: $v_3$

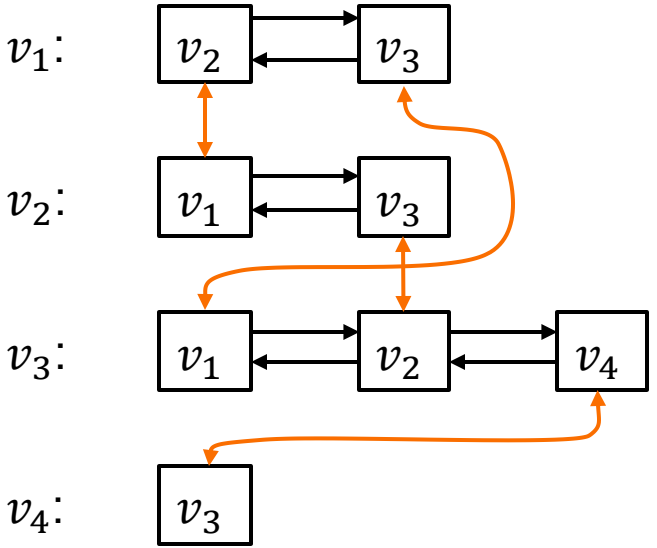


# Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Benutze Adjazenzliste und doppelt verkettete Listen.

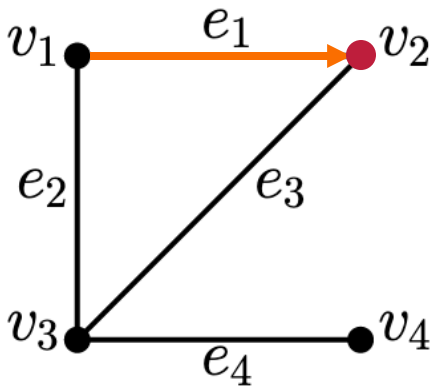
Verwende zusätzliche Pointer für gleiche Kanten.

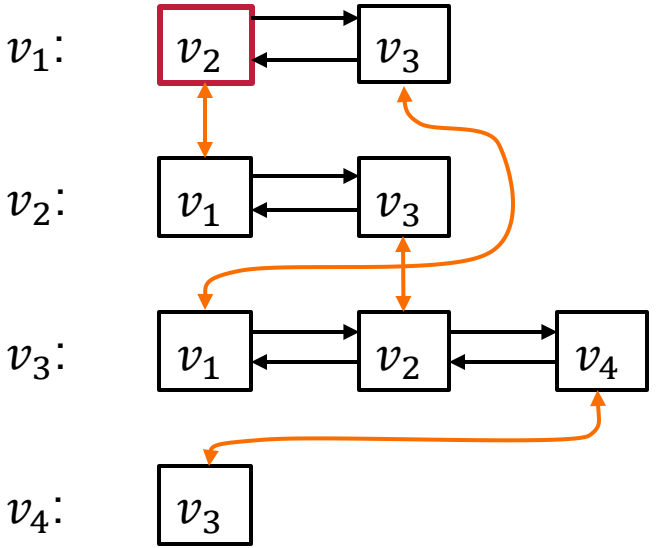


# Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

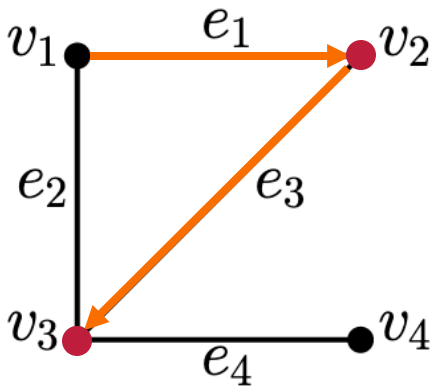
Starte bei $v_1$ und gehe zum nächsten Knoten.
Lösche die Kante aus der Adjazenzliste.
Alle Operationen kosten $O(1)$ Zeit.

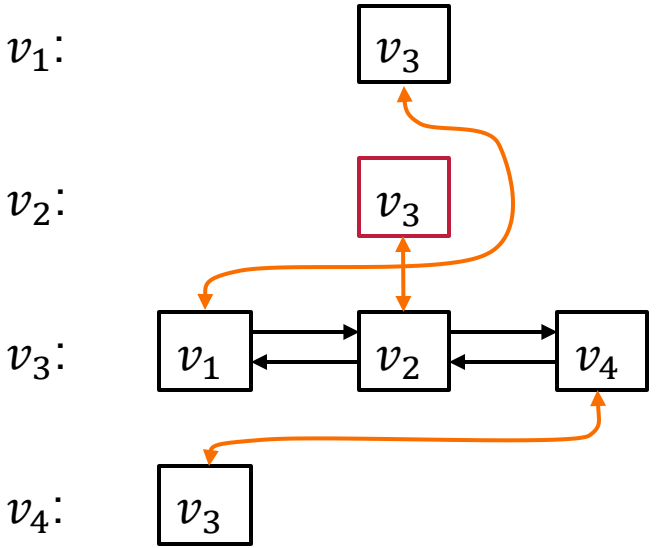


# Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

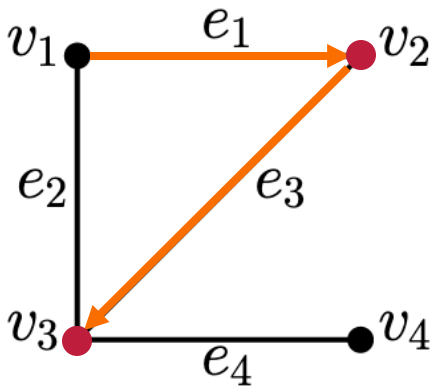
Starte bei $v_1$ und gehe zum nächsten Knoten.
Lösche die Kante aus der Adjazenzliste.
Alle Operationen kosten $O(1)$ Zeit.

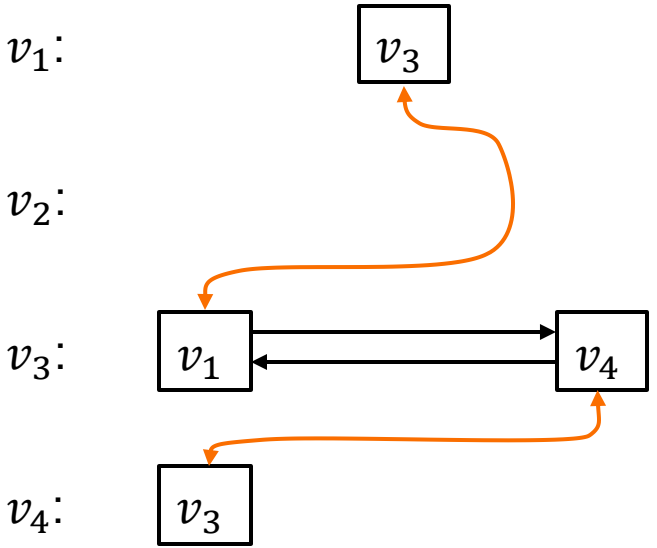


# Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Starte bei $v_1$ und gehe zum nächsten Knoten.
Lösche die Kante aus der Adjazenzliste.
Alle Operationen kosten $O(1)$ Zeit.



# Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

**Eingabe:** Zusammenhängender Graph $G$ mit höchstens 2 ungeraden Knoten

**Ausgabe:** Ein Eulerweg, bzw. eine Eulertour in $G$

1: starte in einem Knoten $v$
   (wenn einer mit ungeradem Grad existiert, dort, sonst beliebig)
2: verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg $W$ von $v$ aus zu bestimmen
3: **while** es existieren unbenutzte Kanten **do**
4:  wähle einen Knoten $w$ aus $W$ mit positivem Grad im Restgraphen
5:  verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg $W'$ von $w$ aus zu bestimmen
6:  verschmelze $W$ und $W'$

**Algorithmus 2.8:** Hierholzers Algorithmus zum Finden eines Eulerweges oder einer Eulertour

○ $O(n+m)$ □ $O(m)$? △ $O(n+m)$? ◇ $O(|W|+|W'|)$?

# Laufzeit Hierholzer-Algorithmus

Nutze für die Eulertour/den Eulerweg auch eine zyklische, doppelt verkettete Liste.

Damit:

- Kosten für das Verschmelzen: $O(1)$
- Nächsten Startknoten suchen: $O(m)$ über alle Iterationen

Damit ist die Laufzeit also:

$$O(n+m) + O(m) + \sum_{\text{Wege } W} O(|W|) = O(n+m) + O(m) + O(m) = O(m)$$

Ersten Startknoten suchen

Weitere Startknoten suchen

Finden und Verschmelzen aller Wege

Da Graph zusammenhängend (also $n \leq m$)

# Binäre Suchbäume

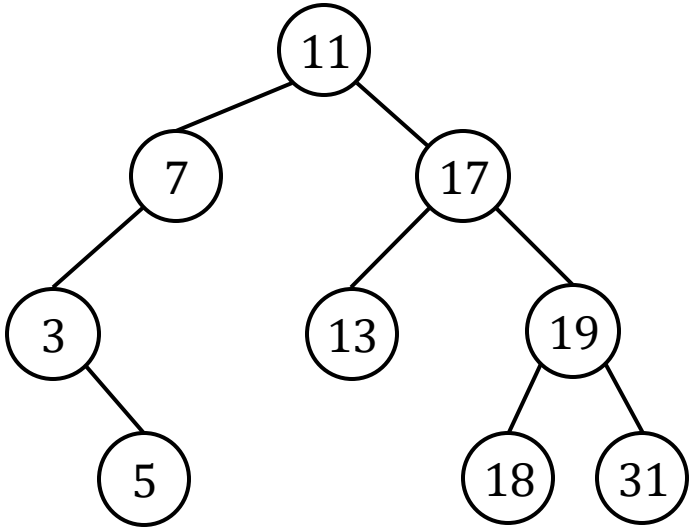
# Bin. Suchbäume

Anstatt einen Nachfolger (Liste), benutze zwei:

- Ein linkes Kind ($l[v]$)
- Ein rechtes Kind ($r[v]$)

Verwalte zudem eine Totalordnung der Elemente:

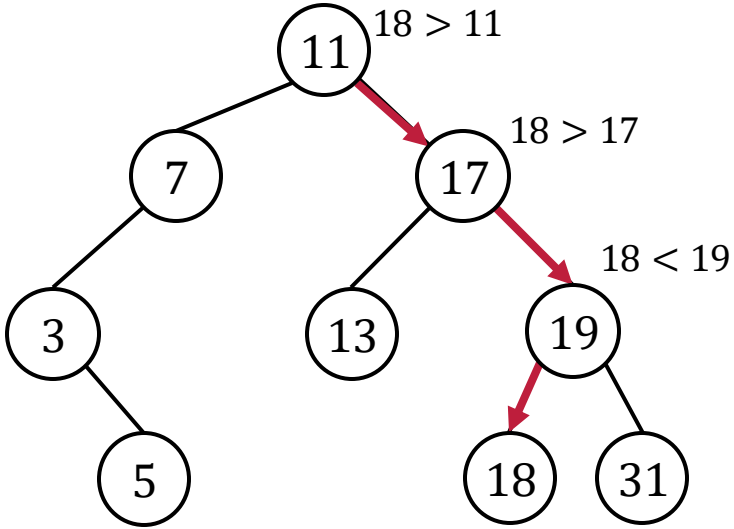
- Schlüssel im linken Teilbaum sind kleiner
- Schlüssel im rechten Teilbaum sind größer




Beispiel:
Füge folgende Sequenz von Zahlen in einen bin. Suchbaum ein:
11, 17, 13, 19, 7, 3, 31, 18, 5

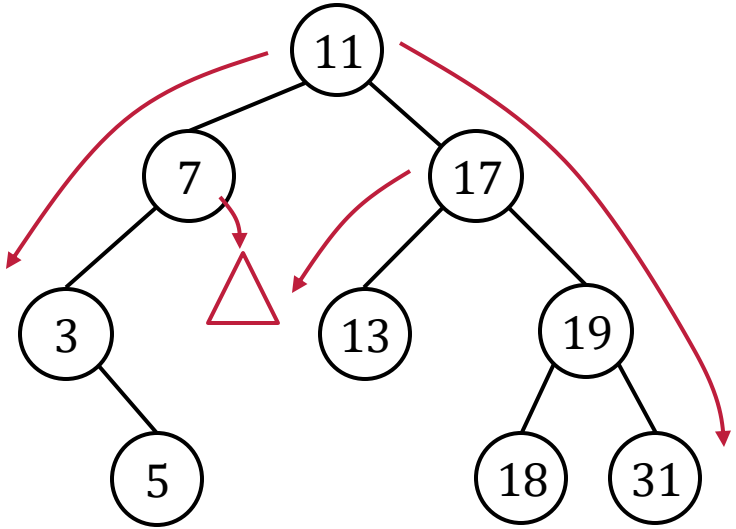
# Operationen

- Insert
- Search
  - search(18)



# Operationen

- Insert (eben gesehen)
- Search
  - search(18)
- Minimum und Maximum
  - $\max(11)^* = 31$
  - $\min(11)^* = 3$
    - *Teilbäume sind auch wieder Bäume!*
  - $\min(17)^* = 13$
  - $\max(7)^* = 7$

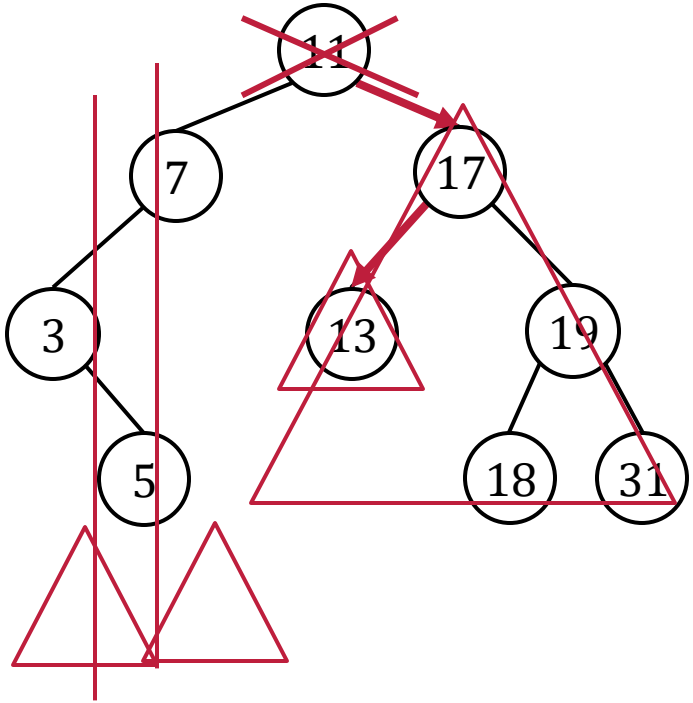





*in slight abuse of notation. Korrekterweise übergibt man natürlich den *Pointer* zu dem entsprechenden (Teil)-Baum und nicht einfach den Schlüssel, der dort gespeichert ist. Diese Schreibweise dient hier nur Anschauungszwecken :)

# Operationen

- Insert (eben gesehen)
- Search
  - search(18)
- Vorgänger (pred)/Nachfolger (succ)
  - succ(11)* =
  - pred(17)* =
  - pred(5)* =
  - succ(5)* =
- Delete
  - Delete*(11)

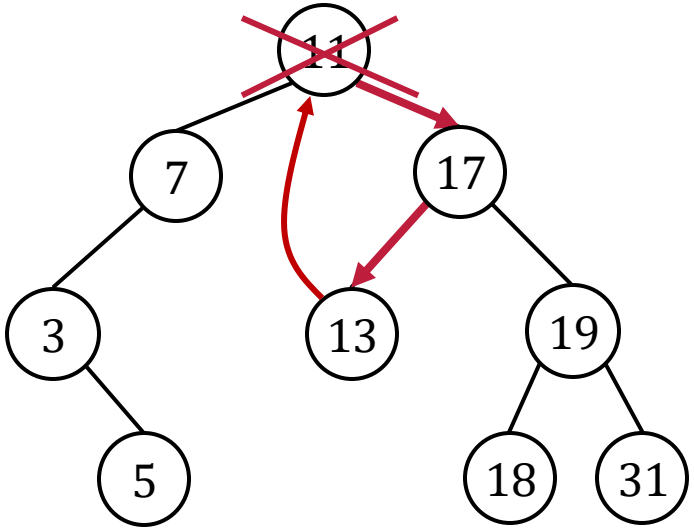





*in slight abuse of notation. Korrekterweise übergibt man natürlich den *Pointer* zu dem entsprechenden (Teil)-Baum und nicht einfach den Schlüssel, der dort gespeichert ist. Diese Schreibweise dient hier nur Anschauungszwecken :)

# Operationen

- Insert (eben gesehen)
- Search
  - search(18)
- Vorgänger (pred)/Nachfolger (succ)
  - $succ(11)^* = 13$
  - $pred(17)^* = 13$
  - $pred(5)^* = 3$
  - $succ(5)^* = 7$
- Delete
  - $Delete^*(11)$






*in slight abuse of notation. Korrekterweise übergibt man natürlich den *Pointer* zu dem entsprechenden (Teil)-Baum und nicht einfach den Schlüssel, der dort gespeichert ist. Diese Schreibweise dient hier nur Anschauungszwecken :)

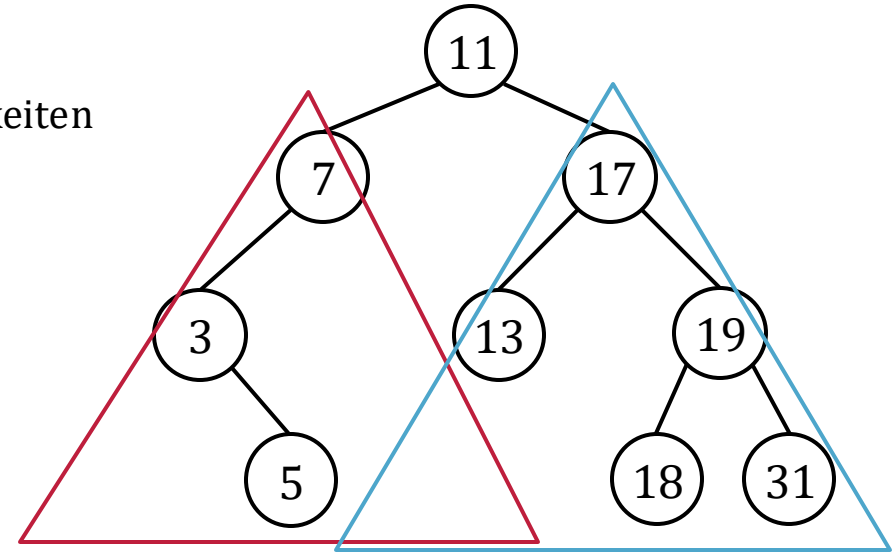
# Traversierung

Wie durchläuft man einen binären Suchbaum?

Man unterscheidet unter anderem drei Möglichkeiten

- **Inorder** (Links, Wurzel, Rechts)
  - 3, 5, 7, 11, 13, 17, 18, 19, 31
- **Preorder** (Wurzel, Links, Rechts)
  - 11, 7, 3, 5, 17, 13, 19, 18, 31
- **Postorder** (Links, Rechts, Wurzel)
  - 5, 3, 7, 13, 18, 31, 19, 17, 11

$$h(v) = \max\big(h(l[v]), h(r[v])\big) + 1$$
$$h(\mathrm{NIL}) = 0$$



# Traversierung

Dank der Baumstruktur kann man das ganz einfach als Algorithmus aufschreiben.

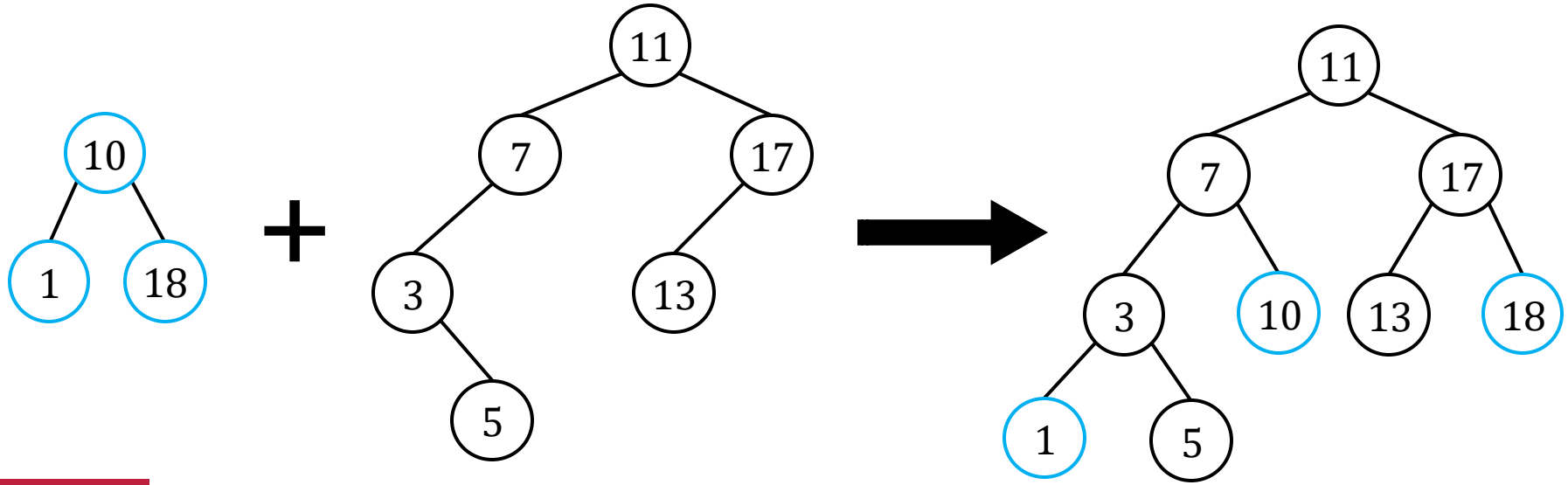
| Inorder | Postorder | Preorder |
|---|---|---|
| **function** INORDER$(v)$<br>  **if** $(v \neq \text{NIL})$<br>  INORDER$(l(v))$<br>  **print** S$(v)$<br>  INORDER$(r(v))$ | **function** POSTORDER$(v)$<br>  **if** $(v \neq \text{NIL})$<br>  POSTORDER$(l(v))$<br>  POSTORDER$(r(v))$<br>  **print** S$(v)$ | **function** PREORDER$(v)$<br>  **if** $(v \neq \text{NIL})$<br>  **print** S$(v)$<br>  PREORDER$(l(v))$<br>  PREORDER$(r(v))$ |

# Verschmelzen von binären Suchbäumen

# Merge – Das Problem

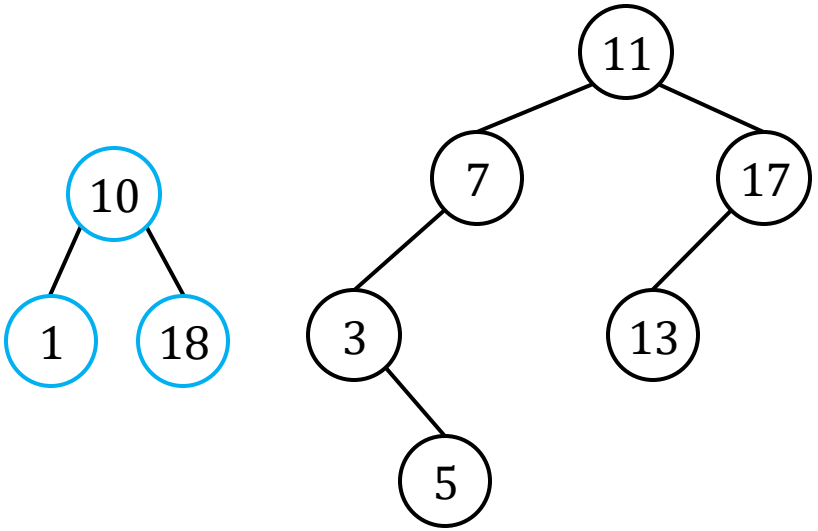
**Gegeben**: Zwei binäre Suchbäume mit $n$ bzw. $m$ Elementen.
**Aufgabe**: Konstruiere daraus einen Suchbaum mit $n + m$ Elementen.

Wie (schnell) geht das?



# Merge – Ideen und Schranken

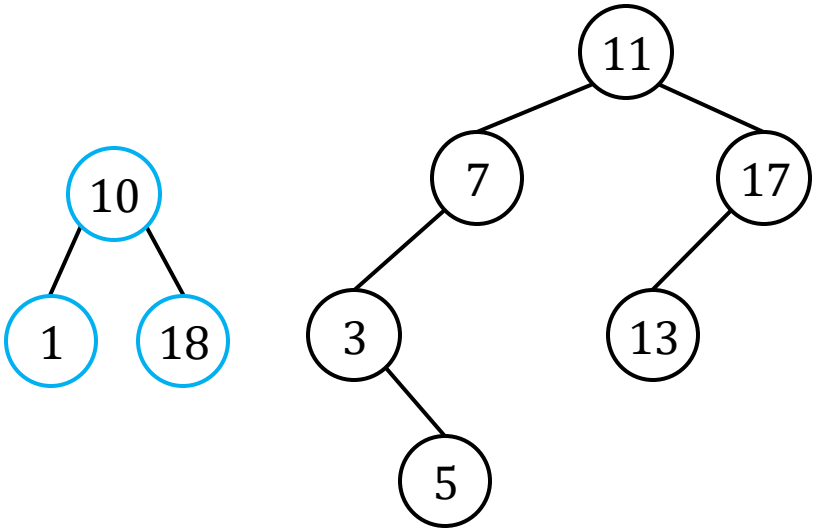
**Idee**



# Merge – Ideen und Schranken

**Idee**

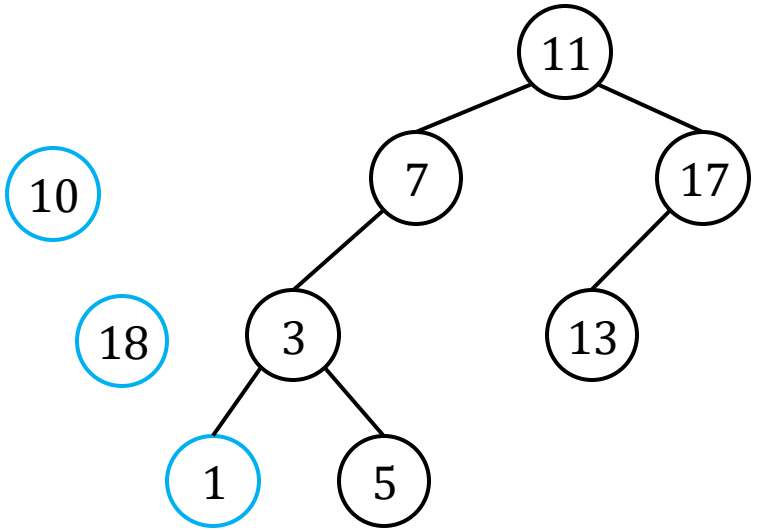
Für jeden Schlüssel $S$ im ersten Suchbaum: Füge $S$ in den zweiten Suchbaum ein.



# Merge – Ideen und Schranken

**Idee**

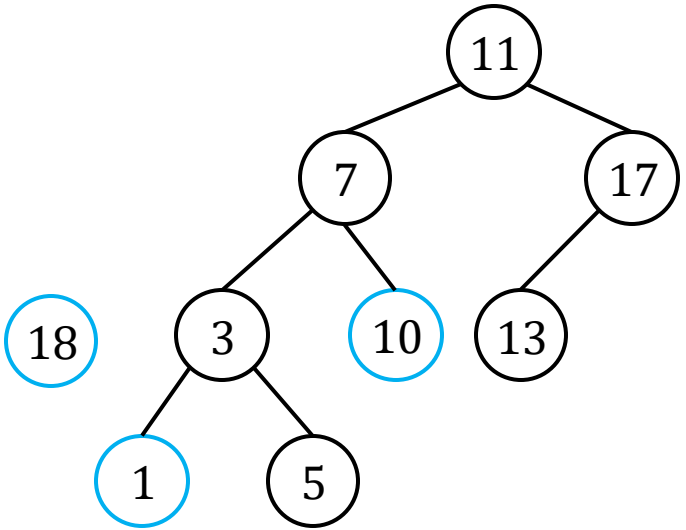
Für jeden Schlüssel $S$ im ersten Suchbaum: Füge $S$ in den zweiten Suchbaum ein.



# Merge – Ideen und Schranken

**Idee**

Für jeden Schlüssel $S$ im ersten Suchbaum: Füge $S$ in den zweiten Suchbaum ein.



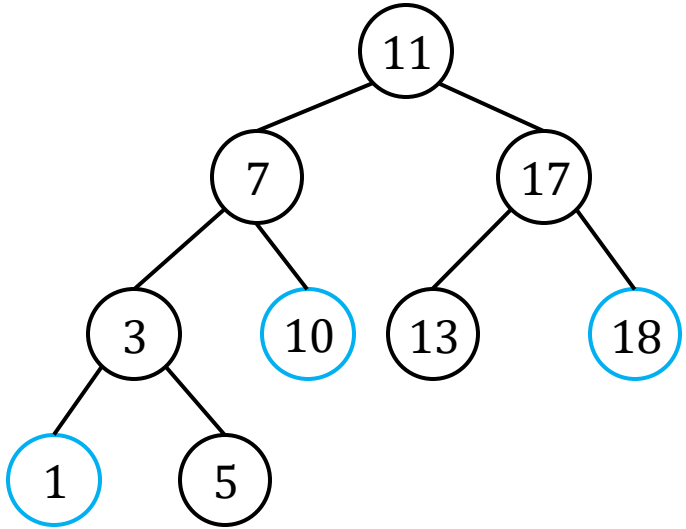
# Merge – Ideen und Schranken

**Idee**

Für jeden Schlüssel $S$ im ersten Suchbaum: Füge $S$ in den zweiten Suchbaum ein.

**Laufzeit**

Jeder Schlüssel $n$ muss in den zweiten Suchbaum der Höhe $h_m$ eingefügt werden.
Entsprechend erhalten wir $O(n \cdot h_m)$, sowie $O(n \cdot m)$ im Worst-Case.



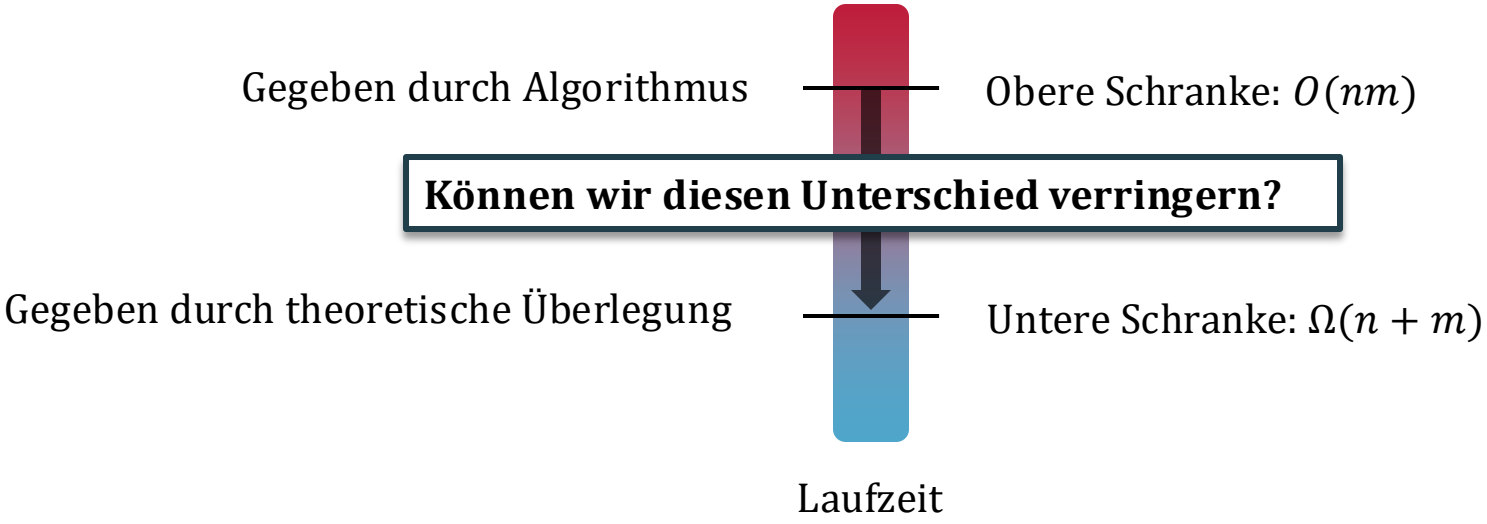

**Ist das eine gute Laufzeit?**

# Merge – Ideen und Schranken

*Ist das eine gute Laufzeit?*

**Wie lange braucht man mindestens?**

Jeder Schlüssel muss mindestens einmal betrachtet werden. $\rightarrow \Omega(n+m)$



# Ideen?

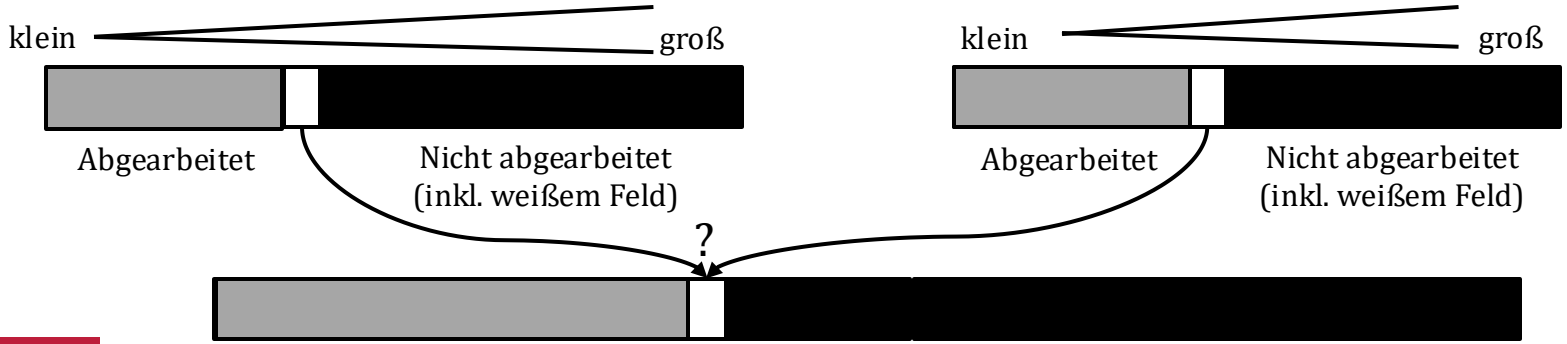
# Merge – Alternative

Probieren wir folgende Strategie:

1. Transformiere beide Suchbäume in sortierte Arrays (durch *inorder* Traversierung).
2. Verschmelze beide Arrays in ein sortiertes Array.
3. Konstruiere aus dem sortierten Array einen Suchbaum.

Punkt 1 benötigt offensichtlich $O(n + m)$ Zeit.

Für Punkt 2 benötigen wir $O(n + m)$ Zeit:

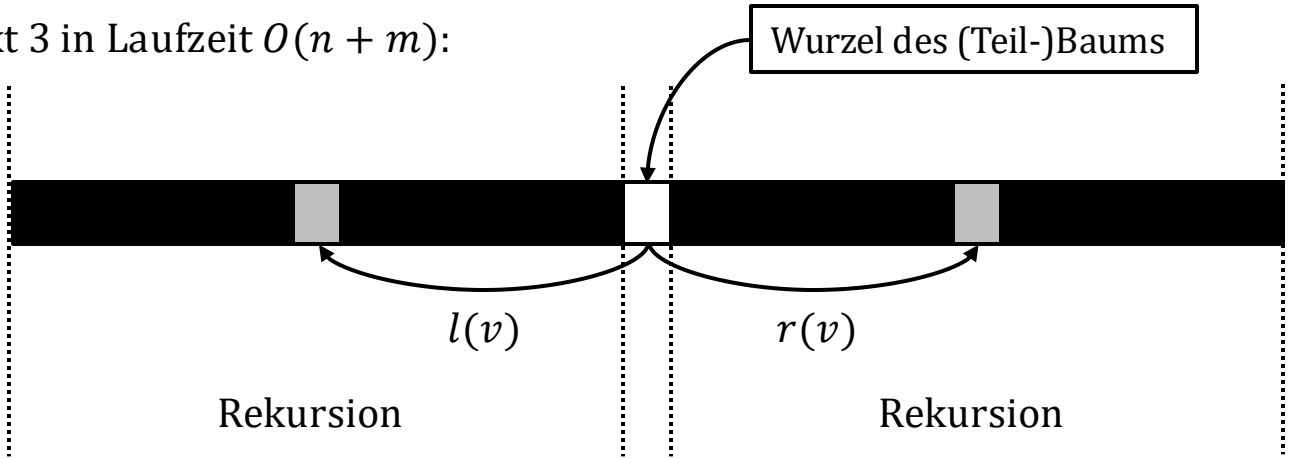


# Merge – Alternative

Probieren wir folgende Strategie:

1. Transformiere beide Suchbäume in sortierte Arrays (durch *inorder* Traversierung).
2. Verschmelze beide Arrays in ein sortiertes Array.
3. Konstruiere aus dem sortierten Array einen Suchbaum.

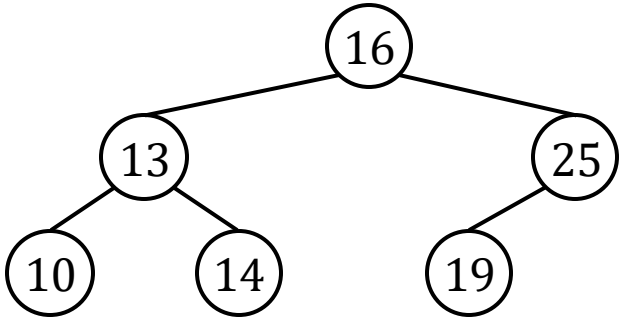
Für Punkt 3 in Laufzeit $O(n + m)$:



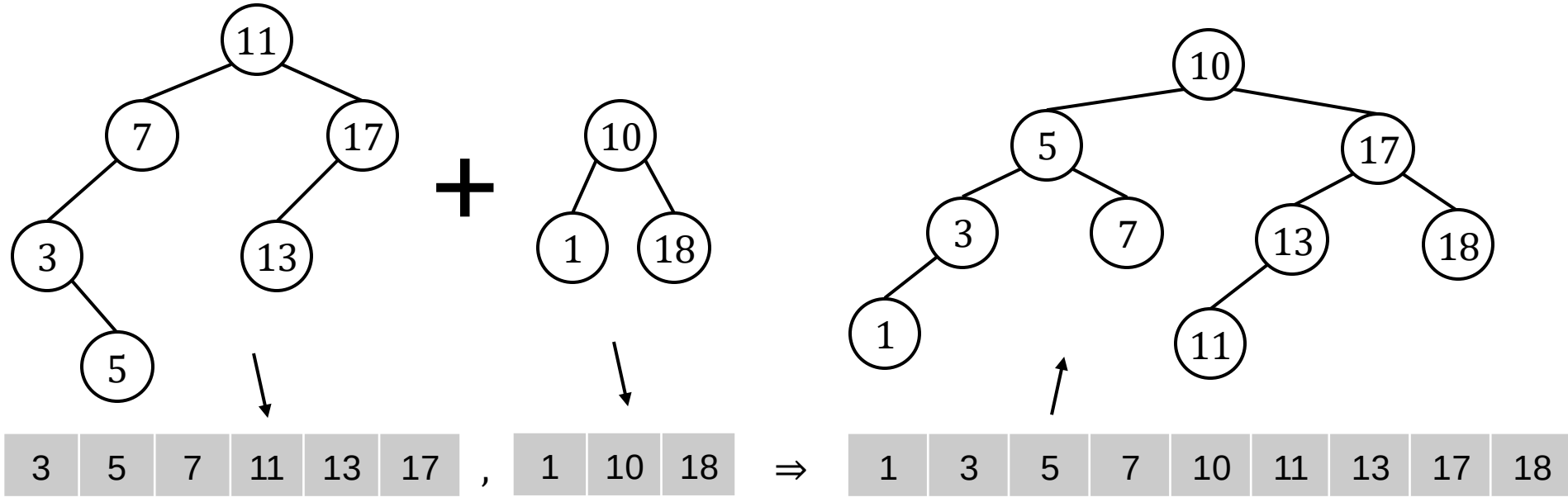
# Einen binären Baum aus einem Array bauen

**function** BUILD_FROM_ARRAY$(A, p, r)$
  **if** $(p > r)$
    **return** NIL
  $q = \left\lceil \frac{p+r}{2} \right\rceil$
  $root$ = Tree$(A(q))$
  $l[root] =$ BUILD_FROM_ARRAY$(A, p, q-1)$
  $r[root] =$ BUILD_FROM_ARRAY$(A, q+1, r)$
  **return** $root$

$A = \{10, 13, 14, 16, 19, 25\}$



# Merge - Beispiel



# Zusammenfassung: Laufzeiten in binären Suchbäumen

# Zusammenfassung: Laufzeiten in binären Suchbäumen

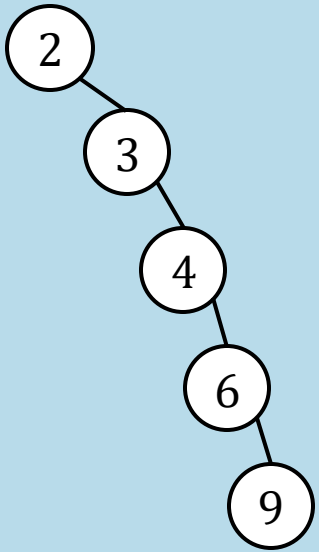
| Operation | Laufzeit |
|---|---|
| Suchen | $O(h)$ |
| Einfügen | $O(h)$ |
| Löschen | $O(h)$ |
| Traversierung | $O(n)$ |
| Merge | $O(n+m)$ |

# Balancierte Suchbäume - Motivation

Wir wissen: Einfügen, Entfernen und Suchen in binären Suchbäumen geht in $O(h)$.

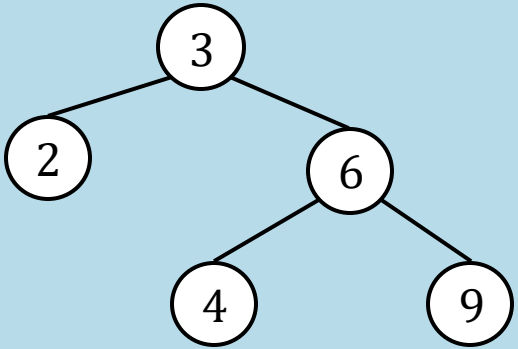
Konstruiere den folgenden Suchbaum durch Einfügen von 2, 3, 4, 6, 9:

Naive Konstruktion




Problem: Da $h = n$ ist, liegen Einfügen, Entfernen und Suchen in $O(n)$

Balancierter Suchbaum



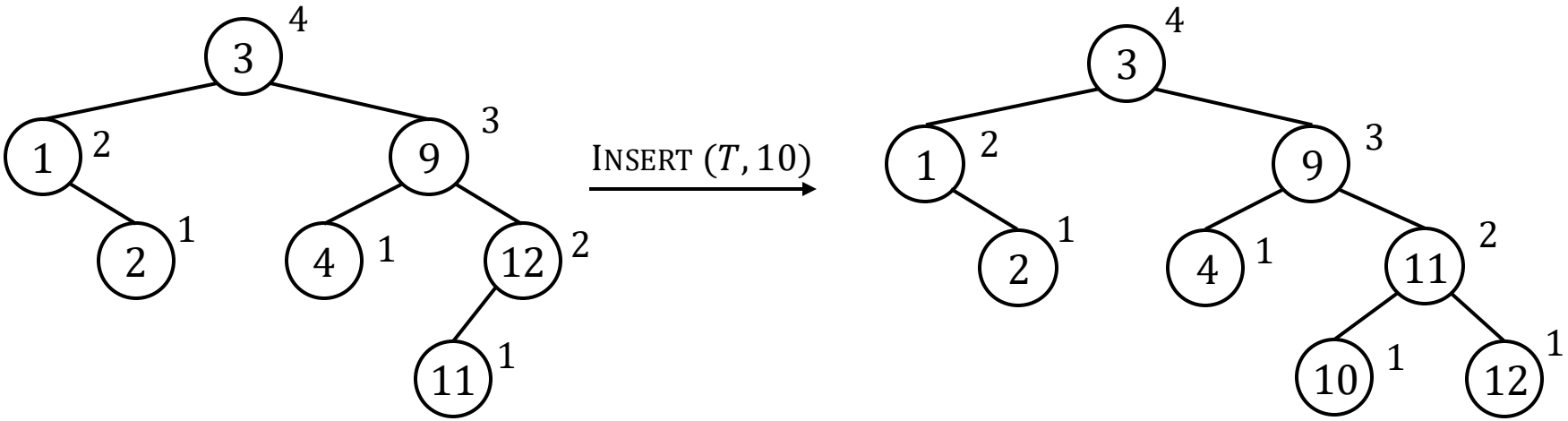

$h = \log(n)$: Einfügen, Suchen, Entfernen in $O(\log(n))$

# AVL-Bäume

# AVL-Bäume – Definition

Ein AVL-Baum besitzt folgenden Eigenschaften:

- Er ist ein binärer Suchbaum.
- Höhe des linken und rechten Teilbaums jeden Knotens unterscheidet sich um maximal 1.



# AVL-Bäume – Operationen

Operationen für binäre Suchbäume funktionieren auch für AVL-Bäume, d.h. wir können:

- Insert
- Delete
- Minimum/Maximum
- Predecessor/Successor
- …

ausführen.

Um die Balancierung zu erhalten, müssen nur Operationen verändert werden, die die Struktur des Baumes verändern.
Das sind *Insert* und *Delete.*

# AVL-Bäume

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

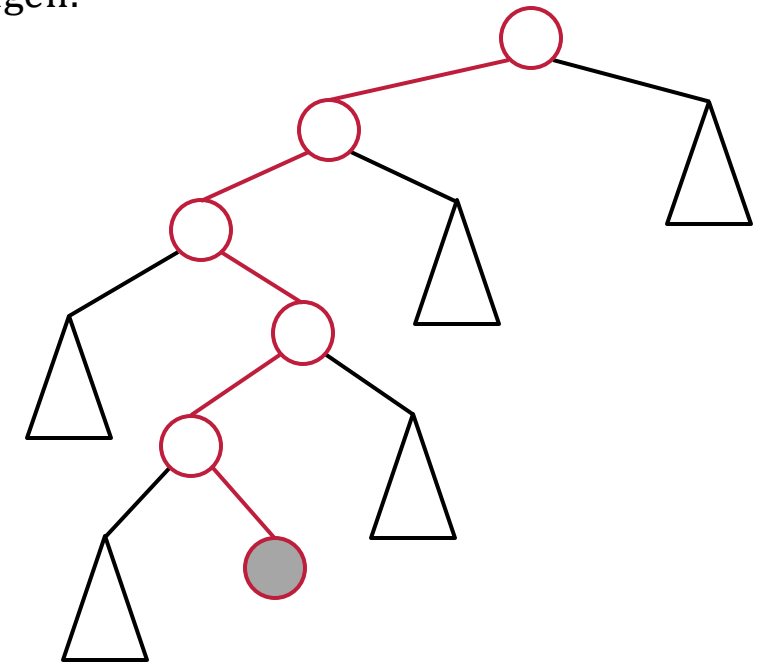
1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

# AVL-Bäume

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Nur Knoten, die auf dem Pfad von der Wurzel zum eingefügten/gelöschten Knoten liegen können unbalanciert werden.

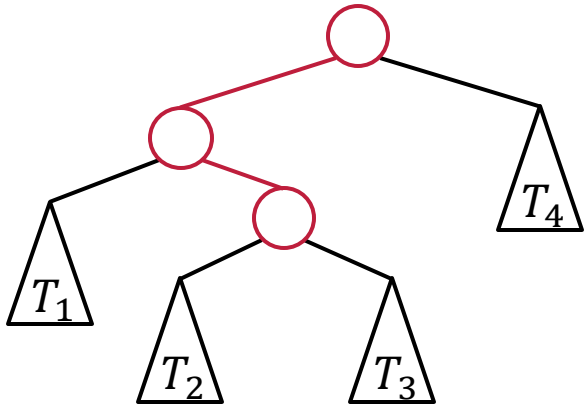


# AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Betrachte den unbalancierten Knoten $z$,
sein Kind $y$ und dessen Kind $x$.



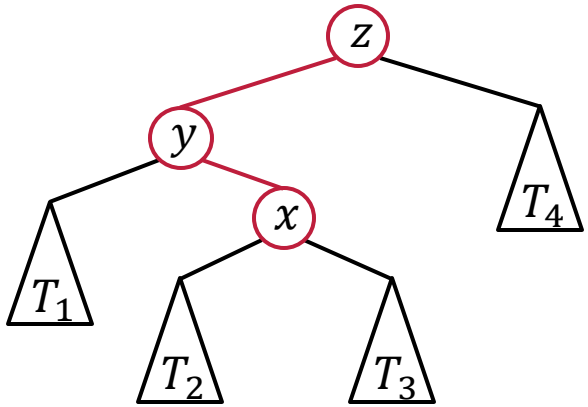
# AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Betrachte den unbalancierten Knoten $z$,
sein Kind $y$ und dessen Kind $x$.

Sortiere Elemente aufsteigend und rotiere entsprechend.



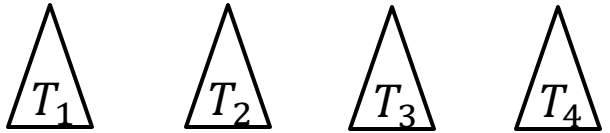
# AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Betrachte den unbalancierten Knoten $z$,
sein Kind $y$ und dessen Kind $x$.

Sortiere Elemente aufsteigend und rotiere entsprechend.

# AVL-Bäume – Restructure

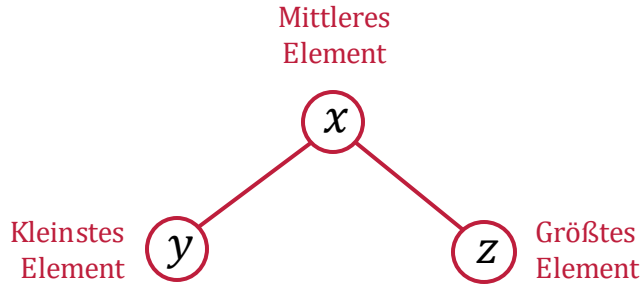
Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

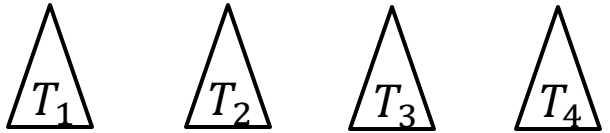
1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Betrachte den unbalancierten Knoten $z$,
sein Kind $y$ und dessen Kind $x$.

Sortiere Elemente aufsteigend und rotiere entsprechend.

Die Teilbäume $T_1, \dots T_4$ werden wieder an den neuen,
rotierten Baum angehängt.



# AVL-Bäume – Restructure

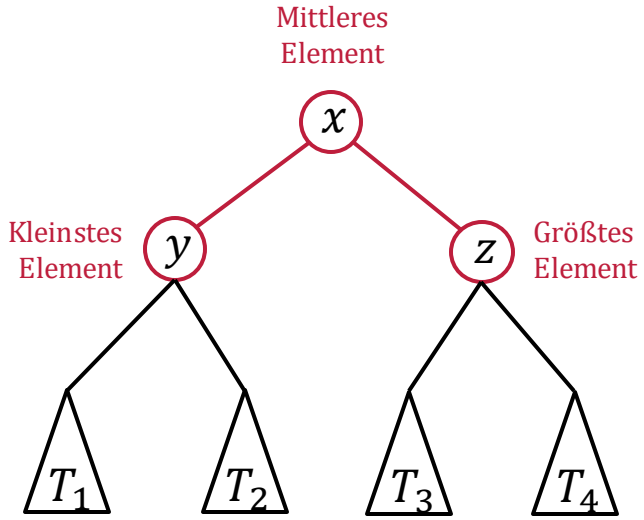
Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Betrachte den unbalancierten Knoten $z$,
sein Kind $y$ und dessen Kind $x$.

Sortiere Elemente aufsteigend und rotiere entsprechend.

Die Teilbäume $T_1, \dots T_4$ werden wieder an den neuen,
rotierten Baum angehängt.



# AVL-Bäume – Restructure

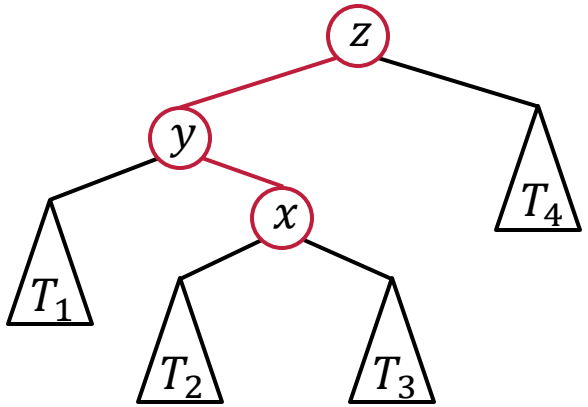
Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

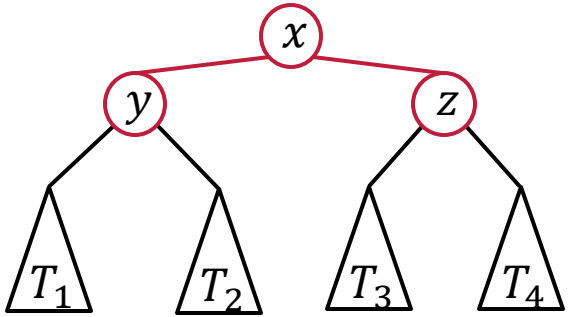
1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

Betrachte den unbalancierten Knoten $z$,
sein Kind $y$ und dessen Kind $x$.

Sortiere Elemente aufsteigend und rotiere entsprechend.

Die Teilbäume $T_1, \dots T_4$ werden wieder an den neuen,
rotierten Baum angehängt.

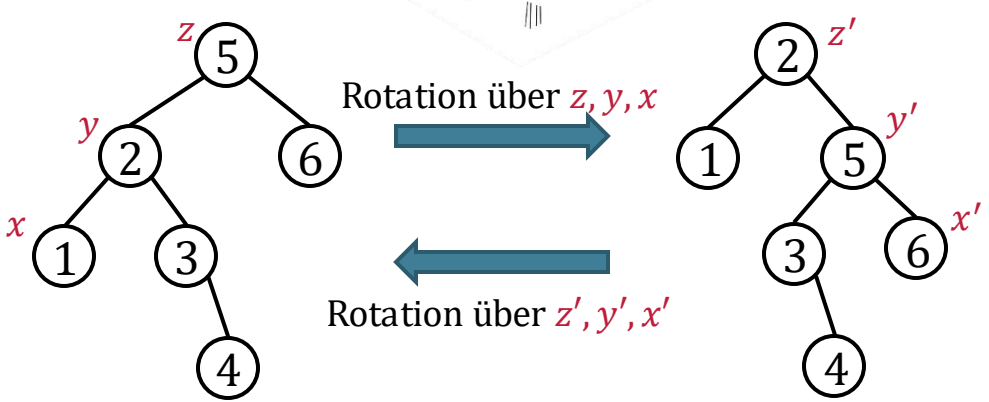


# AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

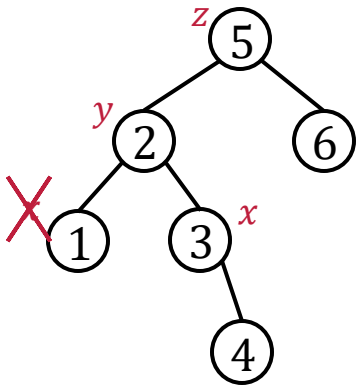



# AVL-Bäume – Restructure

Bei Insert und Delete stellen sich nun folgende Fragen:

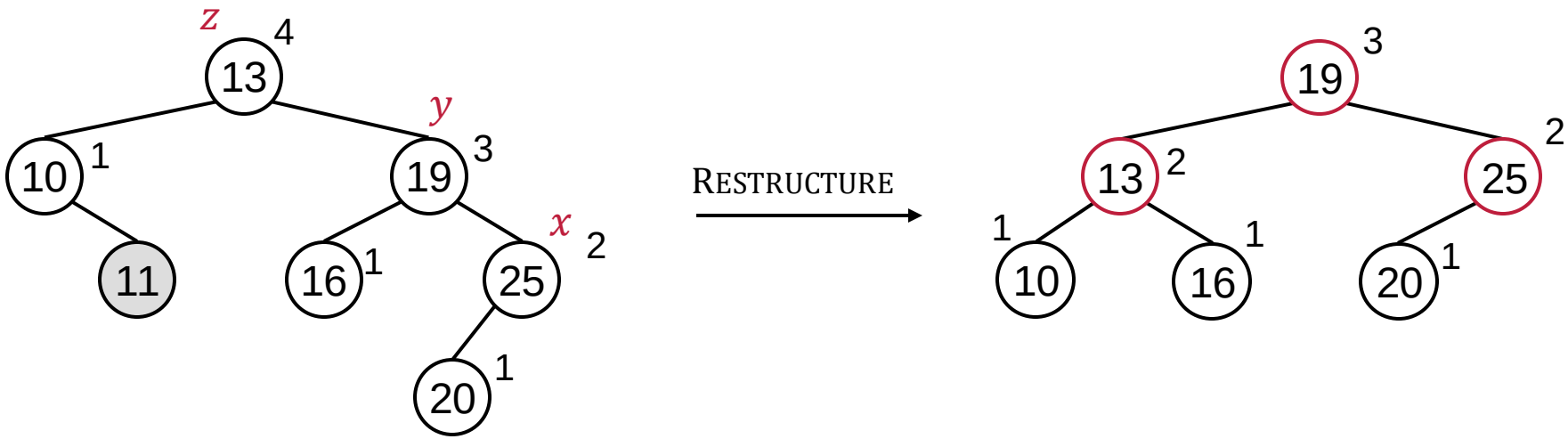
1. Welche Knoten werden unbalanciert?
2. Wie stellt man die Balance wieder her?
3. Welche Regeln sollte man berücksichtigen?

1. Starte bei tiefstem unbalancierten Knoten: Das ist $z$.
2. Wähle Kinder ($x$, $y$) nach deren Höhe aus.



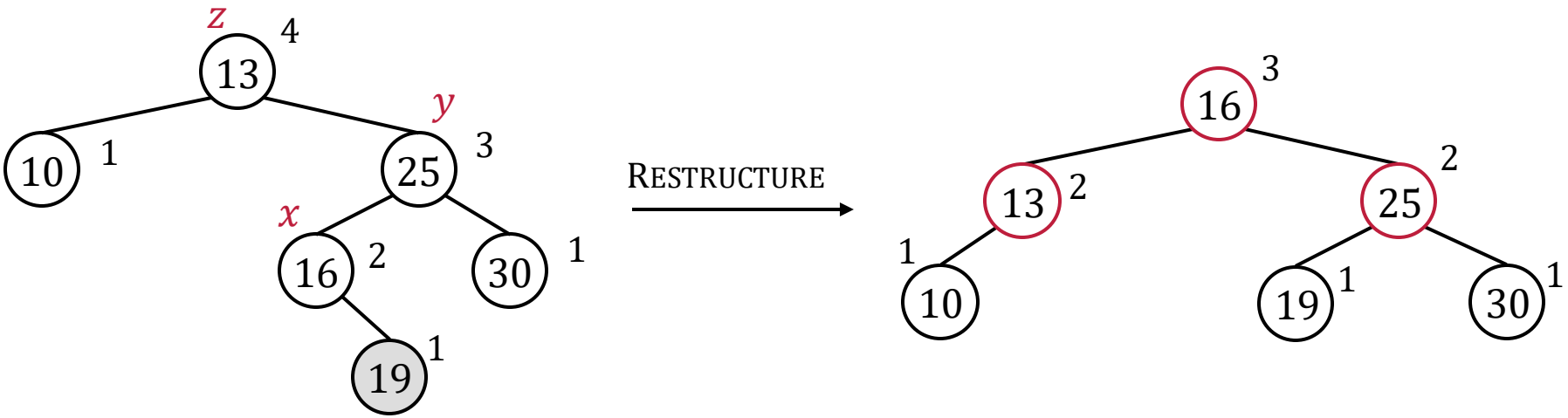
# AVL-Bäume – Beispiele

DELETE$(T, 11)$



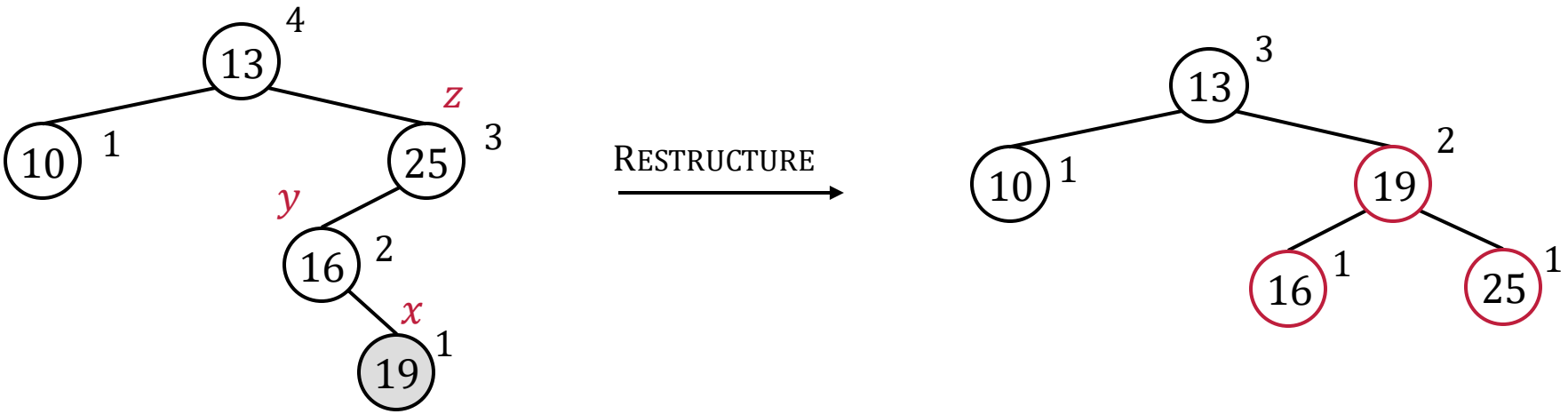
# AVL-Bäume – Beispiele

INSERT$(T, 19)$



# AVL-Bäume – Beispiele

INSERT$(T, 19)$



# AVL Restructure - Zusammenfassung

Merkblatt!

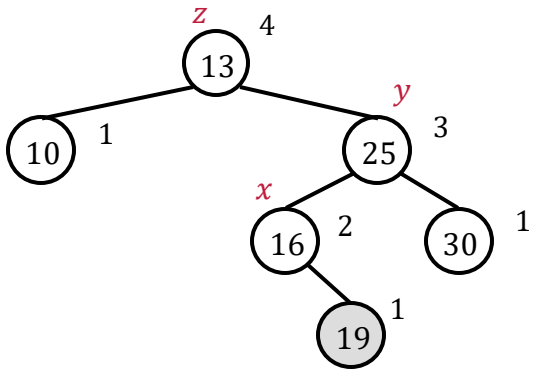
Ist nach INSERT oder DELETE die AVL-Eigenschaft verletzt, kann diese mit RESTRUCTURE wiederhergestellt werden.

Nach INSERT reicht *ein* RESTRUCTURE-Aufruf, um die Höhenbalanciertheit wiederherzustellen.

Nach DELETE können *mehrere* (genauer gesagt $O(\log n)$ viele) Aufrufe von RESTRUCTURE nötig sein.

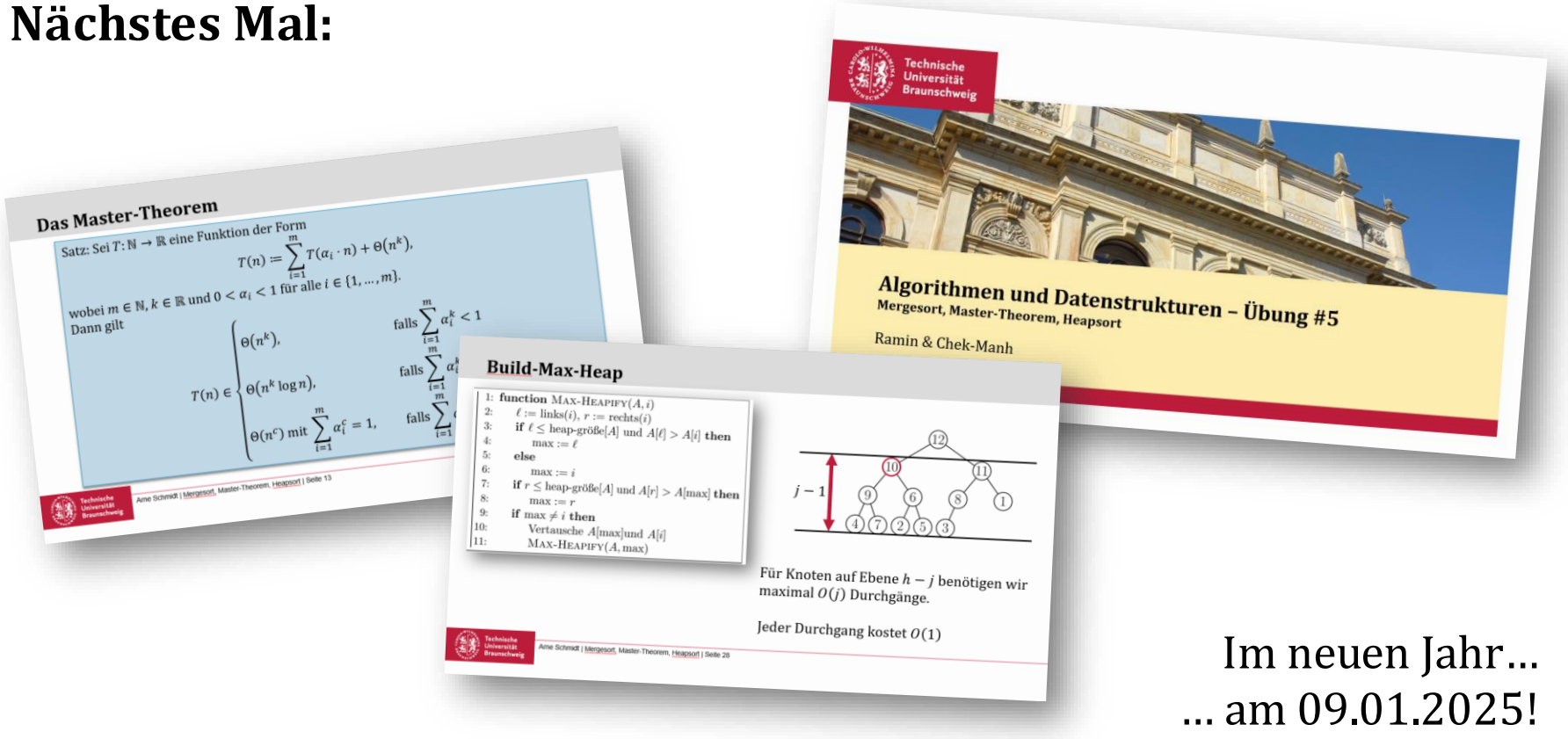
RESTRUCTURE verlangt drei Knoten x, y und z als Argumente:

- Starte beim tiefsten unbalancierten Knoten: Das ist z.
- Das Kind von z mit größerer Höhe ist y.
- Das Kind von y mit größerer Höhe ist x.



# Fragen?

# Nächstes Mal:




Im neuen Jahr…
… am 09.01.2025!