



Technische
Universität
Braunschweig



Algorithmen und Datenstrukturen

Übung 3

Ramin Kosfeld und Chek-Manh Loi

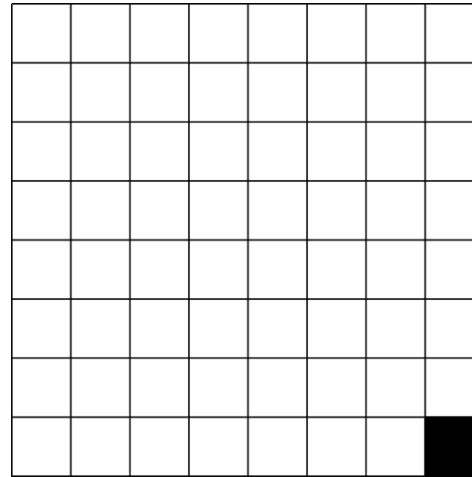
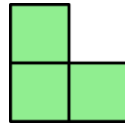
05.12.2024

Einführendes Beispiel

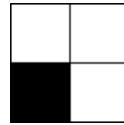
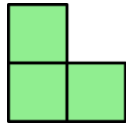
Kann man ein 8×8 Schachbrett mit L-Trominos füllen,
wenn man eine beliebige Ecke des Feldes löscht?

Einführendes Beispiel

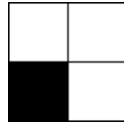
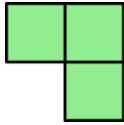
Kann man ein 8x8 Schachbrett mit L-Trominos füllen, wenn man eine beliebige Ecke des Feldes löscht?



Einführendes Beispiel

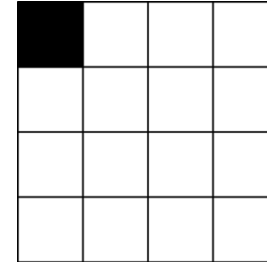


Einführendes Beispiel

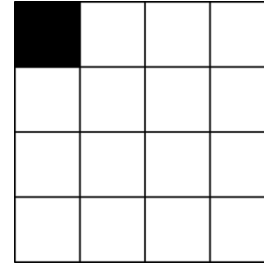
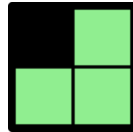
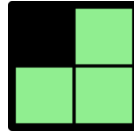


Einführendes Beispiel

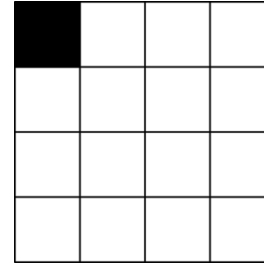
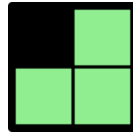
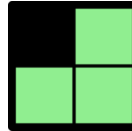
Einführendes Beispiel



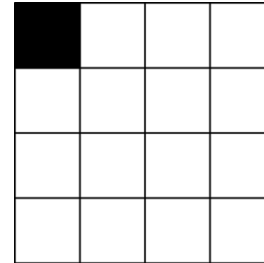
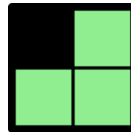
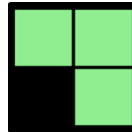
Einführendes Beispiel



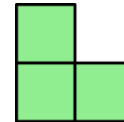
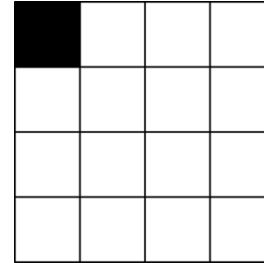
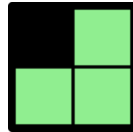
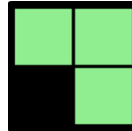
Einführendes Beispiel



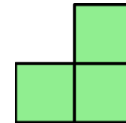
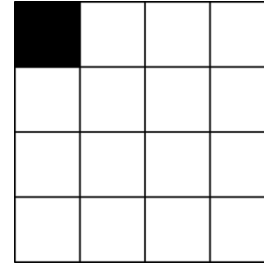
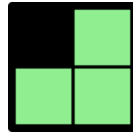
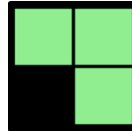
Einführendes Beispiel



Einführendes Beispiel

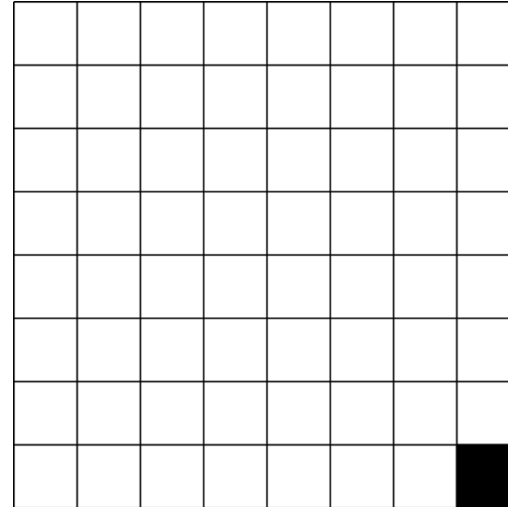


Einführendes Beispiel

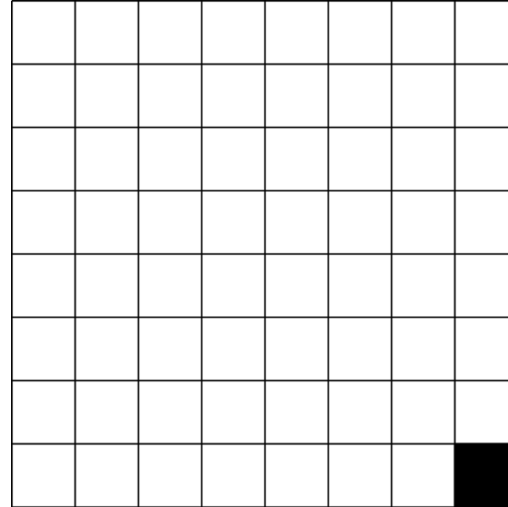
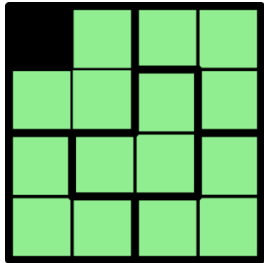
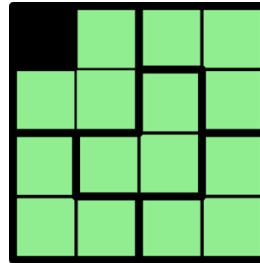
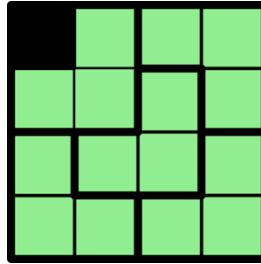
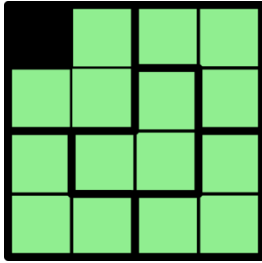


Einführendes Beispiel

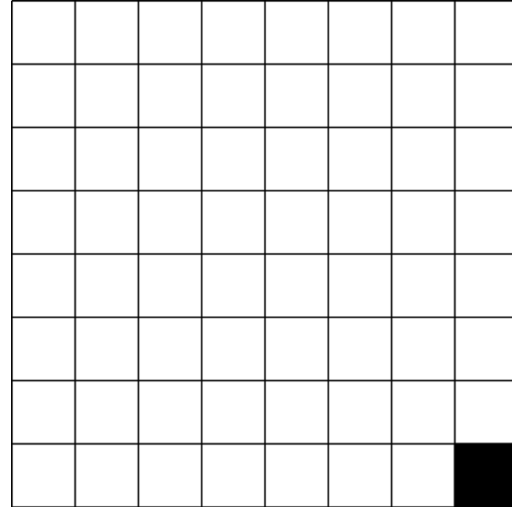
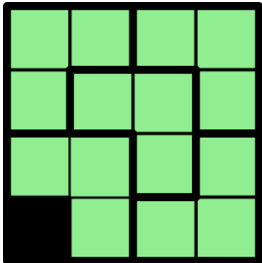
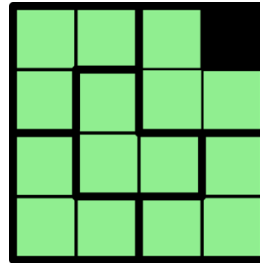
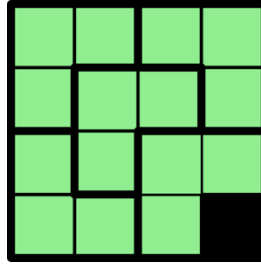
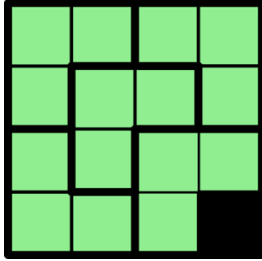
Einführendes Beispiel



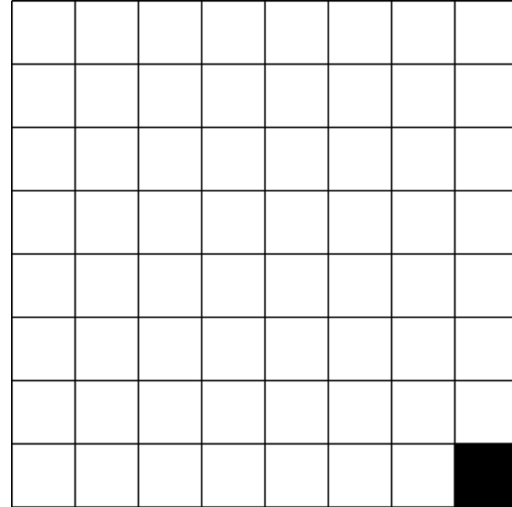
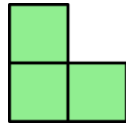
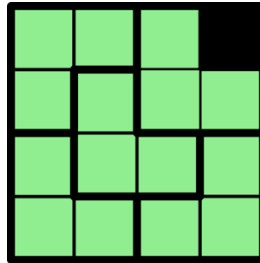
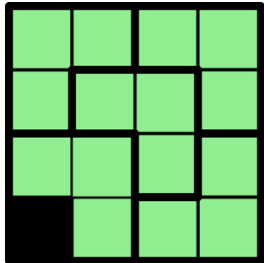
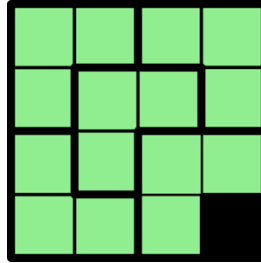
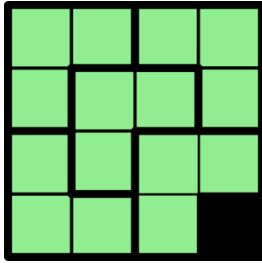
Einführendes Beispiel



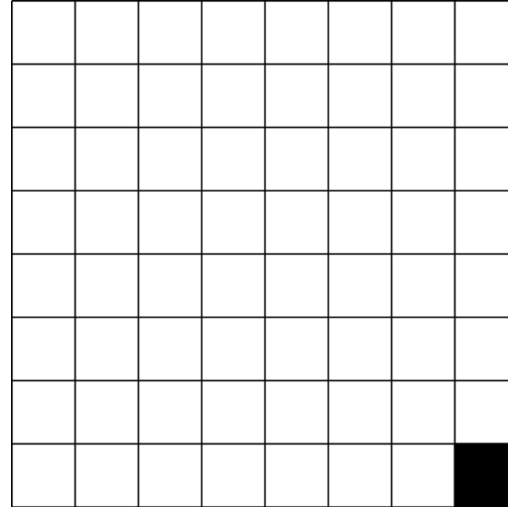
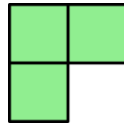
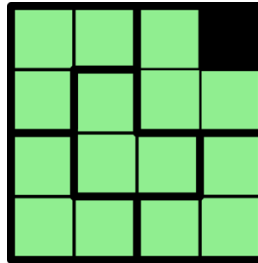
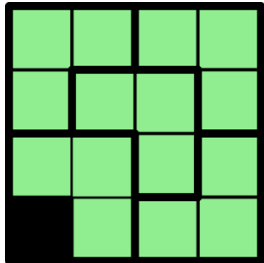
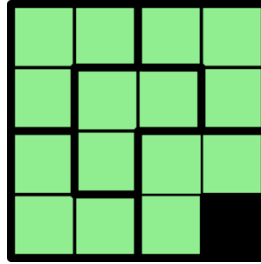
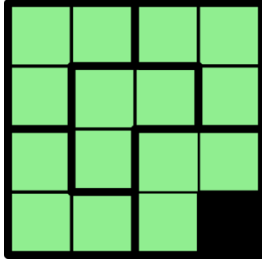
Einführendes Beispiel



Einführendes Beispiel

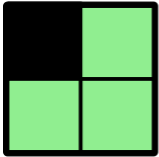


Einführendes Beispiel

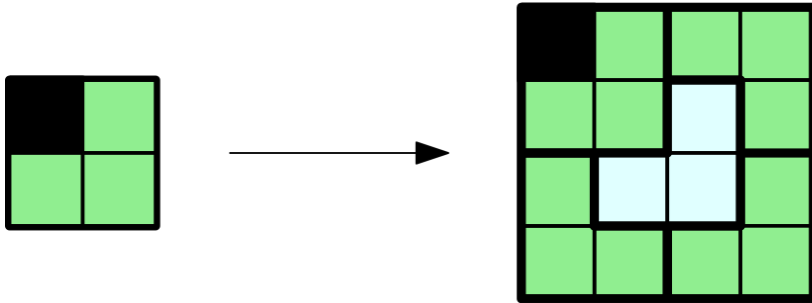


Einführendes Beispiel

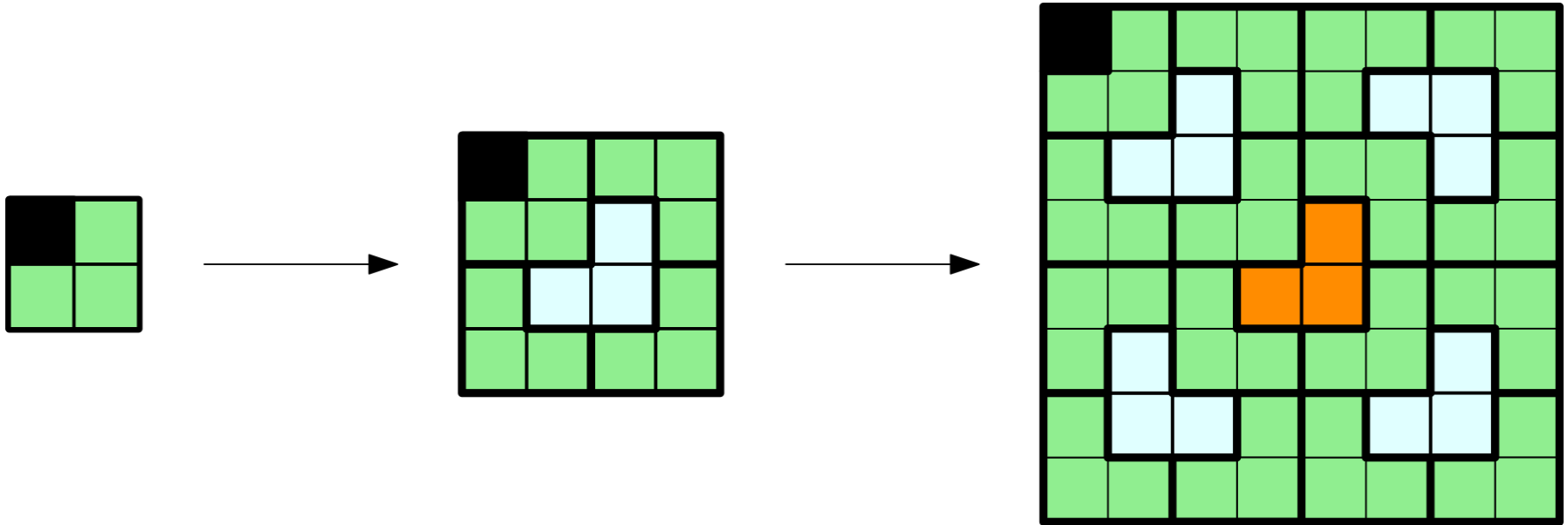
Einführendes Beispiel



Einführendes Beispiel



Einführendes Beispiel



L-Trominos und das Schachbrett

Satz: Jedes $2^n \times 2^n$ Schachbrett (minus eine Ecke) kann mit L-Trominos gepflastert werden.

L-Trominos und das Schachbrett

Satz: Jedes $2^n \times 2^n$ Schachbrett (minus eine Ecke) kann mit L-Trominos gepflastert werden.

Beweis:

L-Trominos und das Schachbrett

Satz: Jedes $2^n \times 2^n$ Schachbrett (minus eine Ecke) kann mit L-Trominos gepflastert werden.

Beweis:

Für $n = 1$: $2^1 \times 2^1$ Schachbrett mit einer Ecke weniger. Es bleibt ein L-Tromino übrig. Dort können wir also ein L-Tromino pflastern.

L-Trominos und das Schachbrett

Satz: Jedes $2^n \times 2^n$ Schachbrett (minus eine Ecke) kann mit L-Trominos gepflastert werden.

Beweis:

Für $n = 1$: $2^1 \times 2^1$ Schachbrett mit einer Ecke weniger. Es bleibt ein L-Tromino übrig. Dort können wir also ein L-Tromino pflastern.

Annahme: Wir haben den obigen Satz für ein bel., aber festes n beweisen.

L-Trominos und das Schachbrett

Satz: Jedes $2^n \times 2^n$ Schachbrett (minus eine Ecke) kann mit L-Trominos gepflastert werden.

Beweis:

Für $n = 1$: $2^1 \times 2^1$ Schachbrett mit einer Ecke weniger. Es bleibt ein L-Tromino übrig. Dort können wir also ein L-Tromino pflastern.

Annahme: Wir haben den obigen Satz für ein bel., aber festes n bewiesen.

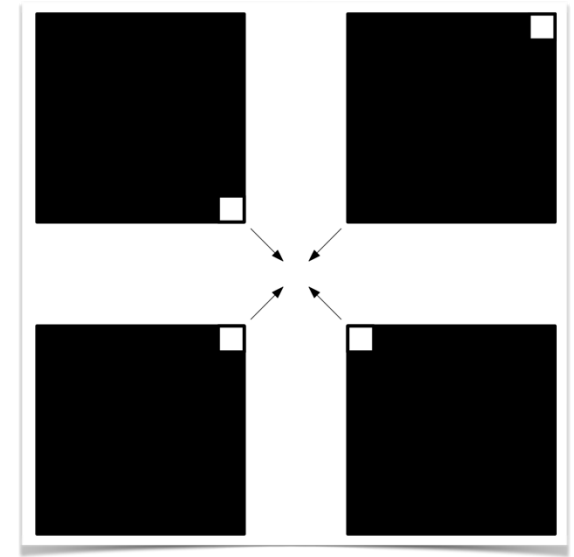
Wir zeigen nun: Wir können die Aussage auch für $n + 1$ beweisen.

L-Trominos und das Schachbrett

Zunächst: Wir können ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Schachbrett in vier $2^n \times 2^n$ Schachbretter disjunkt unterteilen (teile horizontal und vertikal in der Mitte)

L-Trominos und das Schachbrett

Zunächst: Wir können ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Schachbrett in vier $2^n \times 2^n$ Schachbretter disjunkt unterteilen (teile horizontal und vertikal in der Mitte)

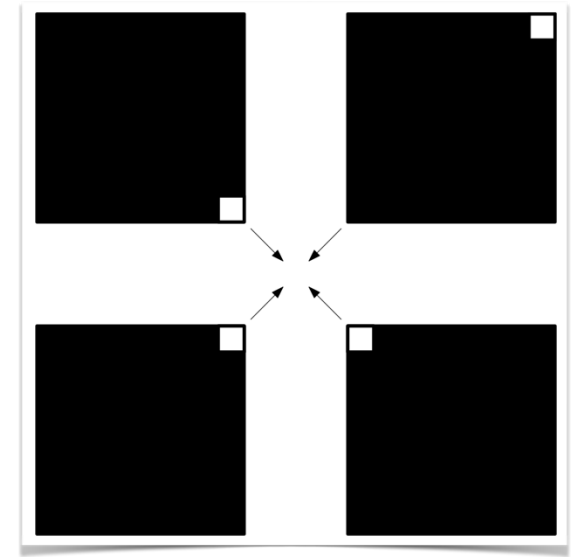


L-Trominos und das Schachbrett

Zunächst: Wir können ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Schachbrett in vier $2^n \times 2^n$ Schachbretter disjunkt unterteilen (teile horizontal und vertikal in der Mitte)

Wir wissen:

1. Wir können die vier Schachbretter mit L-Trominos pflastern.



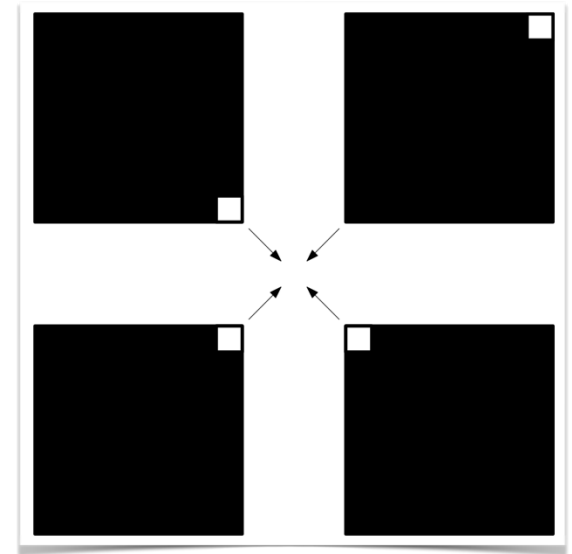
L-Trominos und das Schachbrett

Zunächst: Wir können ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Schachbrett in vier $2^n \times 2^n$ Schachbretter disjunkt unterteilen (teile horizontal und vertikal in der Mitte)

Wir wissen:

1. Wir können die vier Schachbretter mit L-Trominos pflastern.
2. Die vier Schachbretter sind unabhängig. Wir können sie also so anordnen, dass drei Schachbretter ihre fehlende Ecke in die Mitte drehen.

Dadurch entsteht ein L-Tromino, welches wir füllen können.



L-Trominos und das Schachbrett

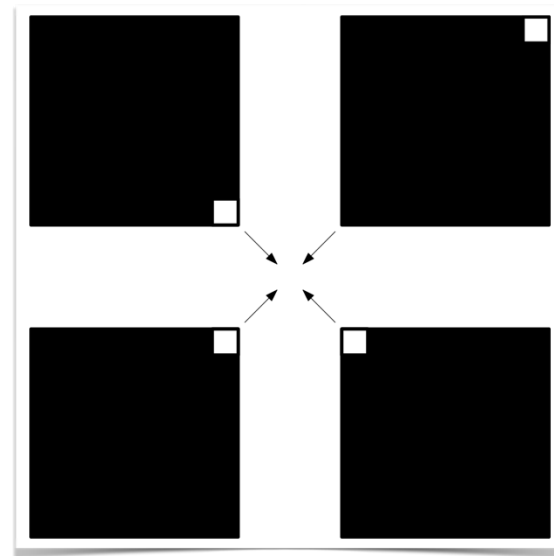
Zunächst: Wir können ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Schachbrett in vier $2^n \times 2^n$ Schachbretter disjunkt unterteilen (teile horizontal und vertikal in der Mitte)

Wir wissen:

1. Wir können die vier Schachbretter mit L-Trominos pflastern.
2. Die vier Schachbretter sind unabhängig. Wir können sie also so anordnen, dass drei Schachbretter ihre fehlende Ecke in die Mitte drehen.

Dadurch entsteht ein L-Tromino, welches wir füllen können.

Also können wir auch ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ mit L-Trominos pflastern.



L-Trominos und das Schachbrett

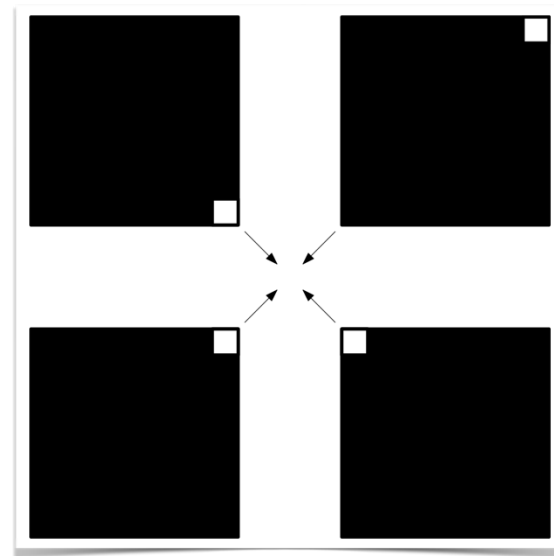
Zunächst: Wir können ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ Schachbrett in vier $2^n \times 2^n$ Schachbretter disjunkt unterteilen (teile horizontal und vertikal in der Mitte)

Wir wissen:

1. Wir können die vier Schachbretter mit L-Trominos pflastern.
2. Die vier Schachbretter sind unabhängig. Wir können sie also so anordnen, dass drei Schachbretter ihre fehlende Ecke in die Mitte drehen.

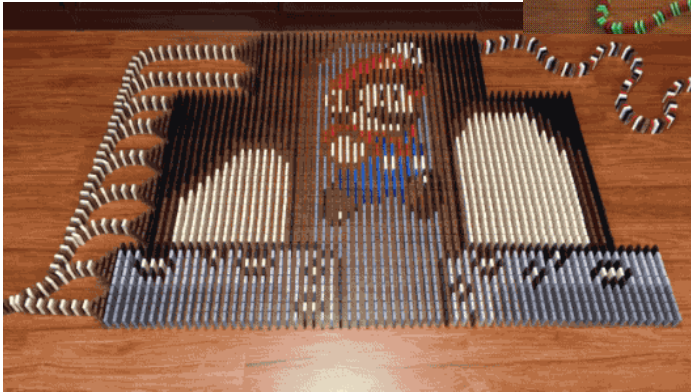
Dadurch entsteht ein L-Tromino, welches wir füllen können.

Also können wir auch ein $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ mit L-Trominos pflastern.

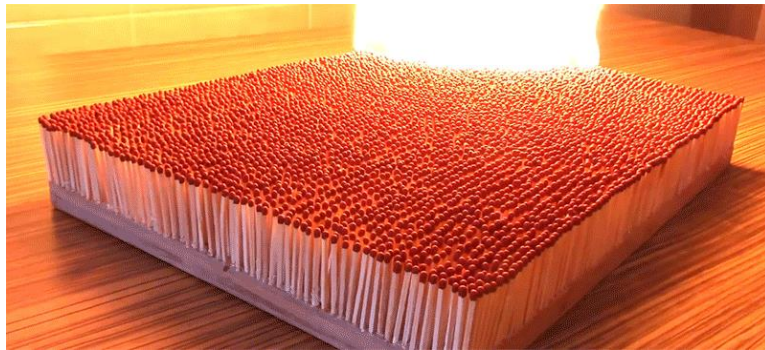


Frage: Warum ist damit der Beweis fertig?

Beweise – Vollständige Induktion



Beweise – Vollständige Induktion



Beweistechniken – Teil 2

Vollständige Induktion

Beweise – Vollständige Induktion

Beweise – Vollständige Induktion

... beweise die Aussage

„Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $\mathbf{P}(n)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

... beweise die Aussage

„Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $\mathbf{P}(n)$ “

durch Beweisen von

Beweise – Vollständige Induktion

... beweise die Aussage

„Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n)$ “

durch Beweisen von

1. $P(n_0)$ und

Beweise – Vollständige Induktion

... beweise die Aussage

„Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n)$ “

durch Beweisen von

1. $P(n_0)$ und
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

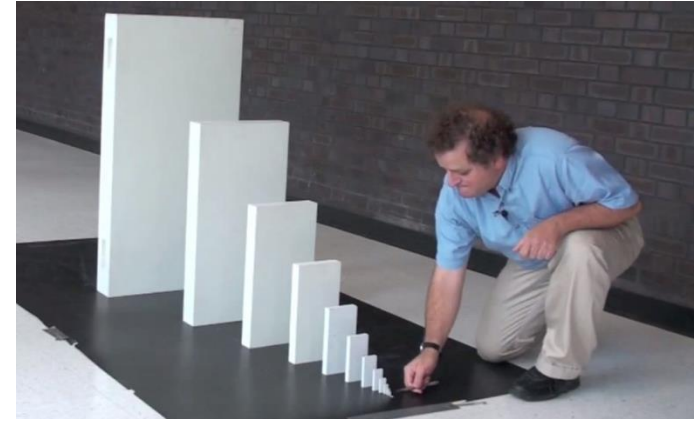
Beweise – Vollständige Induktion

... beweise die Aussage

„Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n)$ “

durch Beweisen von

1. $P(n_0)$ und
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “



Beweise – Vollständige Induktion

1. $P(n_0)$
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$
gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises:

1. $P(n_0)$
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$
gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises:

Induktionsanfang (IA)

1. $P(n_0)$
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$
gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises:

Induktionsanfang (IA)

Die Aussage gilt für einen oder mehrere Startwerte.

1. $P(n_0)$
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$
gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises:

Induktionsanfang (IA)

Die Aussage gilt für einen oder mehrere Startwerte.

- 
1. $P(n_0)$
 2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$
gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises:

Induktionsanfang (IA)

Die Aussage gilt für einen oder mehrere Startwerte.

Induktionsvoraussetzung (IV)

- 
1. $P(n_0)$
 2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises:

Induktionsanfang (IA)

Die Aussage gilt für einen oder mehrere Startwerte.

Induktionsvoraussetzung (IV)

„Angenommen die Aussage gilt für ein beliebiges, festes n .“

- 
1. $P(n_0)$
 2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises:

Induktionsanfang (IA)

Die Aussage gilt für einen oder mehrere Startwerte.

Induktionsvoraussetzung (IV)

„Angenommen die Aussage gilt für ein beliebiges, festes n .“

1. $P(n_0)$
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises:

Induktionsanfang (IA)

Die Aussage gilt für einen oder mehrere Startwerte.

Induktionsvoraussetzung (IV)

„Angenommen die Aussage gilt für ein beliebiges, festes n .“

Induktionsschritt (IS)

1. $P(n_0)$
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises:

Induktionsanfang (IA)

Die Aussage gilt für einen oder mehrere Startwerte.

Induktionsvoraussetzung (IV)

„Angenommen die Aussage gilt für ein beliebiges, festes n .“

Induktionsschritt (IS)

Nutze die IV, um $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ zu zeigen.

1. $P(n_0)$
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Beweise – Vollständige Induktion

Aufbau eines Induktionsbeweises:

Induktionsanfang (IA)

Die Aussage gilt für einen oder mehrere Startwerte.

Induktionsvoraussetzung (IV)

„Angenommen die Aussage gilt für ein beliebiges, festes n .“

Induktionsschritt (IS)

Nutze die IV, um $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ zu zeigen.

1. $P(n_0)$
2. „Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ gilt $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ “

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ ist } \sum_{i=1}^n i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ ist } \sum_{i=1}^n i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ ist } \sum_{i=1}^n i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ mit n beliebig, aber fest.

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ ist } \sum_{i=1}^n i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ mit n beliebig, aber fest.

Induktionsschritt: $(n \rightarrow n + 1)$

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ ist } \sum_{i=1}^n i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ mit n beliebig, aber fest.

Induktionsschritt: $(n \rightarrow n + 1)$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i =$$

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ ist } \sum_{i=1}^n i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ mit n beliebig, aber fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

$$\sum_{i=1}^{n+1} i =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ ist } \sum_{i=1}^n i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ mit n beliebig, aber fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = (n+1) + \sum_{i=1}^n i$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ ist } \sum_{i=1}^n i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ mit n beliebig, aber fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= (n+1) + \sum_{i=1}^n i \\ &\stackrel{IV}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ein Klassiker: Die Gaußsche Summenformel

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsanfang:

$$\text{Für } n = 1 \text{ ist } \sum_{i=1}^n i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gelte $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ mit n beliebig, aber fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= (n+1) + \sum_{i=1}^n i \\ &\stackrel{IV}{=} (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Induktion auf Graphen, generell

Induktion auf Graphen, generell

Worüber lasse ich die Induktion laufen?

Induktion auf Graphen, generell

Worüber lasse ich die Induktion laufen?

- Über die Zahl der Knoten?

Induktion auf Graphen, generell

Worüber lasse ich die Induktion laufen?

- Über die Zahl der Knoten?
 - Dann muss ich alle möglichen gleichzeitig hinzukommenden Kanten *gleichzeitig* in der Argumentation berücksichtigen

Induktion auf Graphen, generell

Worüber lasse ich die Induktion laufen?

- Über die Zahl der Knoten?
 - Dann muss ich alle möglichen gleichzeitig hinzukommenden Kanten *gleichzeitig* in der Argumentation berücksichtigen
- Über die Zahl der Kanten?

Induktion auf Graphen, generell

Worüber lasse ich die Induktion laufen?

- Über die Zahl der Knoten?
 - Dann muss ich alle möglichen gleichzeitig hinzukommenden Kanten *gleichzeitig* in der Argumentation berücksichtigen
- Über die Zahl der Kanten?
 - Wie behandle ich dann Knoten?

Induktion auf Graphen, generell

Worüber lasse ich die Induktion laufen?

- Über die Zahl der Knoten?
 - Dann muss ich alle möglichen gleichzeitig hinzukommenden Kanten *gleichzeitig* in der Argumentation berücksichtigen
- Über die Zahl der Kanten?
 - Wie behandle ich dann Knoten?
- (Oder sogar über beide zusammen - beweise zwei Fälle, wenn jeweils eine Kante oder ein Knoten hinzukommt?)

Induktion auf Graphen, generell

Worüber lasse ich die Induktion laufen?

- Über die Zahl der Knoten?
 - Dann muss ich alle möglichen gleichzeitig hinzukommenden Kanten *gleichzeitig* in der Argumentation berücksichtigen
- Über die Zahl der Kanten?
 - Wie behandle ich dann Knoten?
- (Oder sogar über beide zusammen - beweise zwei Fälle, wenn jeweils eine Kante oder ein Knoten hinzukommt?)
 - (Advanced stuff)

Induktion auf Graphen, generell

Worüber lasse ich die Induktion laufen?

- Über die Zahl der Knoten?
 - Dann muss ich alle möglichen gleichzeitig hinzukommenden Kanten *gleichzeitig* in der Argumentation berücksichtigen
- Über die Zahl der Kanten?
 - Wie behandle ich dann Knoten?
- (Oder sogar über beide zusammen - beweise zwei Fälle, wenn jeweils eine Kante oder ein Knoten hinzukommt?)
 - (Advanced stuff)

→ Alle diese Optionen sind möglich.

Was funktioniert, hängt direkt mit dem Beweis zusammen.

Zusammenhang in Graphen

Behauptung: Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

Zusammenhang in Graphen

Behauptung: Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

„Beweis“:

I.A.: Der kleinste Graph, bei dem jeder Knoten (mind.) Grad 1 besitzt, besteht aus zwei Knoten und einer Kante.

Zusammenhang in Graphen

Behauptung: Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

„Beweis“:

I.A.: Der kleinste Graph, bei dem jeder Knoten (mind.) Grad 1 besitzt, besteht aus zwei Knoten und einer Kante.



Zusammenhang in Graphen

Behauptung: Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

„Beweis“:

I.A.: Der kleinste Graph, bei dem jeder Knoten (mind.) Grad 1 besitzt, besteht aus zwei Knoten und einer Kante.



I.V.: Für ein bel., aber festes n , sind alle Graphen mit n Knoten und Minimalgrad 1 zusammenhängend.

Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit n Knoten, in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit n Knoten, in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nach Annahme ist dieser Graph zusammenhängend; es existiert also ein Pfad zwischen je zwei Knoten.

Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit n Knoten, in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nach Annahme ist dieser Graph zusammenhängend; es existiert also ein Pfad zwischen je zwei Knoten.

Nun fügen wir einen neuen Knoten plus eine Kante hinzu, um einen Graphen mit $n + 1$ Knoten zu erhalten.

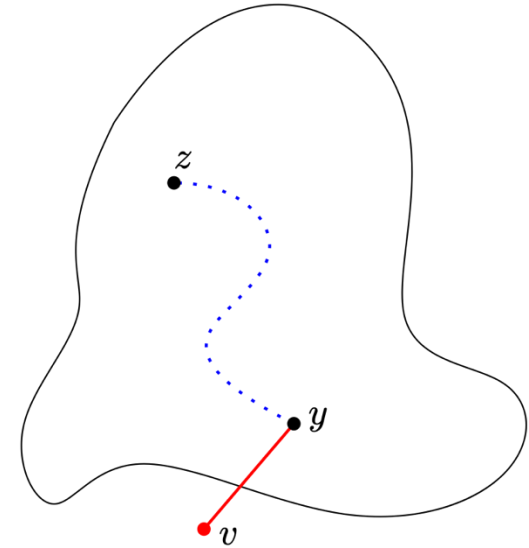
Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit n Knoten, in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nach Annahme ist dieser Graph zusammenhängend; es existiert also ein Pfad zwischen je zwei Knoten.

Nun fügen wir einen neuen Knoten plus eine Kante hinzu, um einen Graphen mit $n + 1$ Knoten zu erhalten.



Zusammenhang in Graphen

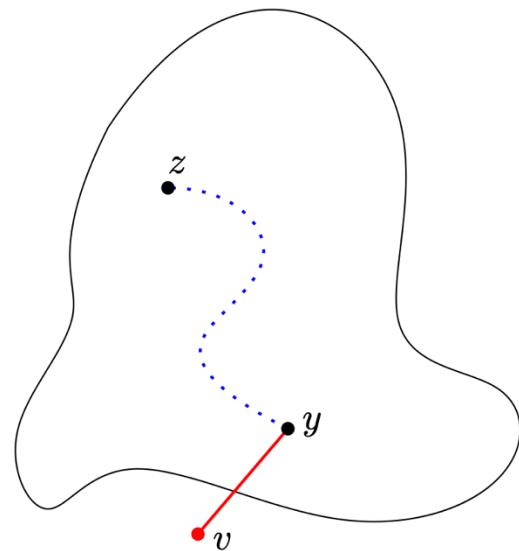
I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit n Knoten, in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nach Annahme ist dieser Graph zusammenhängend; es existiert also ein Pfad zwischen je zwei Knoten.

Nun fügen wir einen neuen Knoten plus eine Kante hinzu, um einen Graphen mit $n + 1$ Knoten zu erhalten.

Damit ist der neue Knoten zu einem Knoten G verbunden, wodurch es zwischen allen $n + 1$ Knoten einen Pfad gibt.



Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

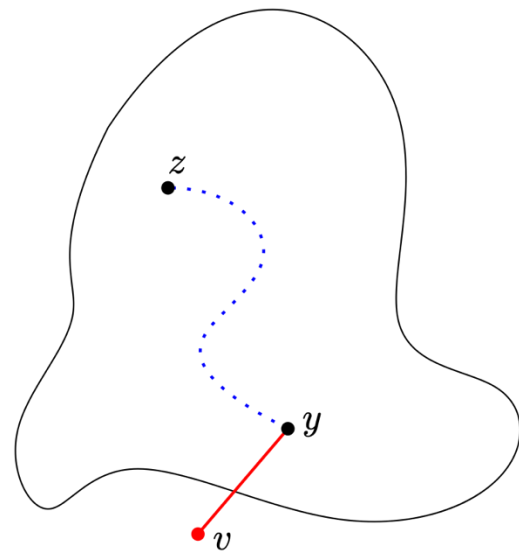
Betrachte einen Graphen G mit n Knoten, in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nach Annahme ist dieser Graph zusammenhängend; es existiert also ein Pfad zwischen je zwei Knoten.

Nun fügen wir einen neuen Knoten plus eine Kante hinzu, um einen Graphen mit $n + 1$ Knoten zu erhalten.

Damit ist der neue Knoten zu einem Knoten G verbunden, wodurch es zwischen allen $n + 1$ Knoten einen Pfad gibt.

⇒ Der neue Graph ist zusammenhängend!

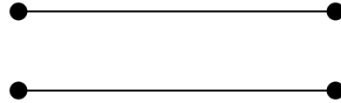


Zusammenhang in Graphen

Behauptung: Alle Graphen (mit mind. zwei Knoten), bei denen alle Knoten mindestens den Grad 1 haben, sind zusammenhängend.

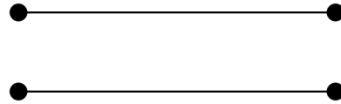
Zusammenhang in Graphen

Was ist hiermit?



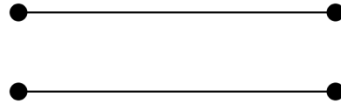
Zusammenhang in Graphen

Was ist hiermit?



Zusammenhang in Graphen

Was ist hiermit?

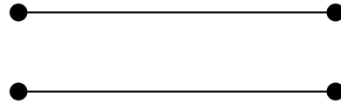


Die Aussage gilt gar nicht: Was lief im Beweis schief?



Zusammenhang in Graphen

Was ist hiermit?



Die Aussage gilt gar nicht: Was lief im Beweis schief?

Konnten wir über unsere Methode alle möglichen Graphen mit $n + 1$ Knoten erzeugen?



Build-up Error

Dies ist ein typischer “*build-up error*”.

Build-up Error

Dies ist ein typischer “*build-up error*”.

Fehlerhafte Annahme: Jeder Graph mit $n + 1$ Knoten mit einer Eigenschaft A kann aus einem Graphen mit n Knoten und derselben Eigenschaft konstruiert werden.

Build-up Error

Dies ist ein typischer “*build-up error*”.

Fehlerhafte Annahme: Jeder Graph mit $n + 1$ Knoten mit einer Eigenschaft A kann aus einen Graphen mit n Knoten und derselben Eigenschaft konstruiert werden.

Ausweg: “Shrink down, grow back”

Build-up Error

Dies ist ein typischer “***build-up error***”.

Fehlerhafte Annahme: Jeder Graph mit $n + 1$ Knoten mit einer Eigenschaft A kann aus einen Graphen mit n Knoten und derselben Eigenschaft konstruiert werden.

*Ausweg: “***Shrink down, grow back***”*

Nimm einen bel. Graphen mit $n + 1$ Knoten, entferne einen Knoten, wende I.V. an, füge Knoten wieder an und argumentiere, warum die Eigenschaft immer noch gilt.

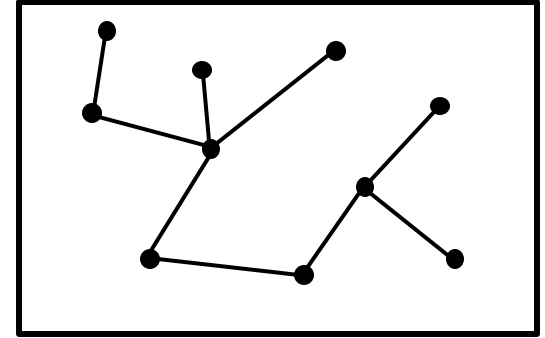
Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit $n + 1$ Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

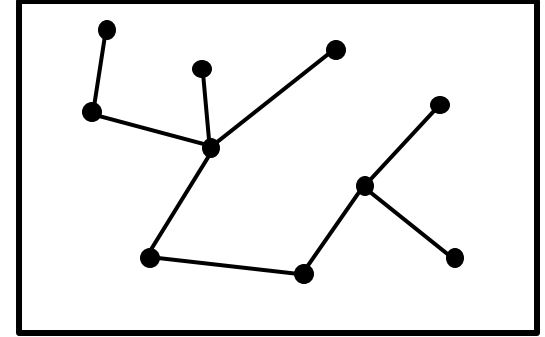


Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit $n + 1$ Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nimm einen beliebigen Knoten (samt Kanten) aus G heraus.

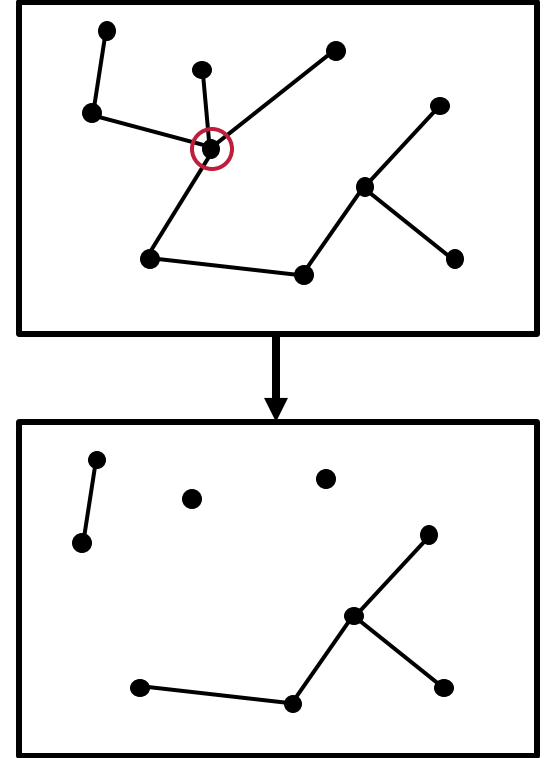


Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit $n + 1$ Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nimm einen beliebigen Knoten (samt Kanten) aus G heraus.



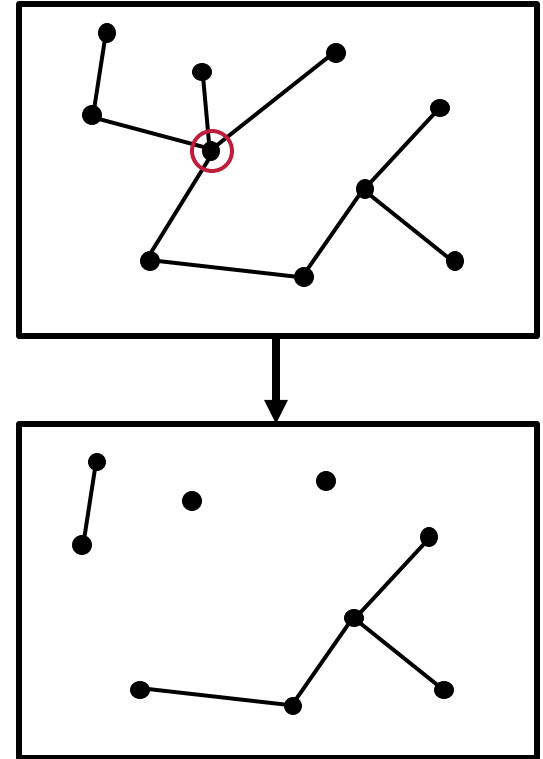
Zusammenhang in Graphen

I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit $n + 1$ Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nimm einen beliebigen Knoten (samt Kanten) aus G heraus.

Der Restgraph enthält n Knoten, welche alle den Grad...mind. 0 besitzen...



Zusammenhang in Graphen

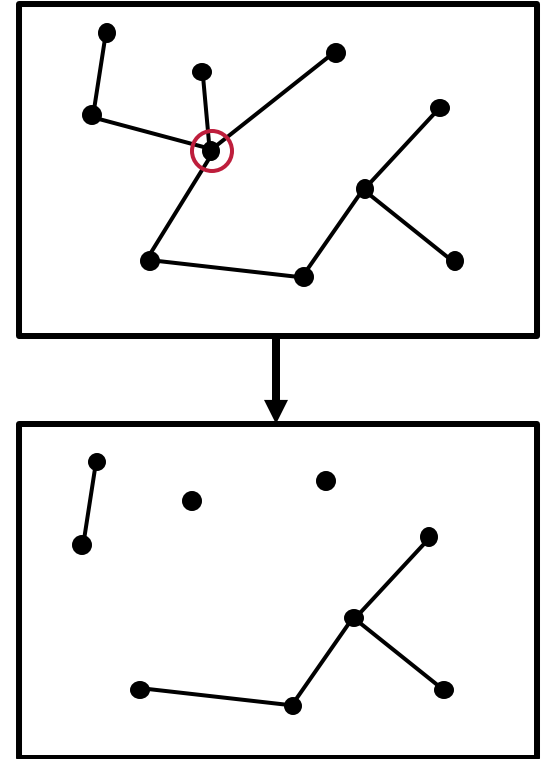
I.S.: $n \rightarrow n + 1$

Betrachte einen Graphen G mit $n + 1$ Knoten in dem jeder Knoten mindestens den Grad 1 hat.

Nimm einen beliebigen Knoten (samt Kanten) aus G heraus.

Der Restgraph enthält n Knoten, welche alle den Grad...mind. 0 besitzen...

Darauf können wir I.V. nicht anwenden!



Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Beweis:“

Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Beweis:“

I.A.: $n = 0: a^0 = 1 = b^0$

Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Beweis:“

I.A.: $n = 0: a^0 = 1 = b^0$

I.V.: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit n bel., aber fest.

Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Beweis:“

I.A.: $n = 0: a^0 = 1 = b^0$

I.V.: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit n bel., aber fest.



„Starke Induktion“.

Manchmal reicht der direkte Vorgänger nicht aus.

Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Beweis:“

I.A.: $n = 0: a^0 = 1 = b^0$

I.V.: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit n bel., aber fest.

I.S.: $a^{n+1} =$



„Starke Induktion“.

Manchmal reicht der direkte Vorgänger nicht aus.

Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Beweis:“

I.A.: $n = 0: a^0 = 1 = b^0$

I.V.: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit n bel., aber fest.

I.S.: $a^{n+1} = a^n a^1 =$



„Starke Induktion“.

Manchmal reicht der direkte Vorgänger nicht aus.

Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Beweis:“

I.A.: $n = 0: a^0 = 1 = b^0$

I.V.: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit n bel., aber fest.

I.S.: $a^{n+1} = a^n a^1 = b^n b^1$



„Starke Induktion“.

Manchmal reicht der direkte Vorgänger nicht aus.

Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Beweis:“

I.A.: $n = 0: a^0 = 1 = b^0$

I.V.: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit n bel., aber fest.

I.S.: $a^{n+1} = a^n a^1 = b^n b^1 = b^{n+1}$



„Starke Induktion“.

Manchmal reicht der direkte Vorgänger nicht aus.

Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Beweis:“

I.A.: $n = 0: a^0 = 1 = b^0$

I.V.: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit n bel., aber fest.

I.S.: $a^{n+1} = a^n a^1$  $b^n b^1 = b^{n+1}$

„Starke Induktion“.

Manchmal reicht der direkte Vorgänger nicht aus.



Induktionsvoraussetzung

Behauptung: $a^n = b^n$ für alle $a, b \in \mathbb{R}, n \geq 0$

„Beweis:“

I.A.: $n = 0: a^0 = 1 = b^0$

I.V.: $a^x = b^x$ gilt für alle $x \leq n$ mit n bel., aber fest.

I.S.: $a^{n+1} = a^n a^1$  $b^n b^1 = b^{n+1}$

„Starke Induktion“.

Manchmal reicht der direkte Vorgänger nicht aus.



→ IV wird falsch genutzt /
IA deckt nicht alle benötigten Fälle ab

Beliebte Fehler

Beliebte Fehler

- Build-Up-Error:

Beliebte Fehler

- Build-Up-Error:

Füge etwas hinzu, um den Induktionsschritt zu zeigen.

Beliebte Fehler

- Build-Up-Error:

Füge etwas hinzu, um den Induktionsschritt zu zeigen.

So werden ggf. nicht alle Strukturen berücksichtigt!

Beliebte Fehler

- Build-Up-Error:

Füge etwas hinzu, um den Induktionsschritt zu zeigen.

So werden ggf. nicht alle Strukturen berücksichtigt!

- Kein Induktionsanfang, -voraussetzung oder -schritt.

Beliebte Fehler

- Build-Up-Error:

Füge etwas hinzu, um den Induktionsschritt zu zeigen.

So werden ggf. nicht alle Strukturen berücksichtigt!

- Kein Induktionsanfang, -voraussetzung oder -schritt.

IA, IV und IS müssen vorhanden sein!

Beliebte Fehler

- Build-Up-Error:

Füge etwas hinzu, um den Induktionsschritt zu zeigen.

So werden ggf. nicht alle Strukturen berücksichtigt!

- Kein Induktionsanfang, -voraussetzung oder -schritt.

IA, IV und IS müssen vorhanden sein!

- Zu wenig Induktionsanfänge (z.B. bei Rekursionen mit mehreren Anfängen)

Was ist eigentlich, wenn ich die
Induktionsvoraussetzung gar nicht anwende?

Was ist eigentlich, wenn ich die
Induktionsvoraussetzung gar nicht anwende?

→ Dann brauche ich gar keine Induktion für den
Beweis – hat ja ohne geklappt!

Was ist eigentlich, wenn ich die
Induktionsvoraussetzung gar nicht anwende?

- Dann brauche ich gar keine Induktion für den Beweis – hat ja ohne geklappt!
- (... oder unser Beweis ist fehlerhaft.)

Beispiele für Vollständige Induktion

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

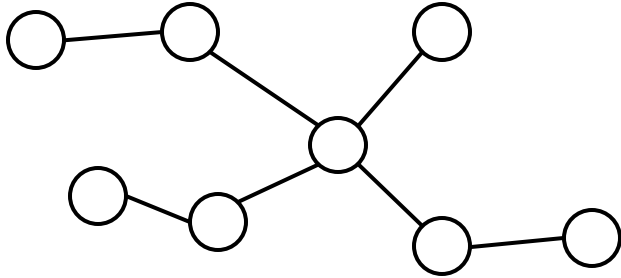
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

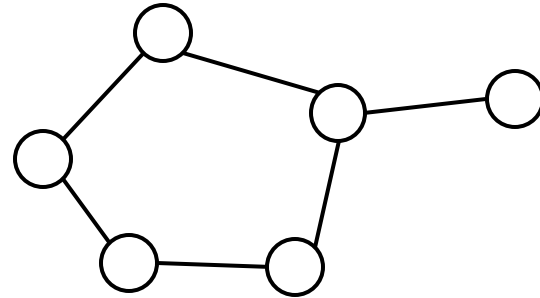
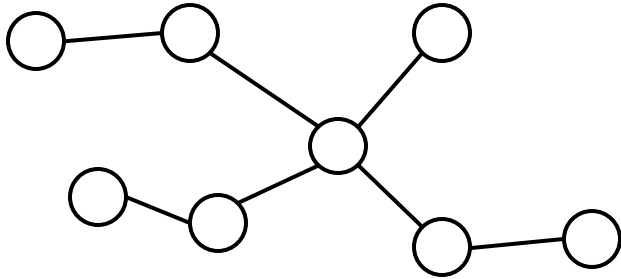
(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)

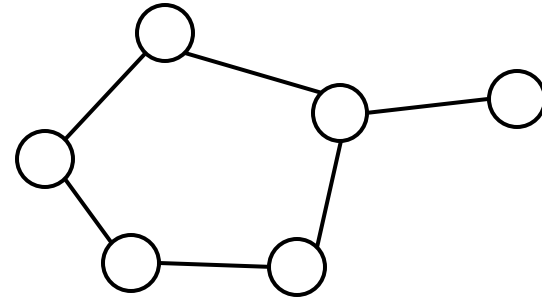
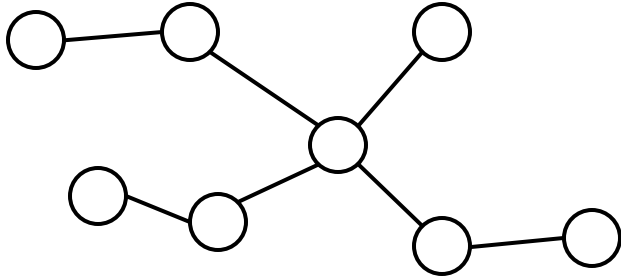


Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)

Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?

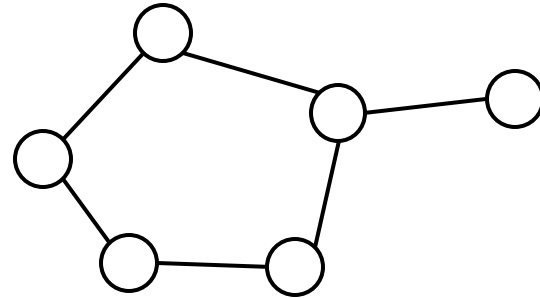
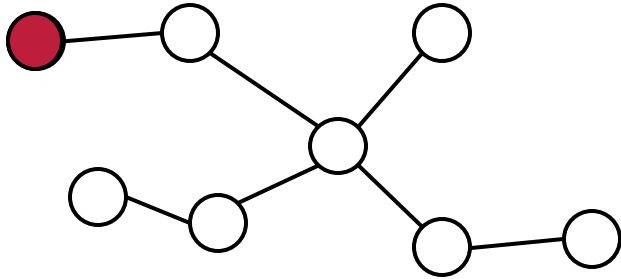


Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)

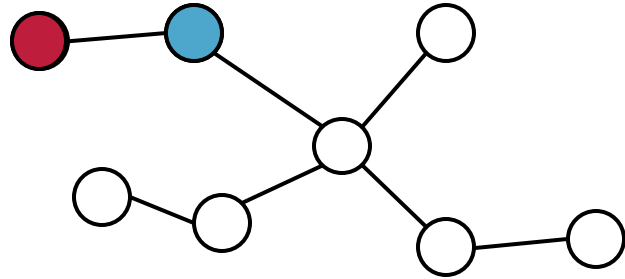
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



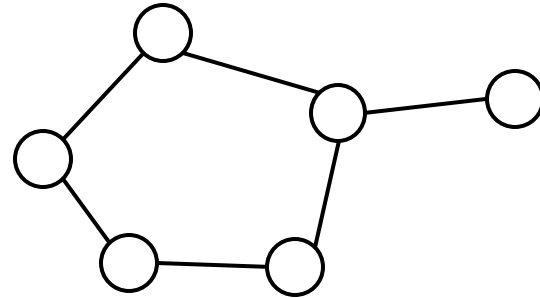
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



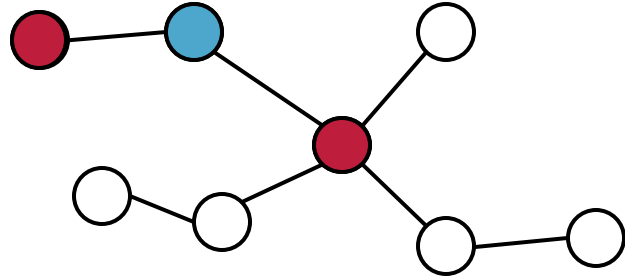
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



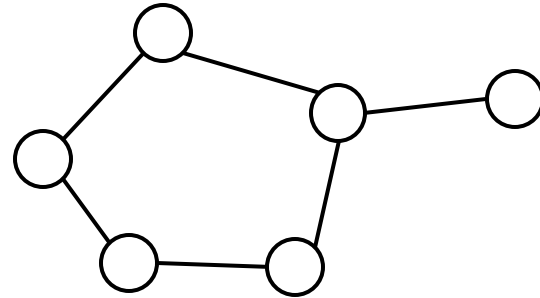
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



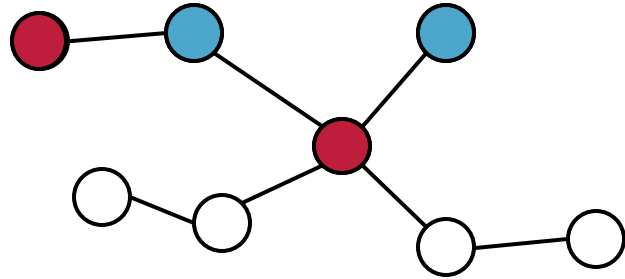
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



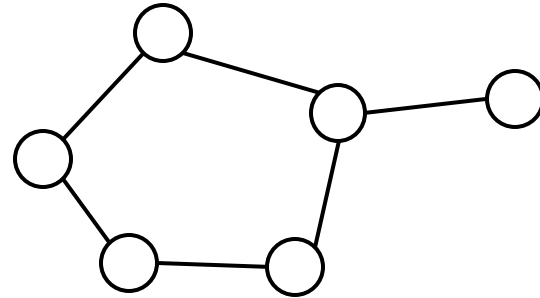
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



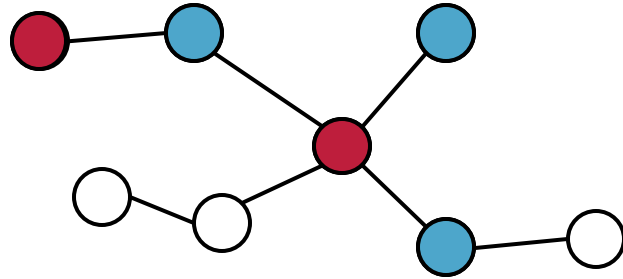
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



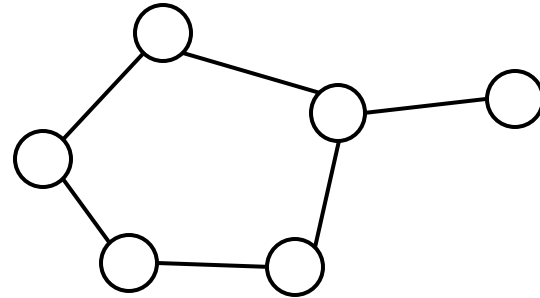
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



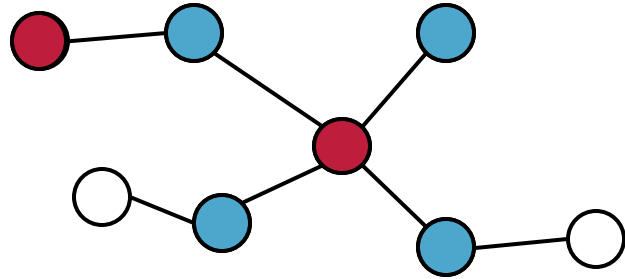
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



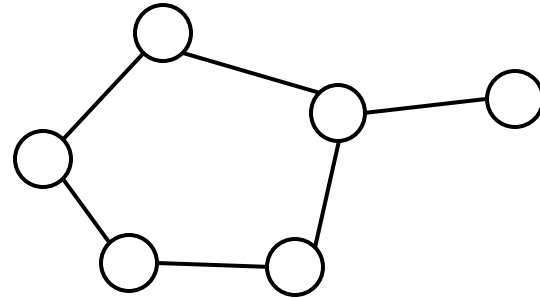
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



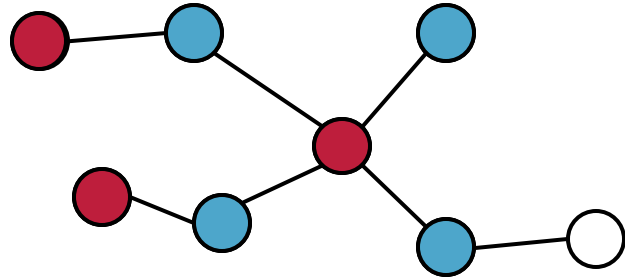
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



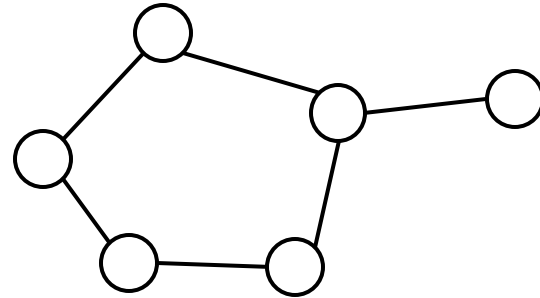
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



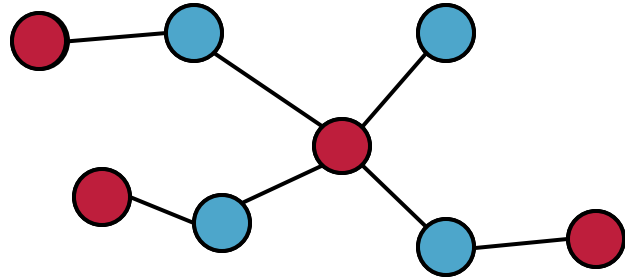
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



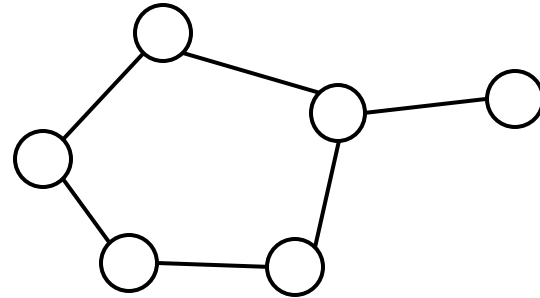
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



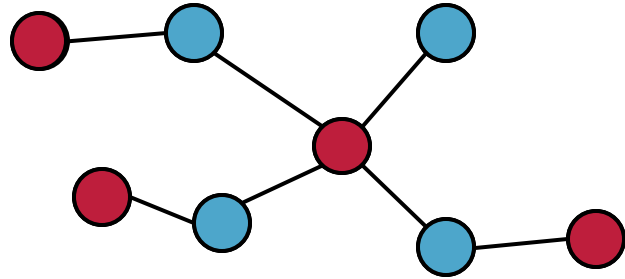
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

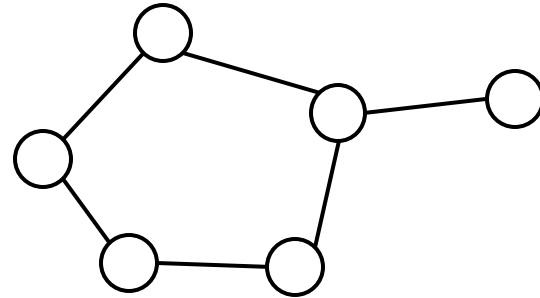
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



Ja! $\rightarrow$ 2-färbbar.

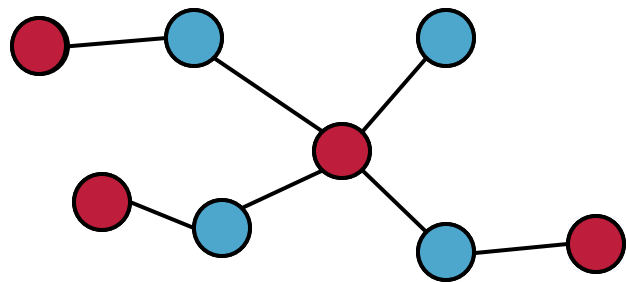
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

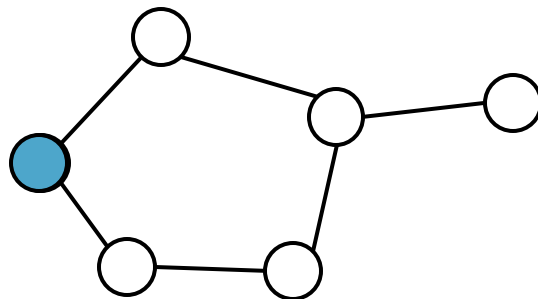
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



Ja! $\rightarrow$ 2-färbbar.

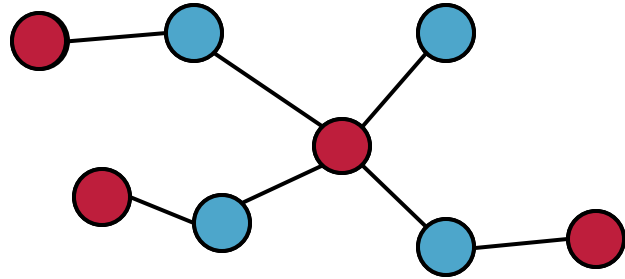
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

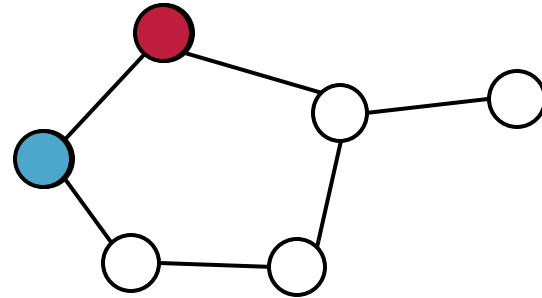
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



Ja! $\rightarrow$ 2-färbbar.

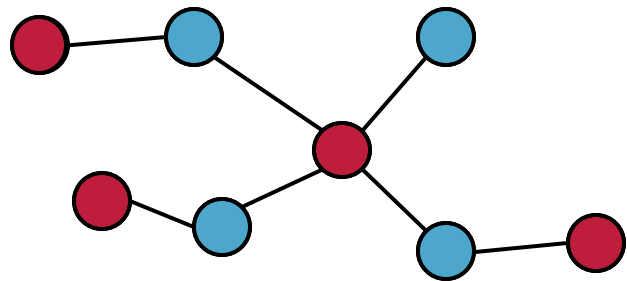
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

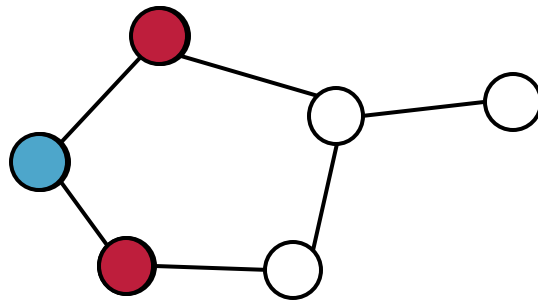
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



Ja! $\rightarrow$ 2-färbbar.

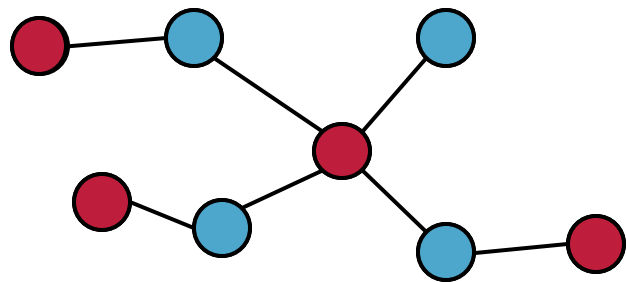
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

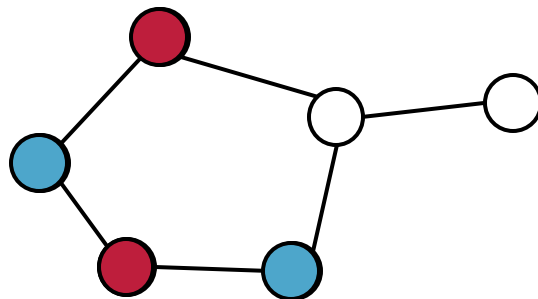
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



Ja! $\rightarrow$ 2-färbbar.

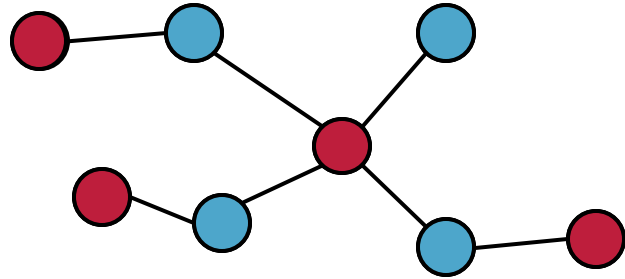
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

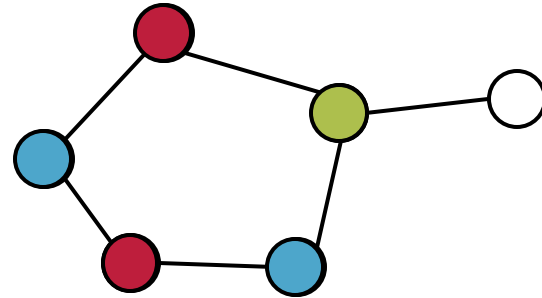
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



Ja! $\rightarrow$ 2-färbbar.

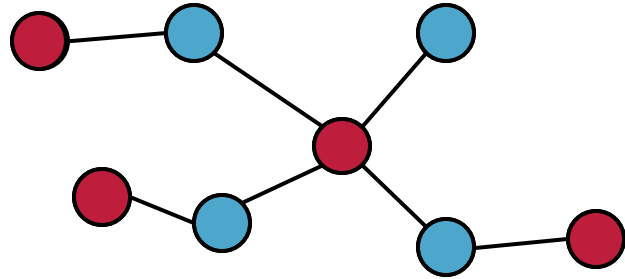
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

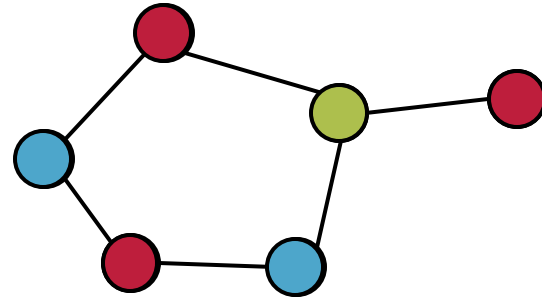
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



Ja! $\rightarrow$ 2-färbbar.

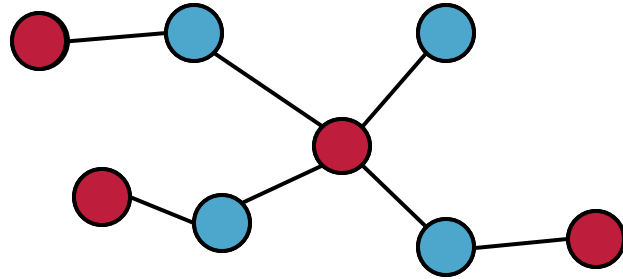
Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

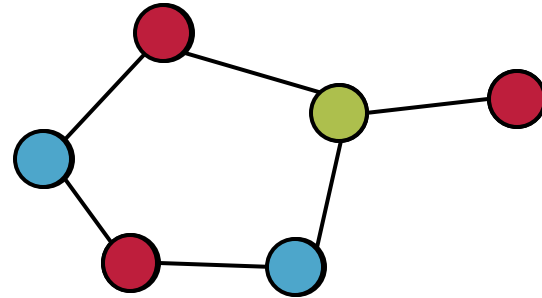
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



Ja! $\rightarrow$ 2-färbbar.

Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?

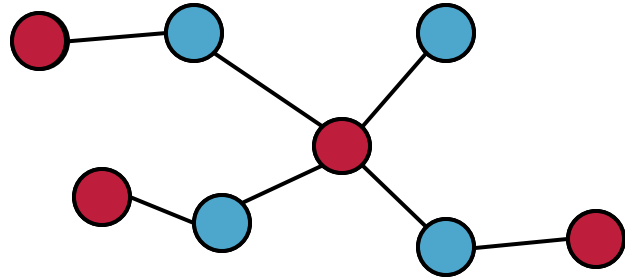


Nein! $\rightarrow$ *Nicht* 2-färbbar.

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

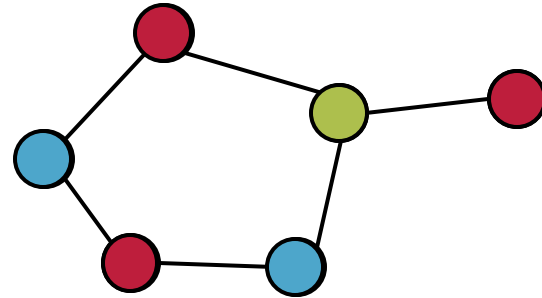
Problem: Färbe Knoten eines Graphen so, dass benachbarte Knoten nicht dieselbe Farbe besitzen!

(Die Zahl der Farben ist begrenzt)



Ja! $\rightarrow$ 2-färbbar.

Reichen 2 Farben aus, um diese Graphen zu färben?



Nein! $\rightarrow$ *Nicht* 2-färbbar.
Aber 3-färbbar.

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist $(k + 1)$ -färbbar.

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist $(k + 1)$ -färbbar.

$$k \in \mathbb{N} \ (k \geq 1)$$

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist $(k + 1)$ -färbbar.

$k \in \mathbb{N} \ (k \geq 1)$

Beweis: Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen.

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist $(k + 1)$ -färbbar.

$$k \in \mathbb{N} \ (k \geq 1)$$

Beweis: Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen.

- $P(n)$: Ein Graph mit n Knoten und Maximalgrad maximal k ist $(k + 1)$ -färbbar.

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist $(k + 1)$ -färbbar.

$$k \in \mathbb{N} \ (k \geq 1)$$

Beweis: Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen.

- $P(n)$: Ein Graph mit n Knoten und Maximalgrad maximal k ist $(k + 1)$ -färbbar.

Induktionsanfang:

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist $(k + 1)$ -färbbar.

$$k \in \mathbb{N} \ (k \geq 1)$$

Beweis: Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen.

- $P(n)$: Ein Graph mit n Knoten und Maximalgrad maximal k ist $(k + 1)$ -färbbar.

Induktionsanfang:

Betrachte den Fall $n = 1$:

.....

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist $(k + 1)$ -färbbar.

$$k \in \mathbb{N} \ (k \geq 1)$$

Beweis: Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen.

- $P(n)$: Ein Graph mit n Knoten und Maximalgrad maximal k ist $(k + 1)$ -färbbar.

Induktionsanfang:

Betrachte den Fall $n = 1$:

- Ein Graph mit nur einem Knoten hat Maximalgrad 0

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist $(k + 1)$ -färbbar.

$$k \in \mathbb{N} \ (k \geq 1)$$

Beweis: Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen.

- $P(n)$: Ein Graph mit n Knoten und Maximalgrad maximal k ist $(k + 1)$ -färbbar.

Induktionsanfang:

Betrachte den Fall $n = 1$:

- Ein Graph mit nur einem Knoten hat Maximalgrad 0
- Dieser Graph ist offensichtlich mit einer Farbe färbbar.

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Behauptung: Ein Graph G mit Maximalgrad k ist $(k + 1)$ -färbbar.

$$k \in \mathbb{N} \ (k \geq 1)$$

Beweis: Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen.

- $P(n)$: Ein Graph mit n Knoten und Maximalgrad maximal k ist $(k + 1)$ -färbbar.

Induktionsanfang:

Betrachte den Fall $n = 1$:

- Ein Graph mit nur einem Knoten hat Maximalgrad 0
- Dieser Graph ist offensichtlich mit einer Farbe färbbar.
- $P(1)$ gilt.

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .

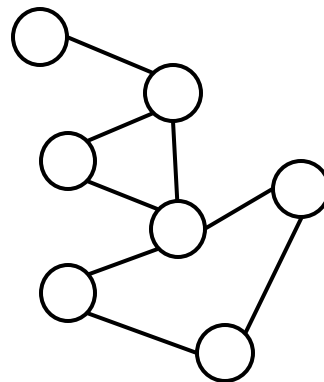
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .



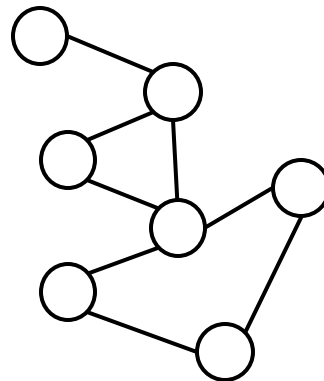
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.



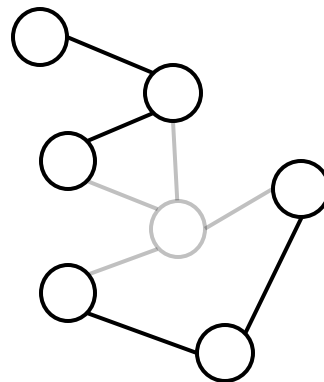
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.



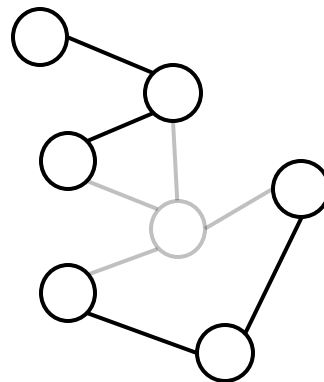
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
- Es resultiert Graph G' .



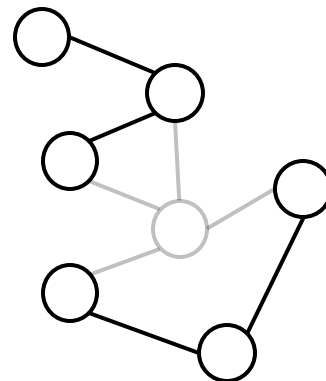
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
 - Es resultiert Graph G' .
 - G' hat n Knoten.



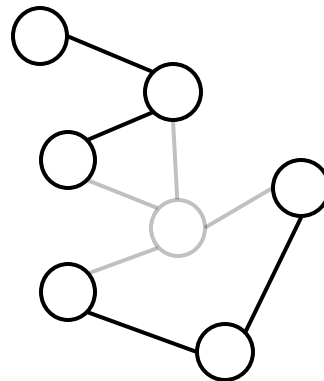
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
 - Es resultiert Graph G' .
 - G' hat n Knoten.
 - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k .



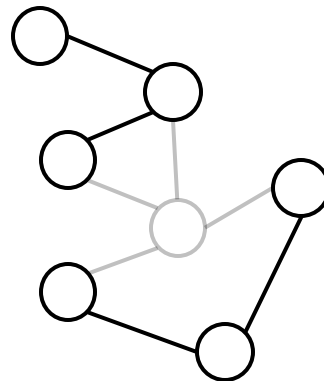
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
 - Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
 - Es resultiert Graph G' .
 - G' hat n Knoten.
 - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k .
- Für G' gilt die IV: G' ist mit $k + 1$ vielen Farben färbbar.



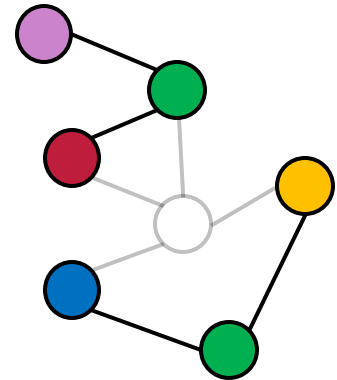
Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsvoraussetzung:

Gelte die Behauptung $P(n)$ für n, k beliebig; n fest.

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

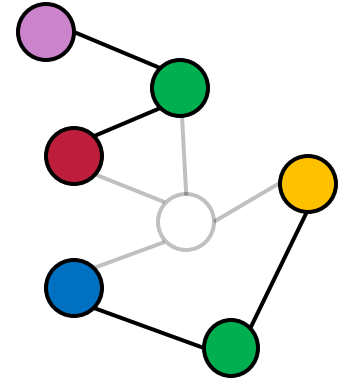
- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
 - Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
 - Es resultiert Graph G' .
 - G' hat n Knoten.
 - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k .
- Für G' gilt die IV: G' ist mit $k + 1$ vielen Farben färbbar.



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

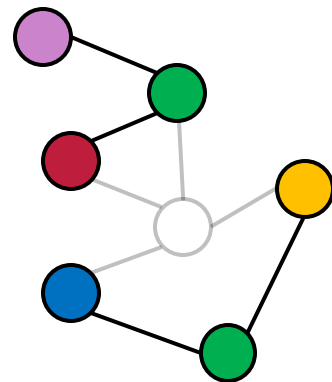
- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
 - Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
 - Es resultiert Graph G' .
 - G' hat n Knoten.
 - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k .
- Für G' gilt die IV: G' ist mit $k + 1$ vielen Farben färbbar.



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

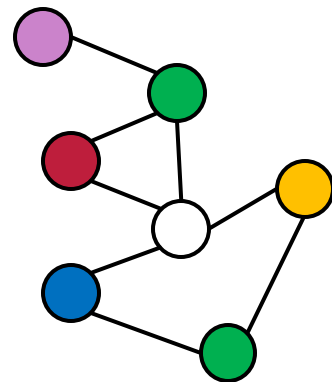
- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
 - Es resultiert Graph G' .
 - G' hat n Knoten.
 - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k .
- Für G' gilt die IV: G' ist mit $k + 1$ vielen Farben färbbar.
- Füge Knoten v (und seine inzidenten Kanten) wieder zu G' hinzu.



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

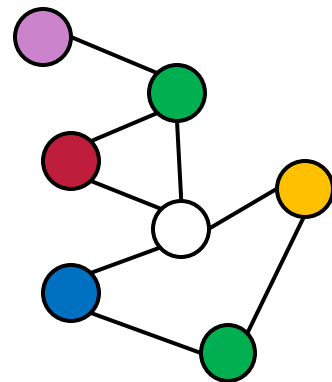
- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
 - Es resultiert Graph G' .
 - G' hat n Knoten.
 - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k .
- Für G' gilt die IV: G' ist mit $k + 1$ vielen Farben färbbar.
- Füge Knoten v (und seine inzidenten Kanten) wieder zu G' hinzu.



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

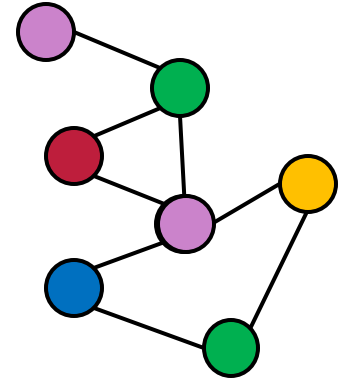
- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
 - Es resultiert Graph G' .
 - G' hat n Knoten.
 - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k .
- Für G' gilt die IV: G' ist mit $k + 1$ vielen Farben färbbar.
- Füge Knoten v (und seine inzidenten Kanten) wieder zu G' hinzu.
- Da v maximal k viele Nachbarn hat und wir $k + 1$ viele Farben zur Verfügung haben, können wir v mit der übrigen Farbe färben.



Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
 - Es resultiert Graph G' .
 - G' hat n Knoten.
 - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k .
- Für G' gilt die IV: G' ist mit $k + 1$ vielen Farben färbbar.
- Füge Knoten v (und seine inzidenten Kanten) wieder zu G' hinzu.
- Da v maximal k viele Nachbarn hat und wir $k + 1$ viele Farben zur Verfügung haben, können wir v mit der übrigen Farbe färben.

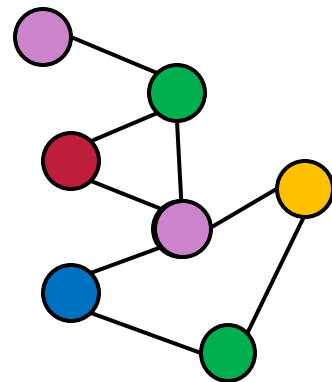


Induktion auf Graphen: Färbbarkeit

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

- Sei $P(n)$ wahr und sei G ein Graph mit $n + 1$ vielen Knoten und Maximalgrad k .
- Entferne beliebigen Knoten v und alle inzidenten Kanten.
 - Es resultiert Graph G' .
 - G' hat n Knoten.
 - Der Maximalgrad ändert sich nicht, bleibt k .
- Für G' gilt die IV: G' ist mit $k + 1$ vielen Farben färbbar.
- Füge Knoten v (und seine inzidenten Kanten) wieder zu G' hinzu.
- Da v maximal k viele Nachbarn hat und wir $k + 1$ viele Farben zur Verfügung haben, können wir v mit der übrigen Farbe färben.

Damit folgt die Behauptung nach dem Prinzip der Induktion.

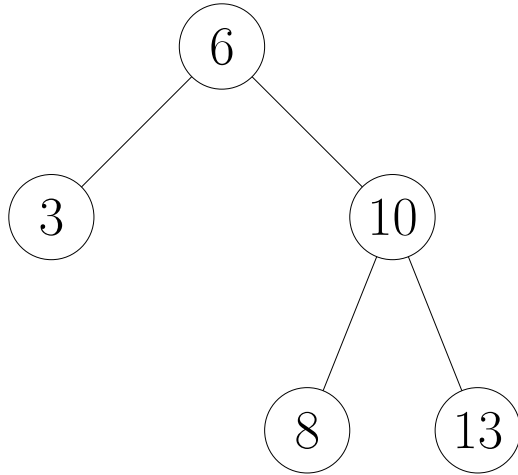


Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n \leq 2^h - 1$.

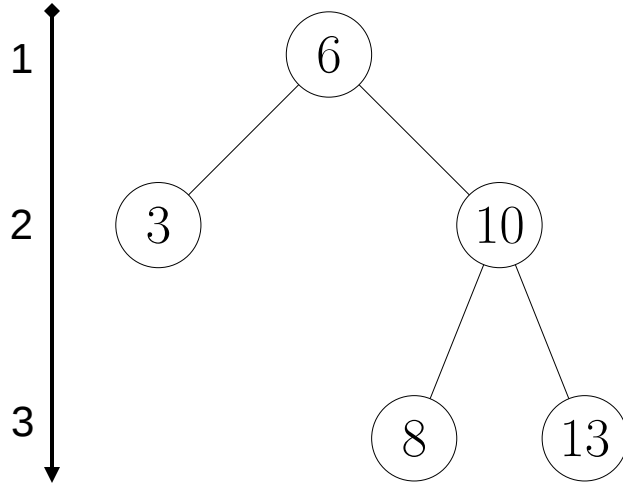
Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n \leq 2^h - 1$.



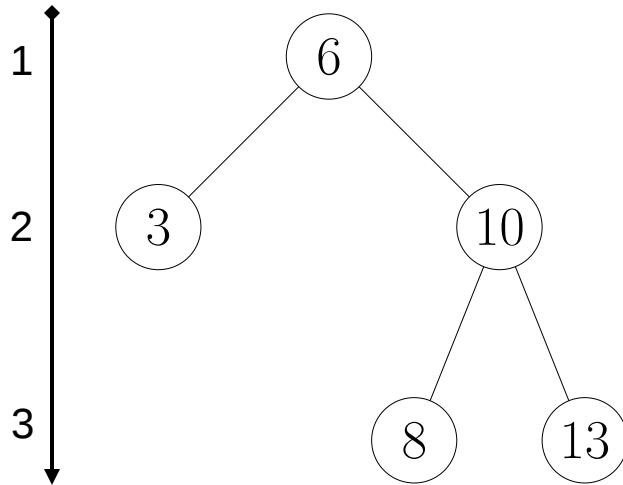
Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n \leq 2^h - 1$.



Knoten in binären Suchbäumen

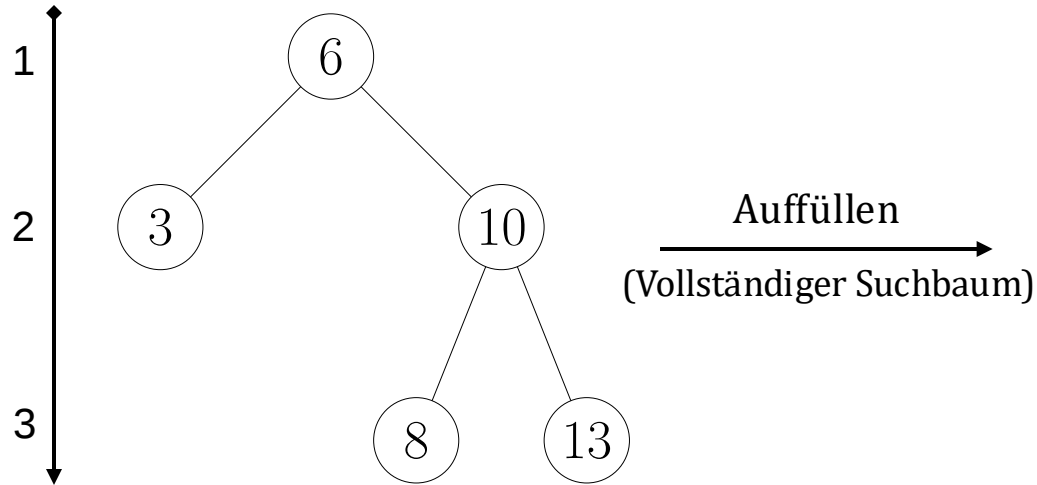
Satz: Sei B ein binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n \leq 2^h - 1$.



$$h = 3, n = 5 \leq 7 = 2^3 - 1$$

Knoten in binären Suchbäumen

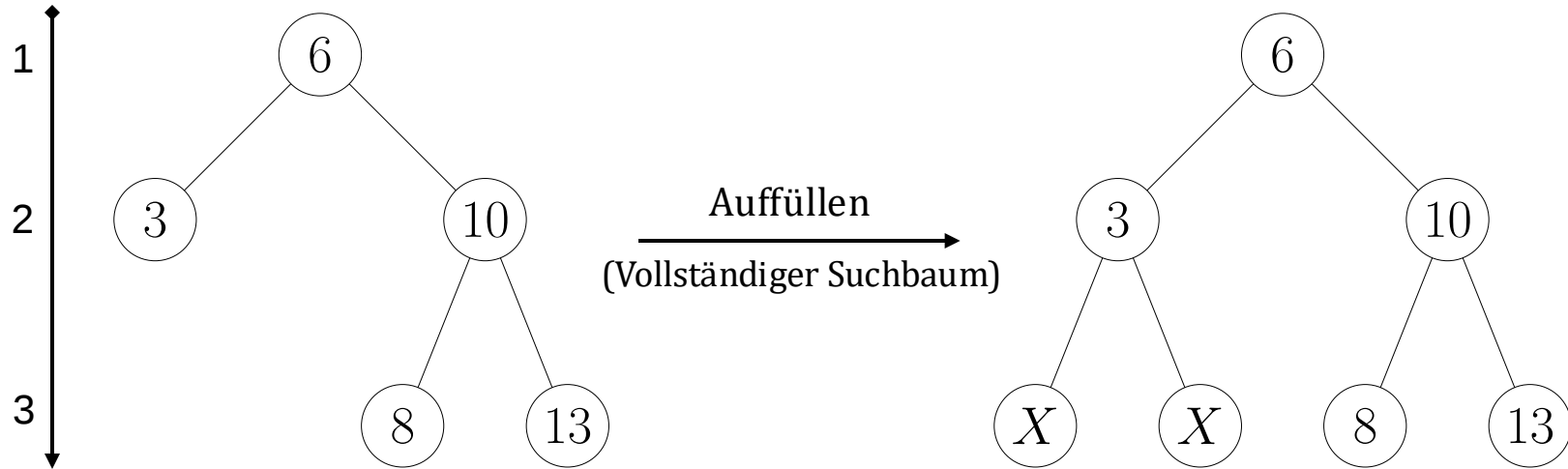
Satz: Sei B ein binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n \leq 2^h - 1$.



$$h = 3, n = 5 \leq 7 = 2^3 - 1$$

Knoten in binären Suchbäumen

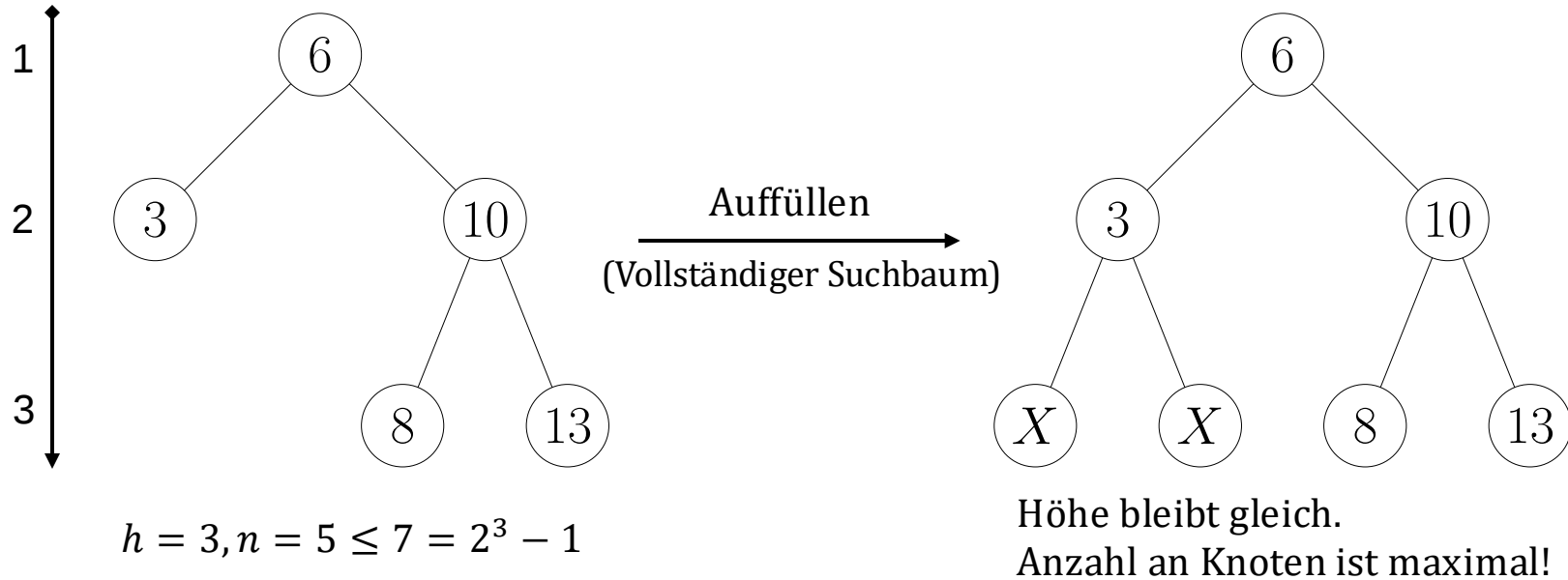
Satz: Sei B ein binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n \leq 2^h - 1$.



$$h = 3, n = 5 \leq 7 = 2^3 - 1$$

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n \leq 2^h - 1$.



Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein ***vollständiger*** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein ***vollständiger*** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsanfang:

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein ***vollständiger*** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsanfang:

Vollständiger Suchbaum der Höhe 1 besitzt einen Knoten.

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsanfang:

Vollständiger Suchbaum der Höhe 1 besitzt einen Knoten.

Außerdem ist $2^1 - 1 = 1 = n$.

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsanfang:

Vollständiger Suchbaum der Höhe 1 besitzt einen Knoten.

Außerdem ist $2^1 - 1 = 1 = n$.

Induktionsvoraussetzung:

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsanfang:

Vollständiger Suchbaum der Höhe 1 besitzt einen Knoten.

Außerdem ist $2^1 - 1 = 1 = n$.

Induktionsvoraussetzung:

Jeder vollständige binäre Suchbaum der Höhe h besitzt $n = 2^h - 1$ mit h beliebig, aber fest.

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein ***vollständiger*** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein ***vollständiger*** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:

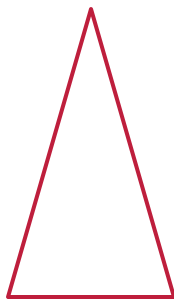
Betrachte vollständigen binären Suchbaum B der Höhe $h + 1$.

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:

Betrachte vollständigen binären Suchbaum B der Höhe $h + 1$.

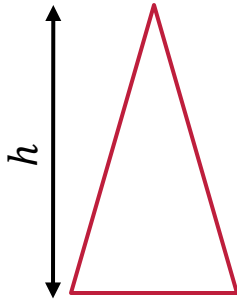


Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:

Betrachte vollständigen binären Suchbaum B der Höhe $h + 1$.

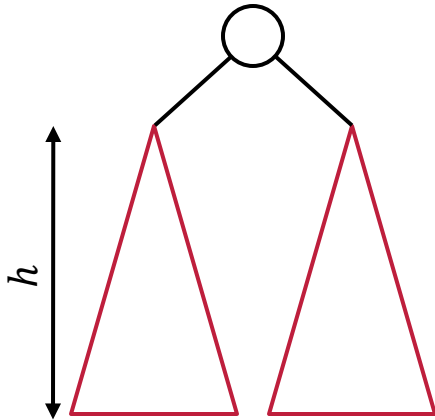


Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:

Betrachte vollständigen binären Suchbaum B der Höhe $h + 1$.

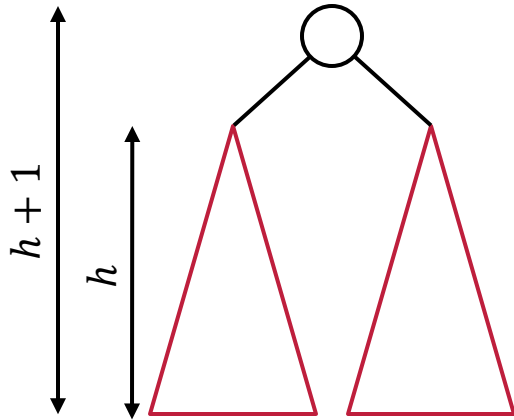


Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:

Betrachte vollständigen binären Suchbaum B der Höhe $h + 1$.

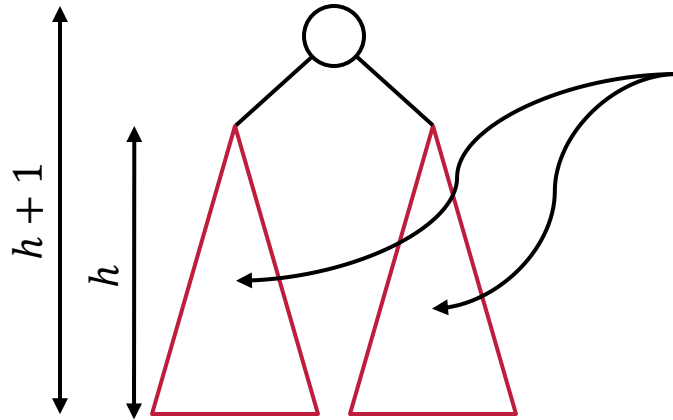


Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:

Betrachte vollständigen binären Suchbaum B der Höhe $h + 1$.



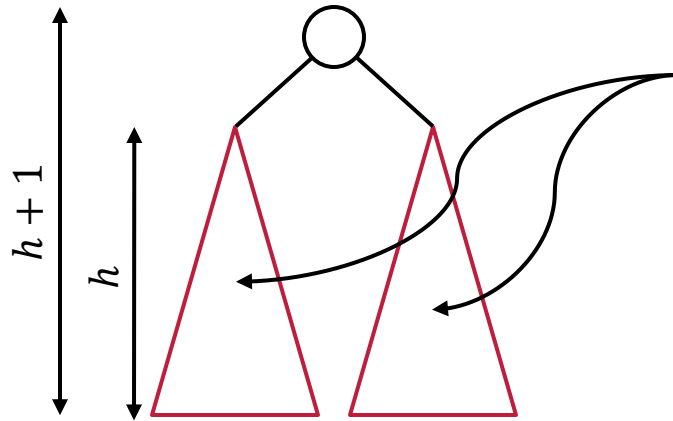
Zwei vollst. bin. Suchbäume der Höhe h .
Nach IV: je $2^h - 1$ Knoten

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:

Betrachte vollständigen binären Suchbaum B der Höhe $h + 1$.



Zwei vollst. bin. Suchbäume der Höhe h .
Nach IV: je $2^h - 1$ Knoten

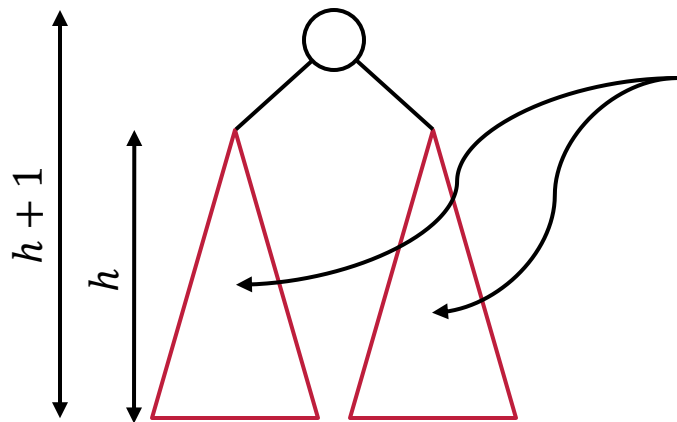
Also hat B
 $2 \cdot (2^h - 1) + 1$
Knoten.

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:

Betrachte vollständigen binären Suchbaum B der Höhe $h + 1$.



Zwei vollst. bin. Suchbäume der Höhe h .
Nach IV: je $2^h - 1$ Knoten

Also hat B

$$2 \cdot (2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 2 + 1$$

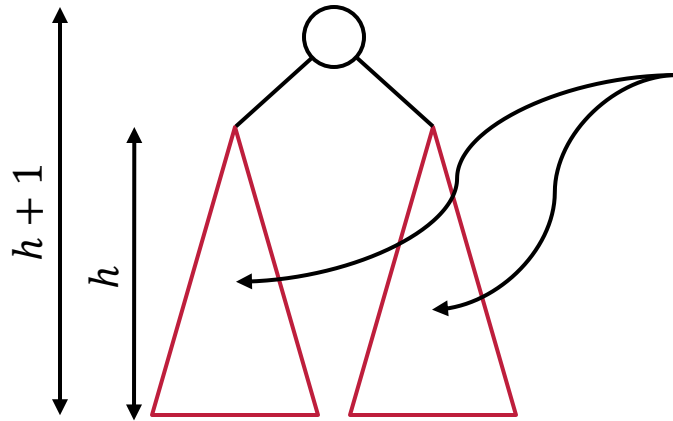
Knoten.

Knoten in binären Suchbäumen

Satz: Sei B ein **vollständiger** binärer Suchbaum der Höhe h mit n Knoten. Dann ist $n = 2^h - 1$.

Induktionsschluss:

Betrachte vollständigen binären Suchbaum B der Höhe $h + 1$.



Zwei vollst. bin. Suchbäume der Höhe h .
Nach IV: je $2^h - 1$ Knoten

Also hat B

$$2 \cdot (2^h - 1) + 1 = 2^{h+1} - 2 + 1 = 2^{h+1} - 1$$

Knoten.

Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

Induktionsanfang:

$$F_0 = 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right)$$

Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

Induktionsanfang:

$$F_0 = 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right)$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gilt $F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ mit n beliebig, aber fest.

Rekursionsformel

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right) \right)$$

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right) \right)$$

Für $n + 1 = 1$ geht es hier schief, denn F_{-1} ist unbekannt!

Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

Induktionsanfang:

$$F_0 = 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right)$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gilt $F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ mit n beliebig, aber fest.

Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

Induktionsanfang:

$$F_0 = 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right)$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gilt $F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ mit n beliebig, aber fest.

Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

Induktionsanfang:

$$F_0 = 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right)$$

$$F_1 = 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{1\pi}{3}\right)$$

Induktionsvoraussetzung:

Es gilt $F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ mit n beliebig, aber fest.

Rekursionsformel

Satz: Sei $F_n := F_{n-1} - F_{n-2}$ mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.

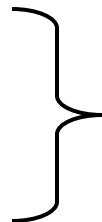
Dann gilt:

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

Induktionsanfang:

$$F_0 = 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{0\pi}{3}\right)$$

$$F_1 = 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{1\pi}{3}\right)$$



Hier sind zwei Induktionsanfänge nötig!

Induktionsvoraussetzung:

Es gilt $F_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ mit n beliebig, aber fest.

Rekursionsformel

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right) \right)$$

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right) \right)$$

$$i = n \bmod 6$$

$$\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(i-1)}{3}\right)$$

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right) \right)$$

$i = n \bmod 6$	$\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(i-1)}{3}\right)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right) \right)$$

$i = n \bmod 6$	$\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(i-1)}{3}\right)$
0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
3	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Rekursionsformel

Induktionsschritt:

$$F_{n+1} = F_n - F_{n-1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{3}\right) \right)$$

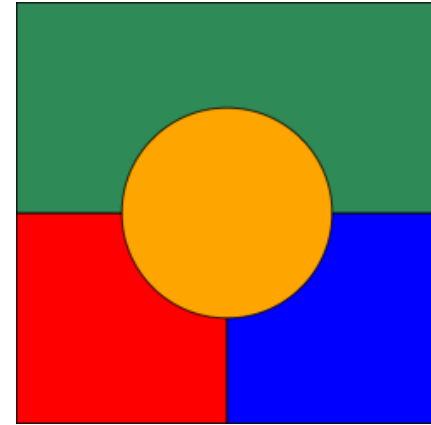
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{3}\right)$$

$i = n \bmod 6$	$\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{\pi i}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi(i-1)}{3}\right)$
0	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
3	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Kartenfärbung

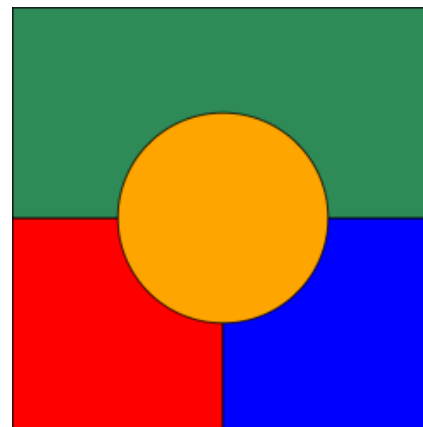
Vier-Farben-Satz: Vier Farben sind immer ausreichend, eine beliebige Landkarte in der euklidischen Ebene so einzufärben, dass angrenzende Länder unterschiedliche Farben besitzen.

Vier-Farben-Satz: Vier Farben sind immer ausreichend, eine beliebige Landkarte in der euklidischen Ebene so einzufärben, dass angrenzende Länder unterschiedliche Farben besitzen.



Vier-Farben-Satz: Vier Farben sind immer ausreichend, eine beliebige Landkarte in der euklidischen Ebene so einzufärben, dass angrenzende Länder unterschiedliche Farben besitzen.

Vermutung von Francis Guthrie, 1852
Computerbeweis, (seit) 1989
„formaler Beweis“ mit Coq, 2005

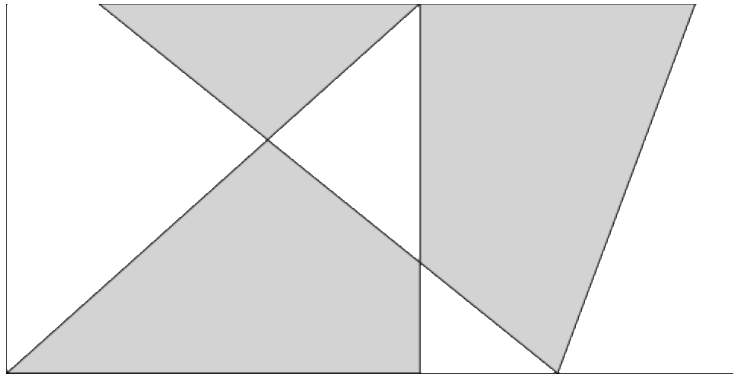


Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Frage: Kann eine Karte immer mit zwei Farben gefärbt werden, wenn die Grenzen geradlinig sind?

Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Frage: Kann eine Karte immer mit zwei Farben gefärbt werden, wenn die Grenzen geradlinig sind?



Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Beweis per Induktion über die Anzahl n an Geraden.

Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Beweis per Induktion über die Anzahl n an Geraden.

I.A.: $n = 1$. Man färbt einen Teil der Karte weiß, den anderen schwarz.

Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Beweis per Induktion über die Anzahl n an Geraden.

I.A.: $n = 1$. Man färbt einen Teil der Karte weiß, den anderen schwarz.

I.V.: Behauptung gilt für Karten mit n Geraden.

Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Beweis per Induktion über die Anzahl n an Geraden.

I.A.: $n = 1$. Man färbt einen Teil der Karte weiß, den anderen schwarz.

I.V.: Behauptung gilt für Karten mit n Geraden.

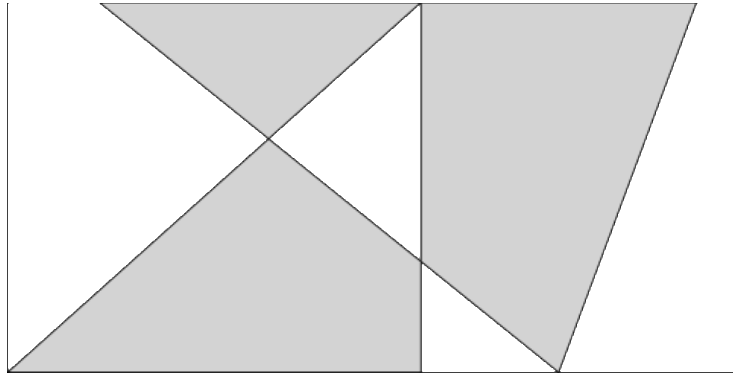
I.S.: $n \rightarrow n+1$. O.B.d.A. drehe die Karte so, dass die neue Gerade horizontal verläuft. Die neue Karte ist nicht zulässig gefärbt.

Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Beweis per Induktion über die Anzahl n an Geraden.

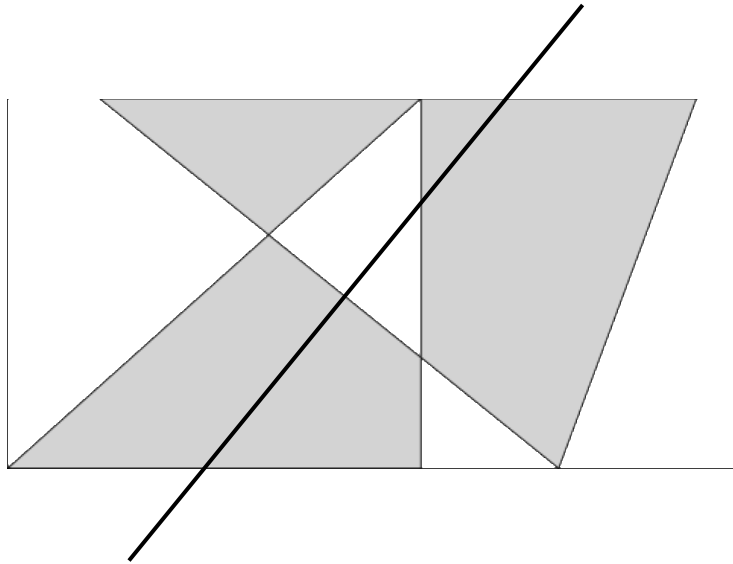
Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Beweis per Induktion über die Anzahl n an Geraden.



Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

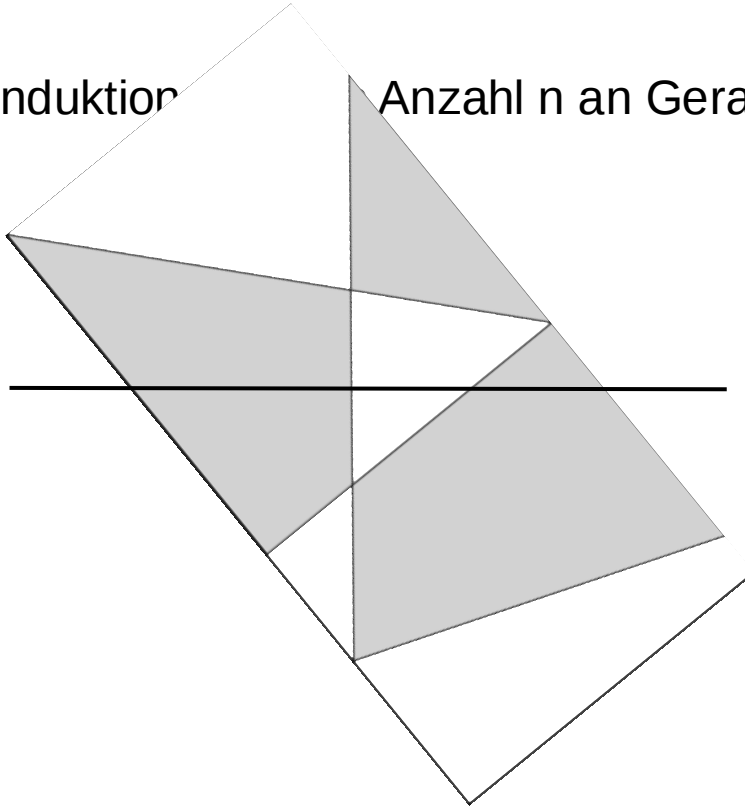
Beweis per Induktion über die Anzahl n an Geraden.



Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Beweis per Induktion

Anzahl n an Geraden.



Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Beweis per Induktion über die Anzahl n an Geraden.

I.A.: $n = 1$. Man färbt einen Teil der Karte weiß, den anderen schwarz.

I.V.: Behauptung gilt für Karten mit n Geraden.

I.S.: $n \rightarrow n+1$. O.B.d.A. drehe die Karte so, dass die neue Gerade horizontal verläuft. Die neue Karte ist nicht zulässig gefärbt.

Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Beweis per Induktion über die Anzahl n an Geraden.

I.A.: $n = 1$. Man färbt einen Teil der Karte weiß, den anderen schwarz.

I.V.: Behauptung gilt für Karten mit n Geraden.

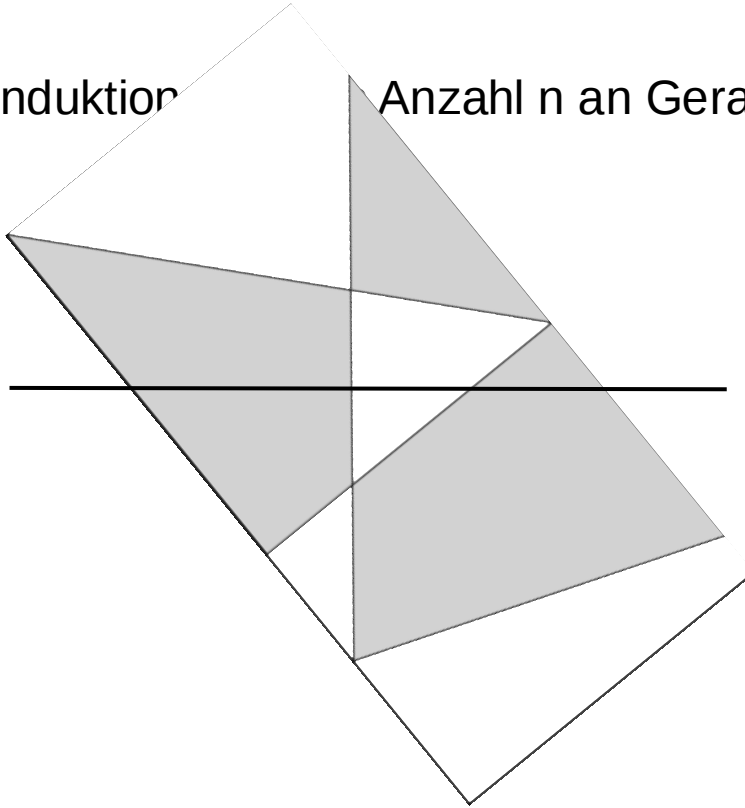
I.S.: $n \rightarrow n+1$. O.B.d.A. drehe die Karte so, dass die neue Gerade horizontal verläuft. Die neue Karte ist nicht zulässig gefärbt.

Wir färben den Teil oberhalb der neuen Geraden um, d.h. alle weißen Flächen schwarz und umgekehrt.

Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Beweis per Induktion

Anzahl n an Geraden.



Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

1. Fall: Beide Länder sind unterhalb der neuen Geraden. Diese haben unterschiedliche Farben nach Induktionsvoraussetzung (wir haben die Farben nicht geändert).

Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

- 1. Fall:** Beide Länder sind unterhalb der neuen Geraden. Diese haben unterschiedliche Farben nach Induktionsvoraussetzung (wir haben die Farben nicht geändert).
- 2. Fall:** Beide Länder liegen oberhalb der neuen Geraden. Dort haben wir die Farben getauscht,... nach IV haben sie unterschiedliche Farben.

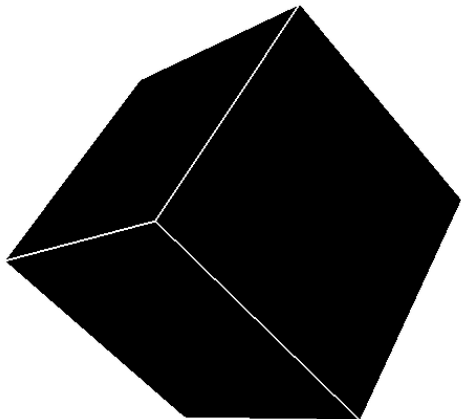
Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

- 1. Fall:** Beide Länder sind unterhalb der neuen Geraden. Diese haben unterschiedliche Farben nach Induktionsvoraussetzung (wir haben die Farben nicht geändert).
- 2. Fall:** Beide Länder liegen oberhalb der neuen Geraden. Dort haben wir die Farben getauscht,... nach IV haben sie unterschiedliche Farben.
- 3. Fall:** Ein Land liegt oberhalb, eins unterhalb der neuen Geraden. Die Grenze zwischen den Ländern muss ein Teil der neuen Geraden sein, d.h. die Länder waren vorher ein Land und daher gleich gefärbt. Nun haben wir den Teil oberhalb der Geraden umgekehrt und unterhalb beibehalten. Damit sind die beiden Länder unterschiedlich gefärbt.

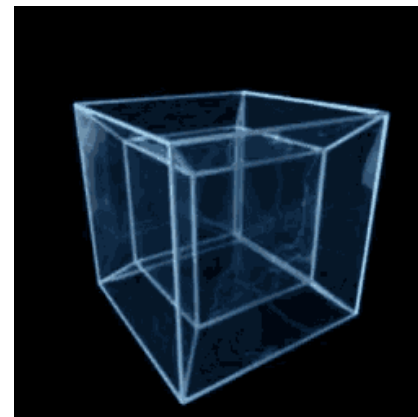
Schwarz-Weiß-Kartenfärbung

- 1. Fall:** Beide Länder sind unterhalb der neuen Geraden. Diese haben unterschiedliche Farben nach Induktionsvoraussetzung (wir haben die Farben nicht geändert).
- 2. Fall:** Beide Länder liegen oberhalb der neuen Geraden. Dort haben wir die Farben getauscht,... nach IV haben sie unterschiedliche Farben.
- 3. Fall:** Ein Land liegt oberhalb, eins unterhalb der neuen Geraden. Die Grenze zwischen den Ländern muss ein Teil der neuen Geraden sein, d.h. die Länder waren vorher ein Land und daher gleich gefärbt. Nun haben wir den Teil oberhalb der Geraden umgekehrt und unterhalb beibehalten. Damit sind die beiden Länder unterschiedlich gefärbt.

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Behauptung gilt.



Hypercubes



Beweise – Vollständige Induktion

n -Dimensionale Würfel

Beweise – Vollständige Induktion

n -Dimensionale Würfel

Zeige: n -Dimensionale Würfel sind hamiltonsch (besitzt einen Hamiltonkreis), für $n \geq 2$.

Beweise – Vollständige Induktion

n -Dimensionale Würfel

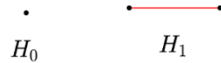
Zeige: n -Dimensionale Würfel sind hamiltonsch (besitzt einen Hamiltonkreis), für $n \geq 2$.

•
 H_0

Beweise – Vollständige Induktion

n -Dimensionale Würfel

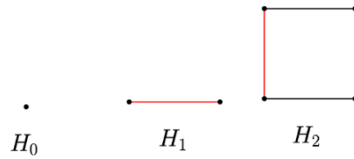
Zeige: n -Dimensionale Würfel sind hamiltonsch (besitzt einen Hamiltonkreis), für $n \geq 2$.



Beweise – Vollständige Induktion

n -Dimensionale Würfel

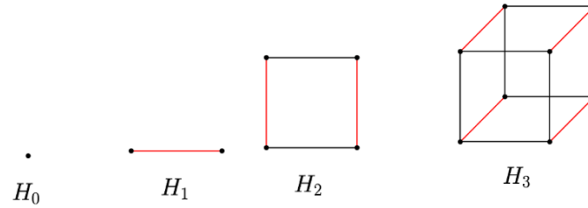
Zeige: n -Dimensionale Würfel sind hamiltonsch (besitzt einen Hamiltonkreis), für $n \geq 2$.



Beweise – Vollständige Induktion

n -Dimensionale Würfel

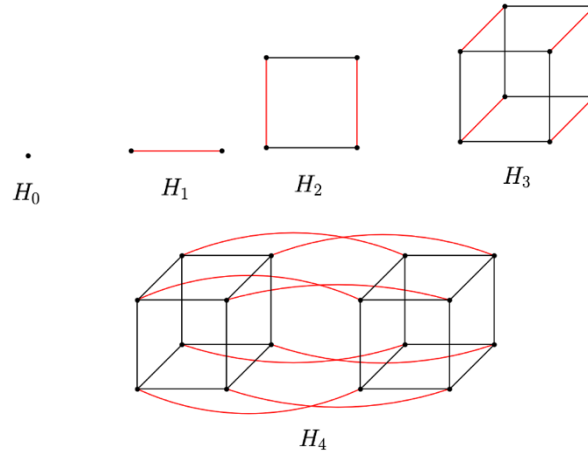
Zeige: n -Dimensionale Würfel sind hamiltonsch (besitzt einen Hamiltonkreis), für $n \geq 2$.



Beweise – Vollständige Induktion

n -Dimensionale Würfel

Zeige: n -Dimensionale Würfel sind hamiltonsch (besitzt einen Hamiltonkreis), für $n \geq 2$.



Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

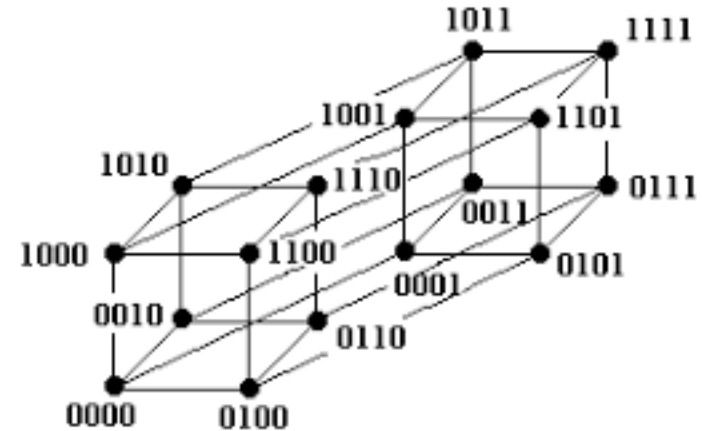
I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.:



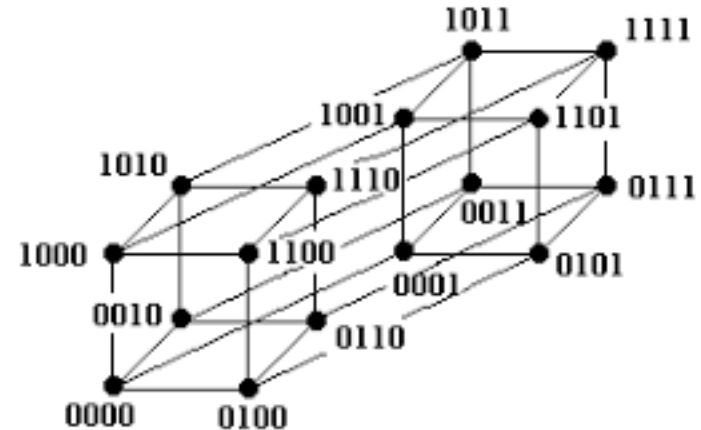
Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.:

- Betrachte $(n + 1)$ -Dimensionalen Würfel.



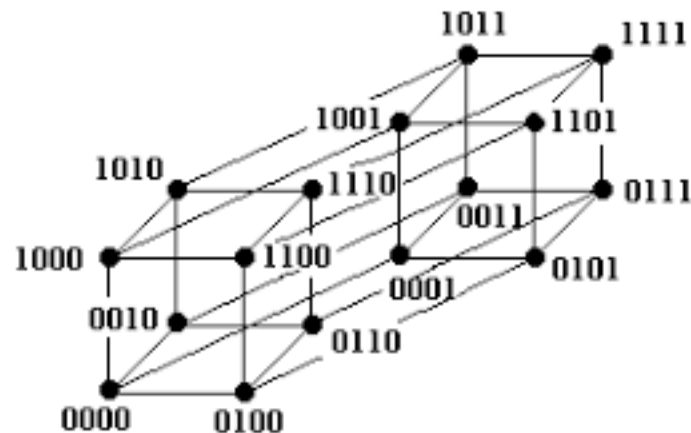
Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.:

- Betrachte $(n + 1)$ -Dimensionalen Würfel.
- Nach IV: Zwei Subgraphen hamiltonsch.



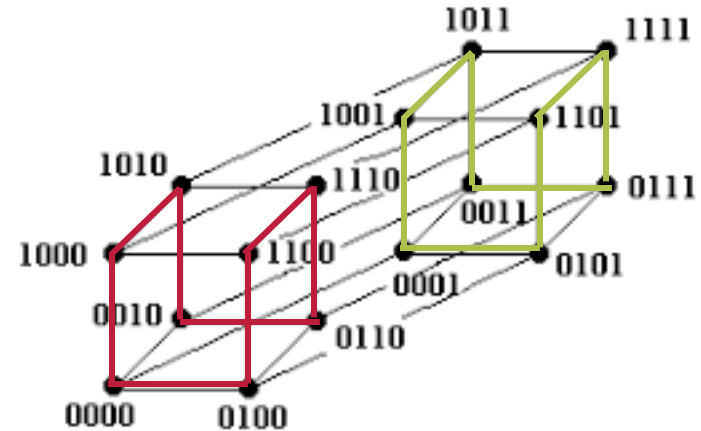
Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.:

- Betrachte $(n + 1)$ -Dimensionalen Würfel.
- Nach IV: Zwei Subgraphen hamiltonsch.



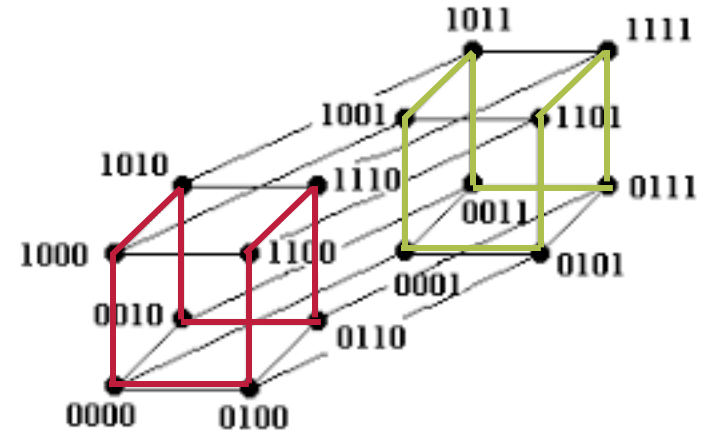
Beweis – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.:

- Betrachte $(n + 1)$ -Dimensionalen Würfel.
- Nach IV: Zwei Subgraphen hamiltonsch.
- Verschmelze die Kreise.



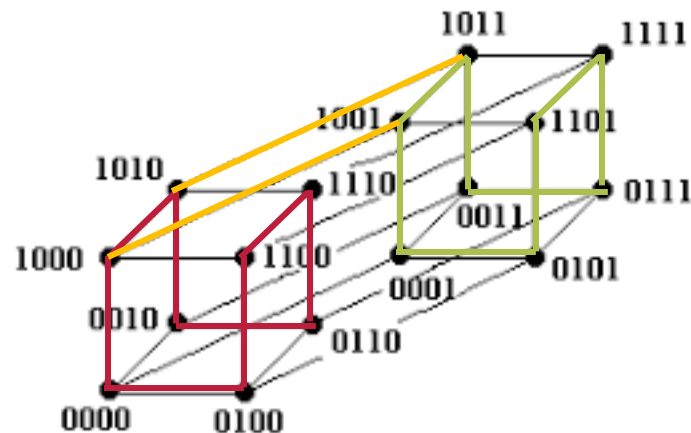
Beweis – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.:

- Betrachte $(n + 1)$ -Dimensionalen Würfel.
- Nach IV: Zwei Subgraphen hamiltonsch.
- Verschmelze die Kreise.



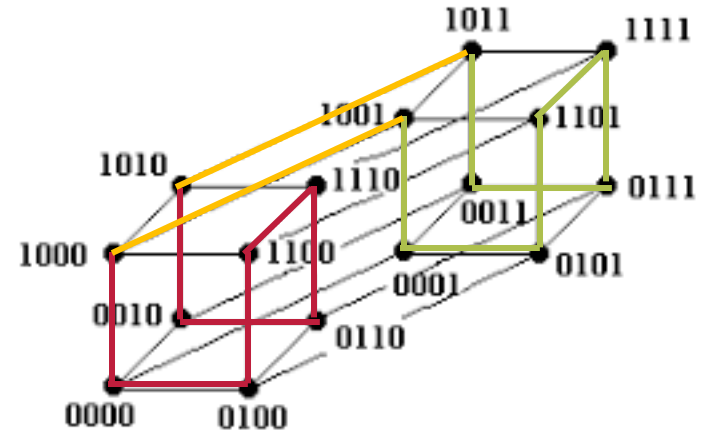
Beweis – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.:

- Betrachte $(n + 1)$ -Dimensionalen Würfel.
- Nach IV: Zwei Subgraphen hamiltonsch.
- Verschmelze die Kreise.



Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.: Betrachte einen $(n + 1)$ -dimensionalen Würfel W und die Aufteilung in zwei n -dimensionale Würfel $W_1 := \{v_1, \dots, v_{2^n}\}$, $W_2 := \{v'_1, \dots, v'_{2^n}\}$, wobei v_i und v'_i in W verbunden sind.

Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.: Betrachte einen $(n + 1)$ -dimensionalen Würfel W und die Aufteilung in zwei n -dimensionale Würfel $W_1 := \{v_1, \dots, v_{2^n}\}$, $W_2 := \{v'_1, \dots, v'_{2^n}\}$, wobei v_i und v'_i in W verbunden sind.

W_1 und W_2 sind beide hamiltonsch. Betrachte einen Hamiltonkreis, der in beiden Würfeln die gleiche Reihenfolge benutzt. O.B.d.A. sei $v_1 v_{2^n}$ die letzte Kante des Kreises K_1 in W_1 und $v'_1 v'_{2^n}$ die letzte Kante des Kreises K_2 in W_2 .

Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.: Betrachte einen $(n + 1)$ -dimensionalen Würfel W und die Aufteilung in zwei n -dimensionale Würfel $W_1 := \{v_1, \dots, v_{2^n}\}$, $W_2 := \{v'_1, \dots, v'_{2^n}\}$, wobei v_i und v'_i in W verbunden sind.

W_1 und W_2 sind beide hamiltonsch. Betrachte einen Hamiltonkreis, der in beiden Würfeln die gleiche Reihenfolge benutzt. O.B.d.A. sei $v_1 v_{2^n}$ die letzte Kante des Kreises K_1 in W_1 und $v'_1 v'_{2^n}$ die letzte Kante des Kreises K_2 in W_2 .

Ein Hamiltonkreis in W ist: $v_1 v'_1 \dots v'_{2^n} v_{2^n} \dots v_1$

Beweise – Vollständige Induktion

I.A.: Der 2-Dimensionale Würfel ist hamiltonsch; der Kreis selbst ist die Tour.

I.V.: Der n -Dimensionale Würfel ist hamiltonsch für bel. aber festes n .

I.S.: Betrachte einen $(n + 1)$ -dimensionalen Würfel W und die Aufteilung in zwei n -dimensionale Würfel $W_1 := \{v_1, \dots, v_{2^n}\}$, $W_2 := \{v'_1, \dots, v'_{2^n}\}$, wobei v_i und v'_i in W verbunden sind.

W_1 und W_2 sind beide hamiltonsch. Betrachte einen Hamiltonkreis, der in beiden Würfeln die gleiche Reihenfolge benutzt. O.B.d.A. sei $v_1 v_{2^n}$ die letzte Kante des Kreises K_1 in W_1 und $v'_1 v'_{2^n}$ die letzte Kante des Kreises K_2 in W_2 .

Ein Hamiltonkreis in W ist: $v_1 \overbrace{v'_1 \dots v'_{2^n}}^{K_2} \overbrace{v_{2^n} \dots v_1}^{K_1}$

... nächste Woche

Nächste Woche
Übung!!

Semesterplan AuD WS24/25

Woche (KW)	Woche (Datum)	Vorlesung (Di./Mi.)	Gr. Übung (Do.)	Kl. Übung (Mo.-Fr.)	HA Ausgabe (Di.)	HA Abgabe (Di. 13 Uhr)	Besprechung (in kl. Übung)
42	14.10.	/,0					
43	21.10.	1,2	0		HA1+P0		
44	28.10.	3,4					P0
45	04.11.	5,6	1	1	HA2+P1	HA1	
46	11.11.	7,8					HA1+P1
47	18.11.	9,10	2	2	HA3+P2	HA2	
48	25.11.	11,12					HA2+P2
49	02.12.	13,14	3	3	HA4+P3	HA3	
50	09.12.	15,16	4				HA3+P3
51	16.12.	17,18		4			
52	23.12.	Weihnachtsferien					
1	30.12.				HA5+P4	HA4	
2	06.01.	19,20	5				HA4+P4
3	13.01.	21,22		5	P5	HA5	
4	20.01.	23,24	6				HA5+P5
5	27.01.	25,/	7	6			