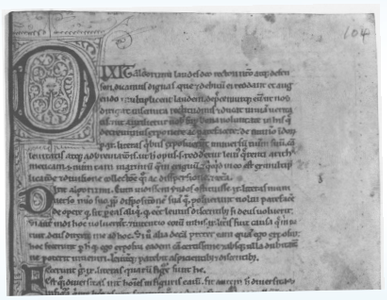


Schnelldurchlauf!

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

Algorithmen

Datenstrukturen

Ordentlich,
hält Regeln ein

Locker drauf,
zielorientiert

Algorithmen

Datenstrukturen

I get the job done. What the hell do you want?

I don‘t make things difficult. That‘s the way they get, all by themselves.

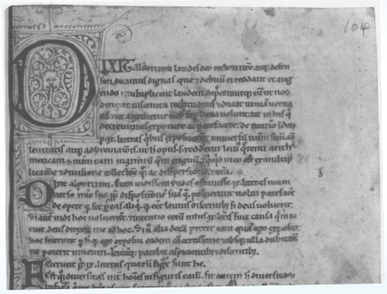
Then don‘t.

Can you make it without killing yourself?

I don‘t want to work with you.

Ain‘t got no choice.

I‘m getting too old for this…



1 Einführung: Algorithmen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

1.1 Was ist ein Algorithmus?

WIKIPEDIA
Die freie Enzyklopädie

"Ein **Algorithmus** ist eine aus endlich vielen Schritten bestehende eindeutige Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems oder einer Klasse von Problemen."

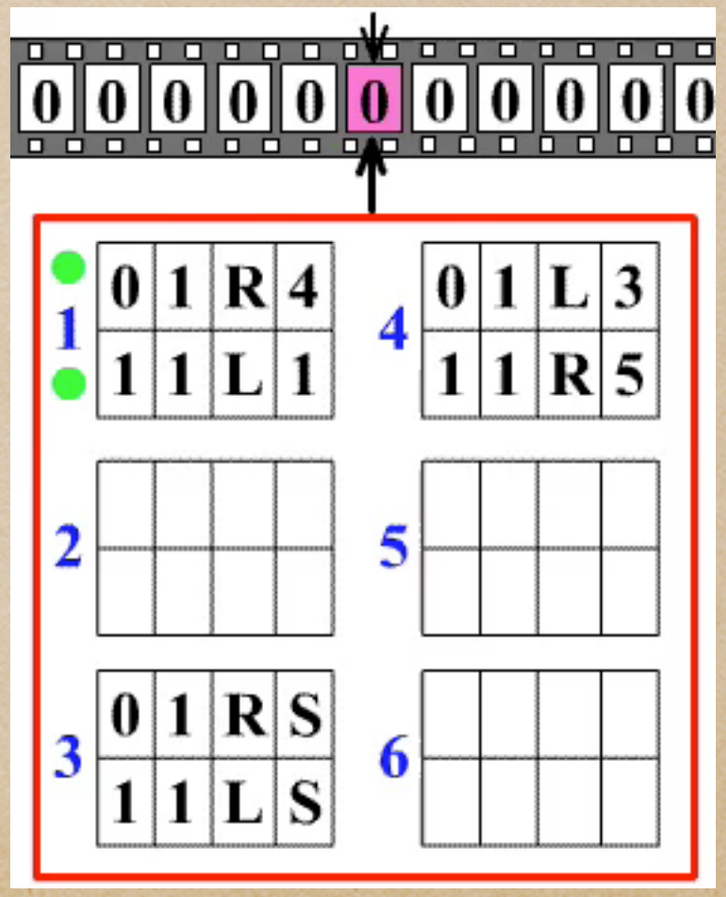
Beispiele:

- Kochrezept
- Bedienungsanleitung
- Notenblatt
- Programmablaufplan

Kein Computer ohne Algorithmen!
Keine Informatik ohne Algorithmen!
Kein Informatikstudium ohne Algorithmen!

1.2 Wie formalisiert man einen Algorithmus?

Idee: Abstrakte Formalisierung beliebiger Berechnungen!



1.3 Eigenschaften von Algorithmen

1. Das Verfahren muss in einem endlichen Text eindeutig beschreibbar sein (Finitheit).
2. Jeder Schritt des Verfahrens muss tatsächlich ausführbar sein (Ausführbarkeit).
3. Das Verfahren darf zu jedem Zeitpunkt nur endlich viel Speicherplatz benötigen (Dynamische Finitheit, siehe Platzkomplexität).
4. Das Verfahren darf nur endlich viele Schritte benötigen (Terminierung, siehe auch Zeitkomplexität).

1.4 Datenstrukturen

Eine Datenstruktur erlaubt es, die für eine Aufgabe notwendigen Informationen

- geeignet zu repräsentieren
- den Zugriff und die Verwaltung während der Bearbeitung in effizienter Weise zu ermöglichen.

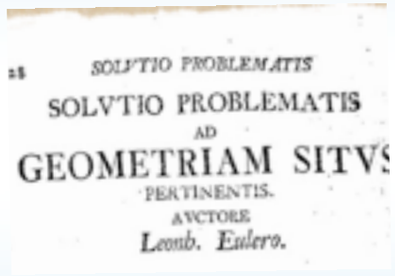
Mehr Einzelheiten werden uns ab dem dritten Kapitel begegnen!

XLII + XCVIII = CXL

42 + 98 = 140!

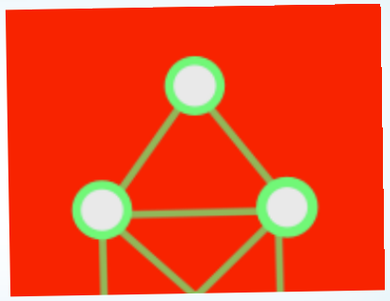
1.5 Ausblick

Wir werden uns in dieser Vorlesung mit verschiedenen Aspekten von Algorithmen beschäftigen. Dazu gehören oft auch Analyse und Verständnis der zugrundeliegenden mathematischen Strukture. Gerade letzteres macht oft den eigentlichen Witz aus!



SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

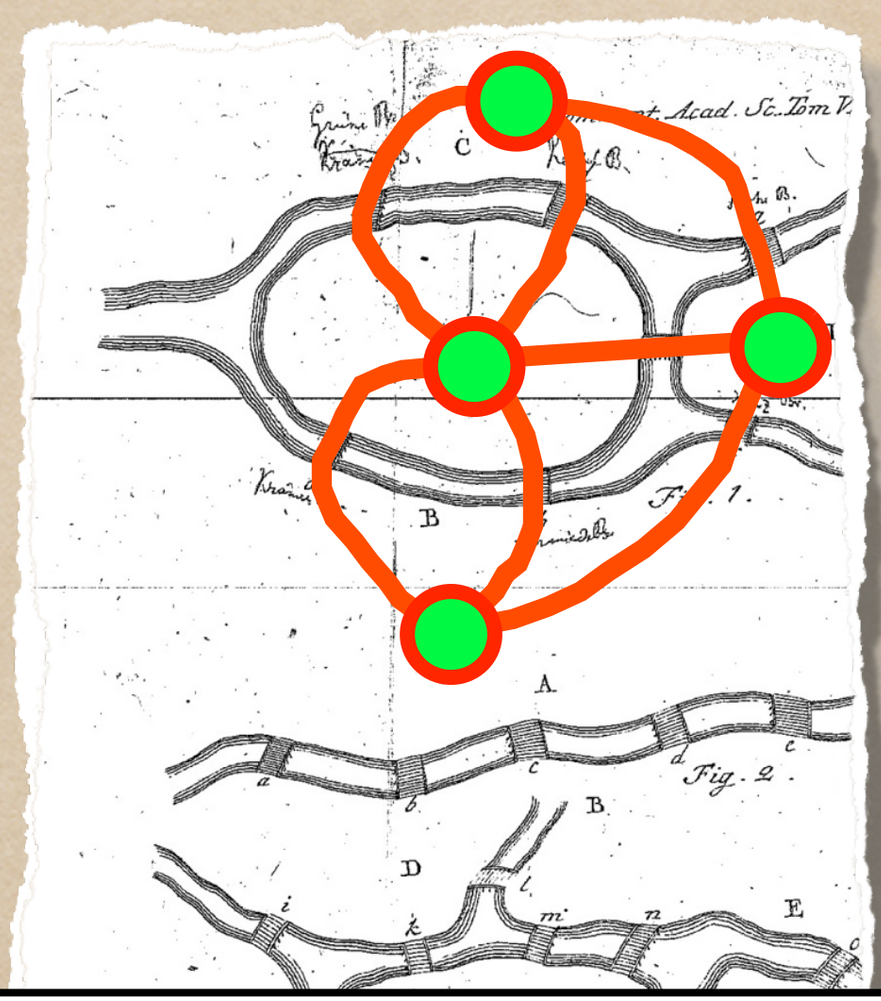


Kapitel 2: Graphen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

2.1 Historie

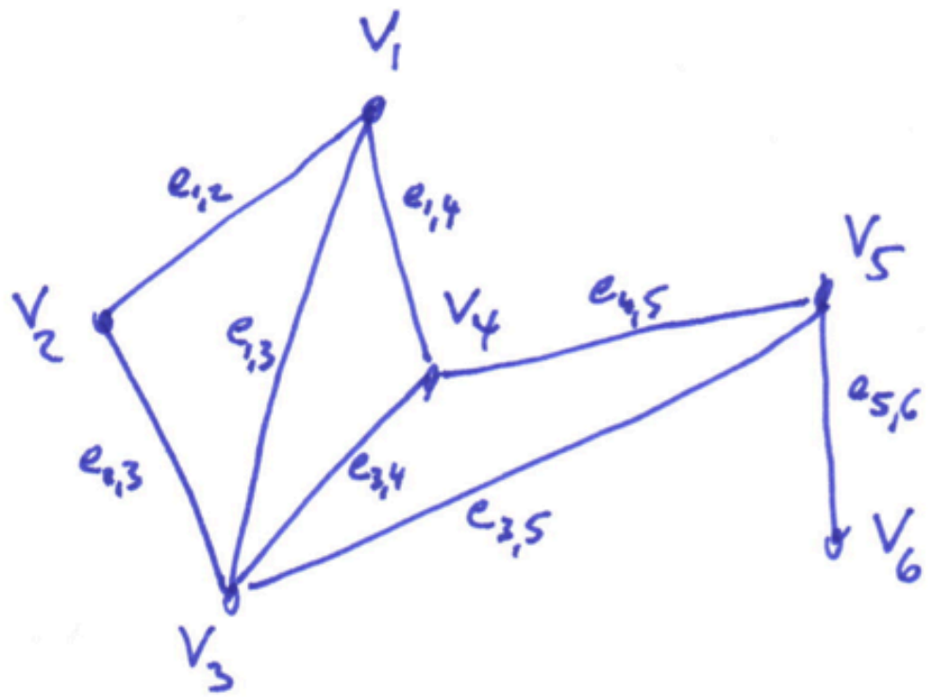


- Alle Knoten sind ungerade?!
- Man müsste an allen anfangen oder aufhören!
- Das geht nicht an einem Stück!

Euler: (1) Das gilt für jede beliebige Instanz: Mit mehr als zwei ungeraden Knoten gibt es keinen solchen Weg.

(2) Man kann auch charakterisieren, unter welchen Bedingungen es einen Weg tatsächlich gibt.

2.2 Formale Graphenbegriffe



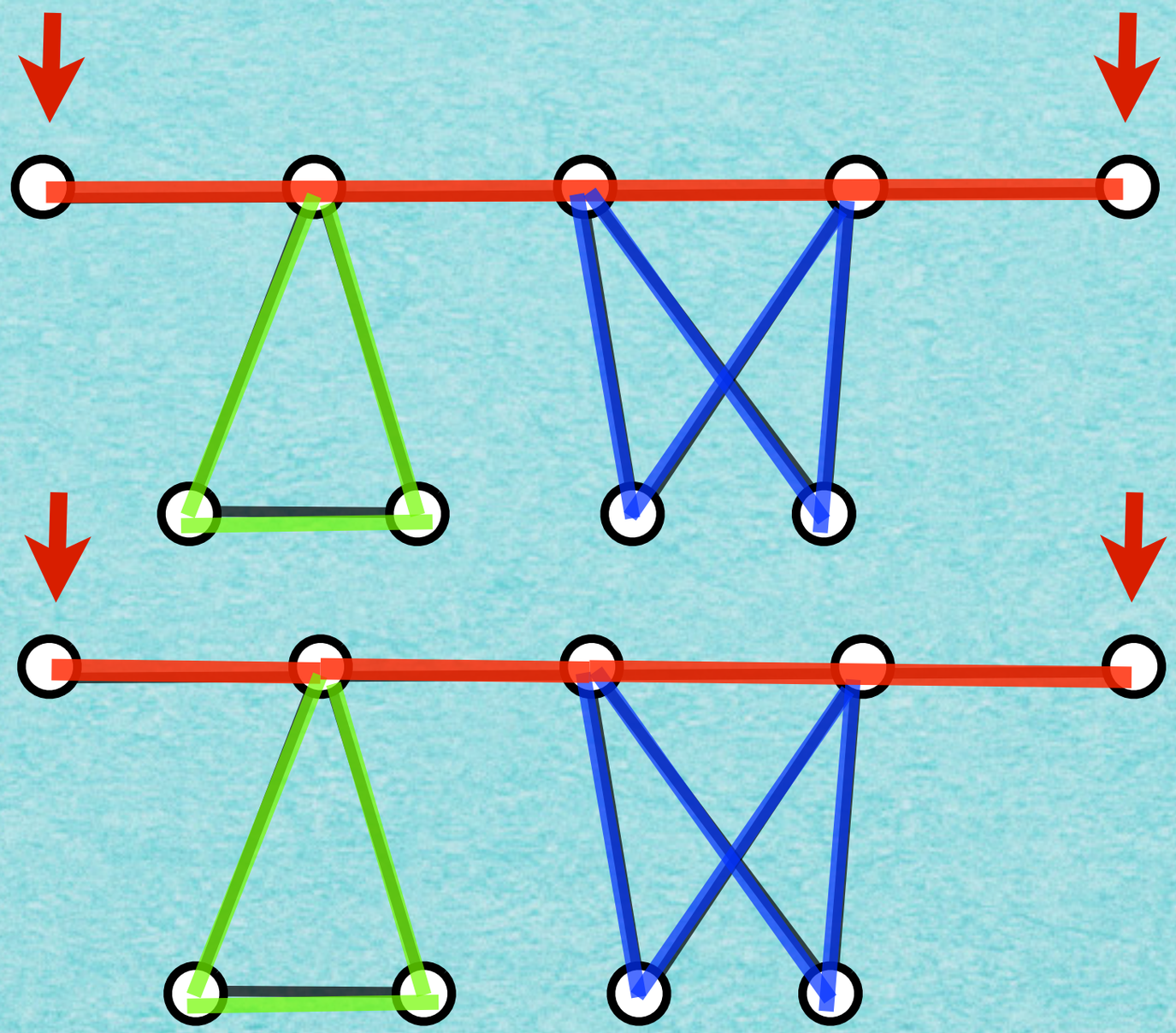
Knoten: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$

Kanten: $e_{1,2}, e_{1,3}, e_{1,4}$
$e_{2,3}, e_{3,4}, e_{3,5}$
$e_{4,5}, e_{5,6}$

Bezeichnungen: Knotenmenge V ("vertices")
Kantenmenge E ("edges")

Schreibweise: $G = (V, E)$

Wegebau



Algorithmus 2.8

Algorithmus von Hierholzer

INPUT:	Ein zusammenhängender Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten
OUTPUT:	Ein Eulerweg bzw. eine Eulertour in G

A. Wähle einen Startknoten v (ungerade falls vorhanden);

B. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W von v aus zu bestimmen;

C. Solange es noch unbenutzte Kanten gibt:

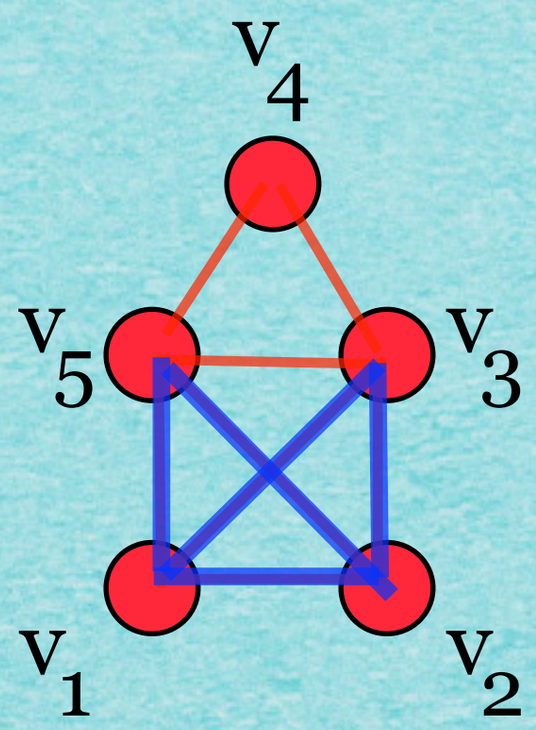
   C.1. Wähle einen von W besuchten Knoten w mit positivem Grad im Restgraphen;

   C.2. Verwende Algorithmus 2.7, um einen Weg W' von w aus zu bestimmen;

   C.3. Verschmelze W und W'

D. STOP

Es geht auch anders!



Wir hinterlassen Kanten?!

Algorithmus 2.13

Algorithmus von Fleury

INPUT:	Graph G mit höchstens zwei ungeraden Knoten
OUTPUT:	Ein Weg in G.

1. Starte in einem Knoten v_0 (ungerade, sonst beliebig);
2. Solange es eine zum gegenwärtigen Knoten v_i inzidente unbenutzte Kante $\{v_i, v_j\}$ gibt:

   2.1. Wähle eine dieser Kanten aus, $e_i = \{v_i, v_j\}$ der den Restgraphen zshgd. lässt

   2.2. Laufe zum Nachbarknoten v_j

   2.3. Lösche die Kante aus der Liste der unbenutzten Kanten.

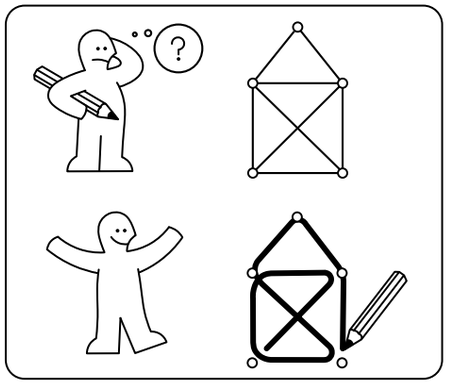
   2.4. Setze $v_{i+1} := v_j$

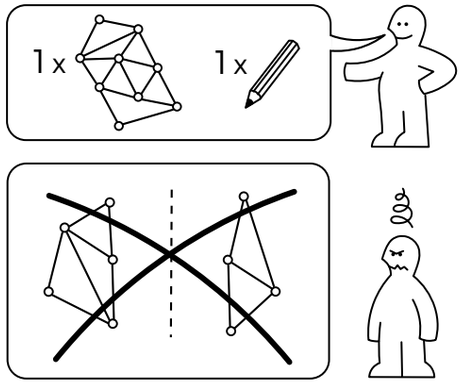
   2.5. Setze $i := i+1$
3. STOP

ONE STRÖKE DRÅW

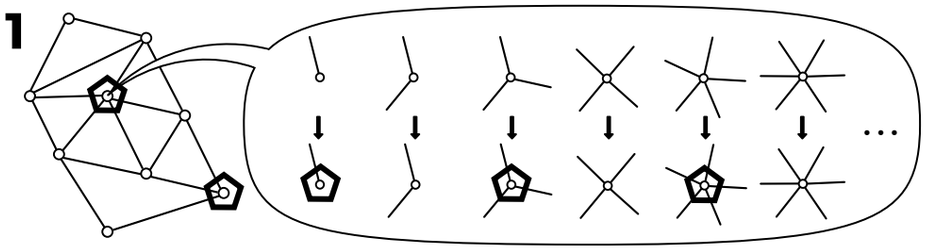
idea-instructions.com/euler-path/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA

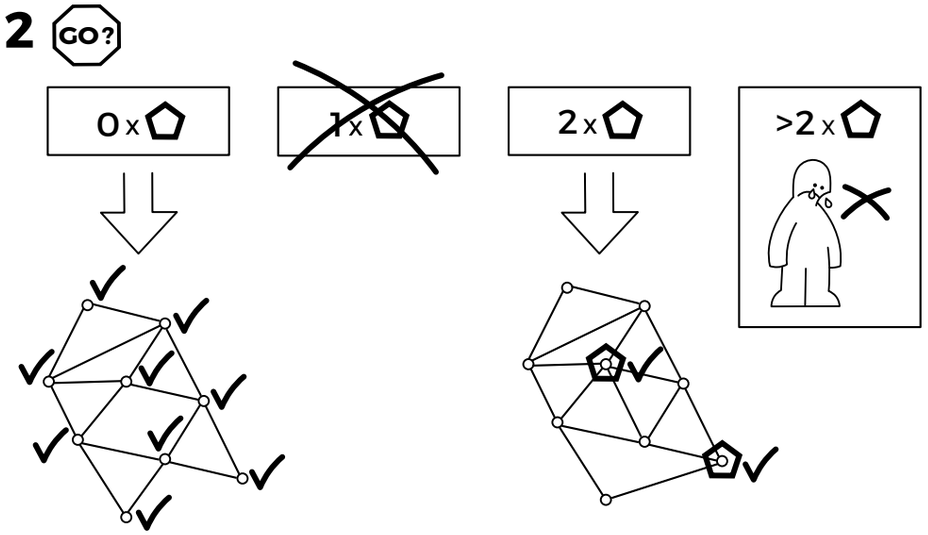




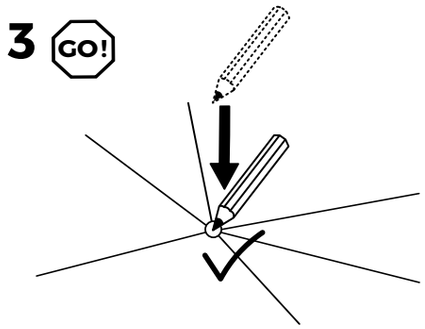
1



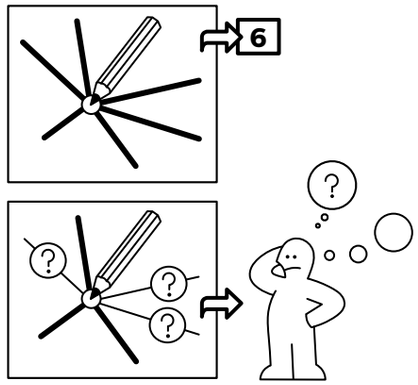
2 GO?



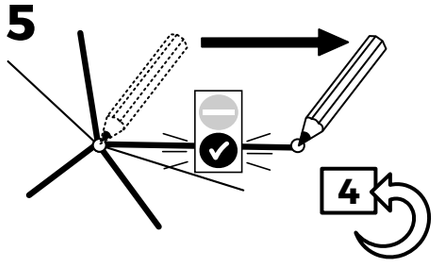
3 GO!



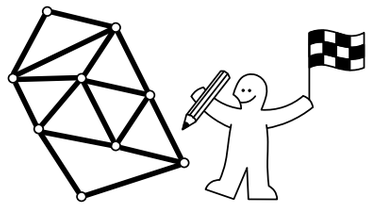
4

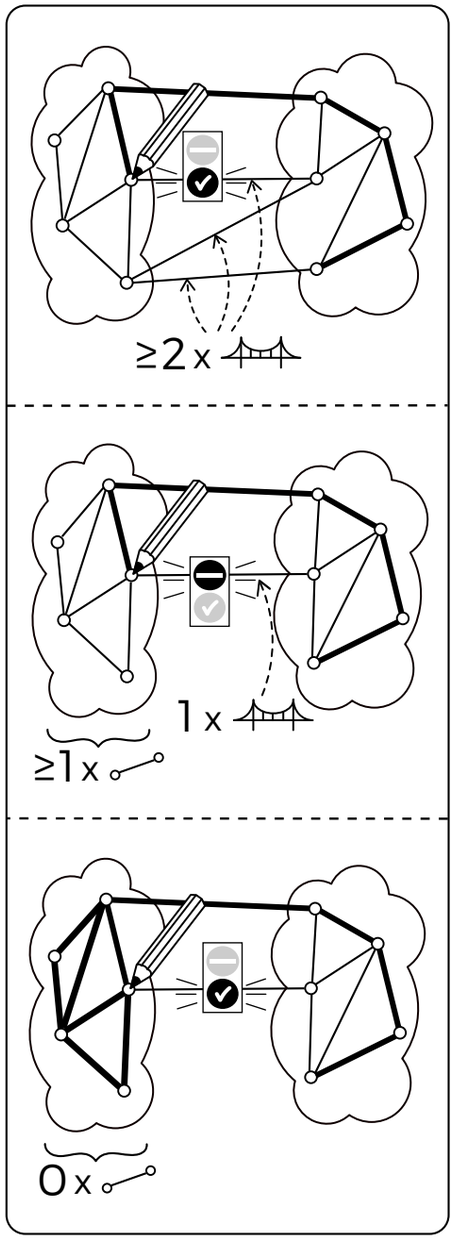


5

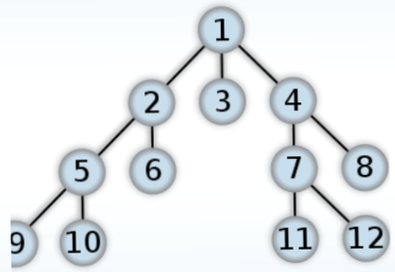


6





Zusammenfassung Kapitel 2!



Kapitel 3: Suche in Graphen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

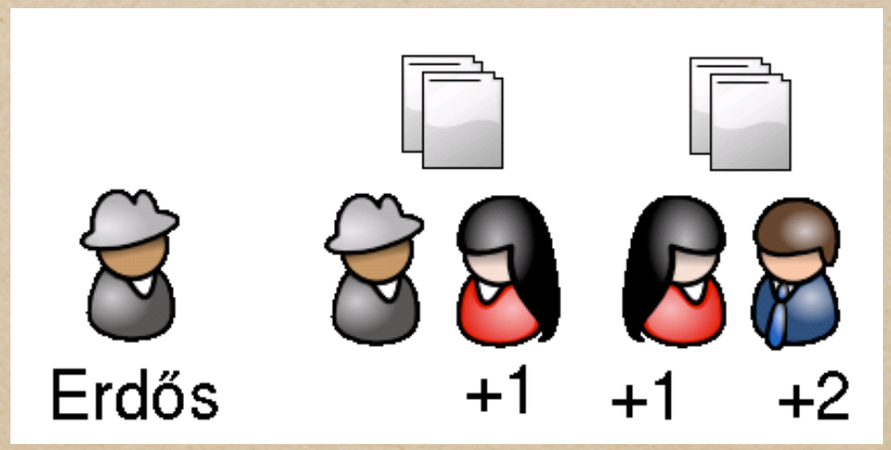
Prof. Dr. Sándor Fekete

3.1 Vorspann

Paul Erdös, 1913-1996

- *Produktivster Mathematiker aller Zeiten (~1500 Artikel)*
- *"Zweitbedeutendster Mathematiker nach Euler"*

Erdös-Zahl



3.2 Problemdefinitionen:

PROBLEM 3.1 (s-t-Weg)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s, Zielknoten t

Gesucht: Weg von s nach t, falls einer existiert

Allgemeiner:

PROBLEM 3.2 (Zusammenhangskomponente)

Gegeben: Graph $G=(V,E)$, Startknoten s

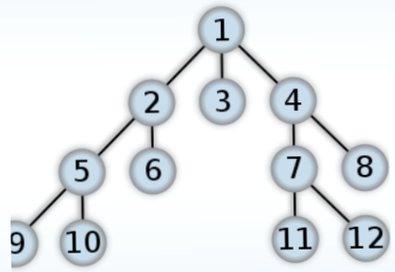
Gesucht: Menge aller von s erreichbaren Knoten (→ „Zusammenhangskomponente von s")

Wege, die die Erreichbarkeit sichern

Beobachtung:

SATZ 3.3

Wenn ein Weg zwischen zwei Knoten s und t in einem Graphen existiert, dann existiert auch ein Pfad.



Kapitel 3.3: Zusammenhangskomponenten

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

Algorithmus 3.7

INPUT: Graph $G = (V,E)$, Knoten s

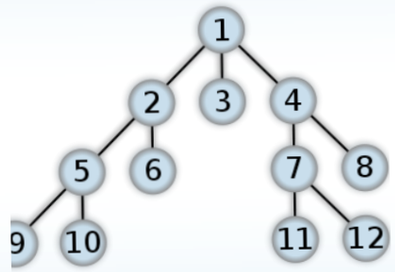
OUTPUT: Knotenmenge $Y \subseteq V$, die von s aus erreichbar ist,

Kantenmenge $T \subseteq E$, die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei $R:=\{s\}$, $Y:=\{s\}$, $T:=\emptyset$
2. WHILE ($R\neq\emptyset$) DO {
   - 2.1. wähle Element $v \in R$
   - 2.2. IF (es gibt kein $w \in V\setminus Y$ mit $e=\{v,w\} \in E$) THEN
     - 2.2.1. $R:=R\setminus\{v\}$
   - 2.3. ELSE {
     - 2.3.1. wähle ein $w \in V\setminus R$ mit $e=\{v,w\} \in E$;
     - 2.3.2. setze $R := R \cup \{w\}$, $Y := Y \cup \{w\}$, $T := T \cup \{e\}$;

     }

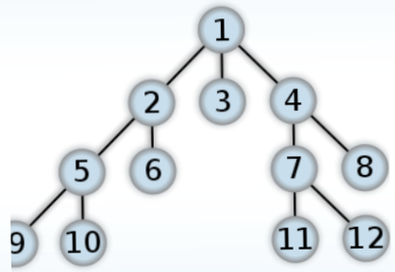
}



Kapitel 3.4: Wartenschlange und Stapel

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete



Kapitel 3.5: Tiefensuche und Breitensuche

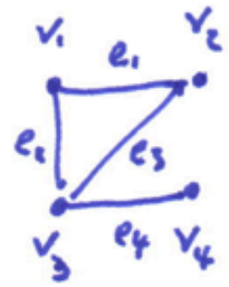
Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

3.6 Datenstrukturen für Graphen

Wie beschreibt man einen Graphen?

(1) Inzidenzmatrix



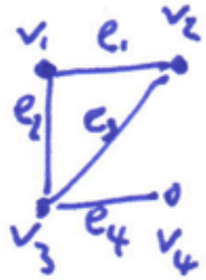
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(„inzident": zusammentreffend)

Also: $A \in \{0,1\}^{n \times m}$ mit $a_{v,e} := \begin{cases} 1 & \text{für } v \in e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Größe: nm für einen Graphen mit n Knoten, m Kanten. (Viele Nullen!)

(2) Adjazenzmatrix



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(„adjazent": verbunden)

3.7 Wachstum von Funktionen

Im letzten Abschnitt haben wir Funktionen abgeschätzt und auf die „wesentlichen" Bestandteile reduziert, um Größenordnungen und Wachstumsverhalten zu beschreiben. Ein bisschen formaler:

Definition 3.9 (Θ-Notation)

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt

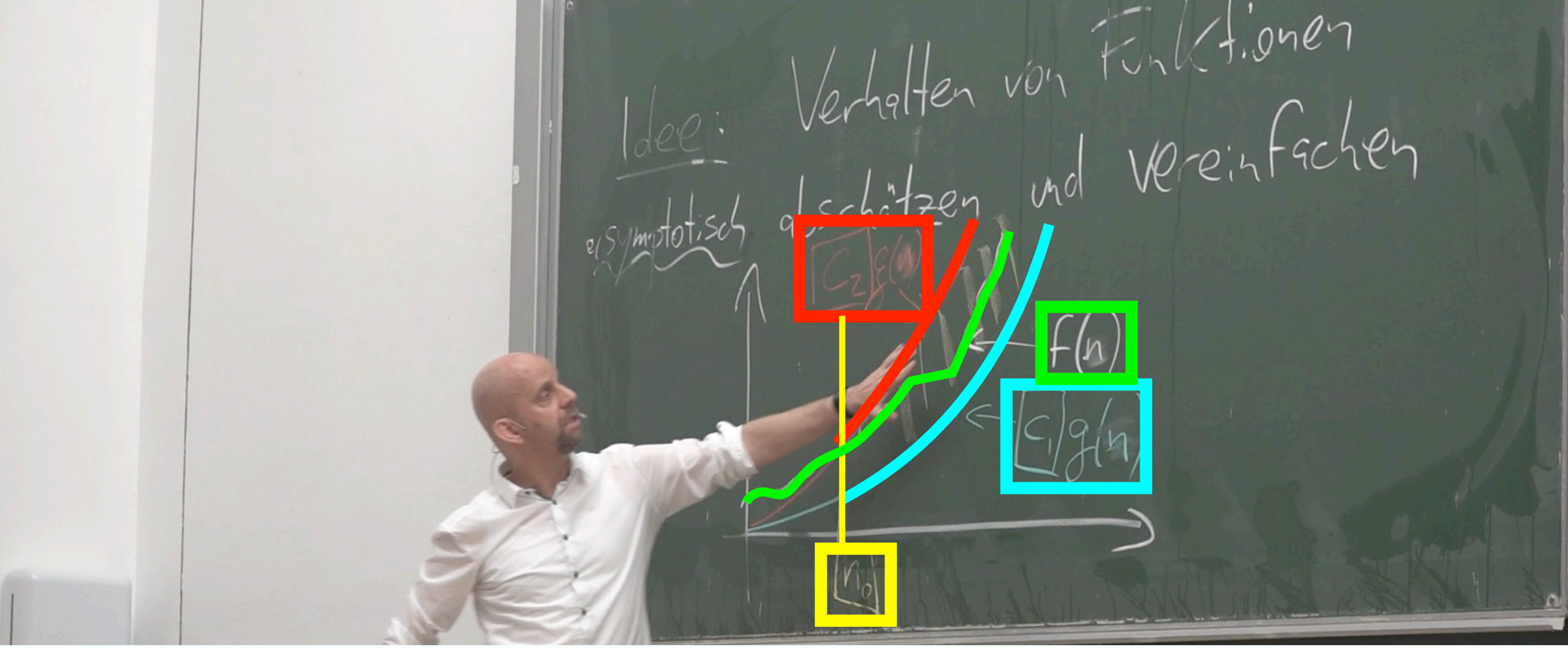
$$f \in \Theta(g) :\Leftrightarrow \text{Es gibt positive Konstanten } c_1, c_2, n_0 \text{ mit } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Man sagt: f wächst asymptotisch in derselben Größenordnung wie g.

Beispiele:

$$2n^2 - 1 \in \Theta(n^2)$$

$$\frac{n^3}{1000} + n^2 + n \log n \in \Theta(n^3)$$



DEFINITION 3.9 (Θ-Notation)

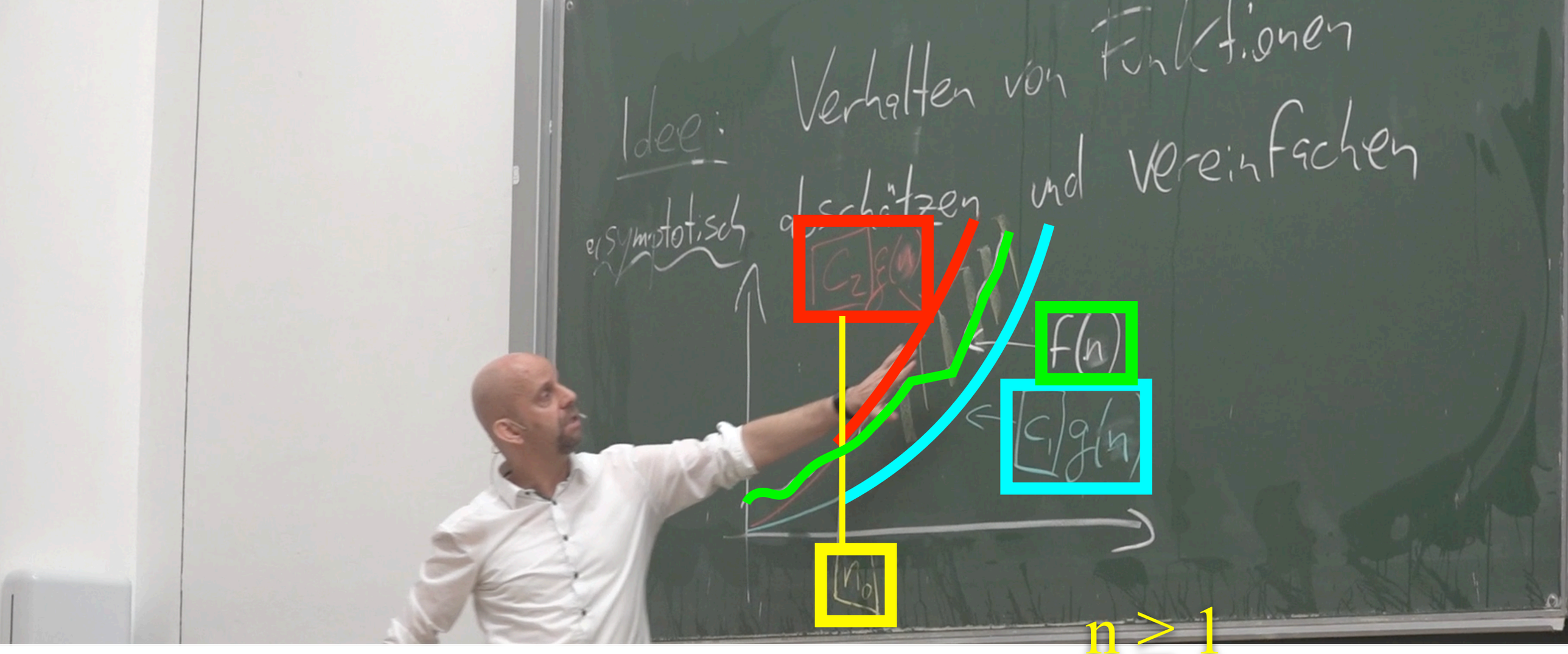
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

Dann gilt

$$f \in \Theta(g) :\Leftrightarrow \text{ Es gibt positive Konstanten } c_1, c_2, n_0 \text{ mit}$$

$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ für alle } n \geq n_0$$

Man sagt: f wächst asymptotisch in derselben Größenordnung wie g.



$$5 \leq \frac{f(n)}{g(n)} = 5 + \frac{4}{n^2} + \frac{7}{n^3} + \frac{27}{n^5} - \frac{9}{n^6} \leq 43$$

Frage 8:

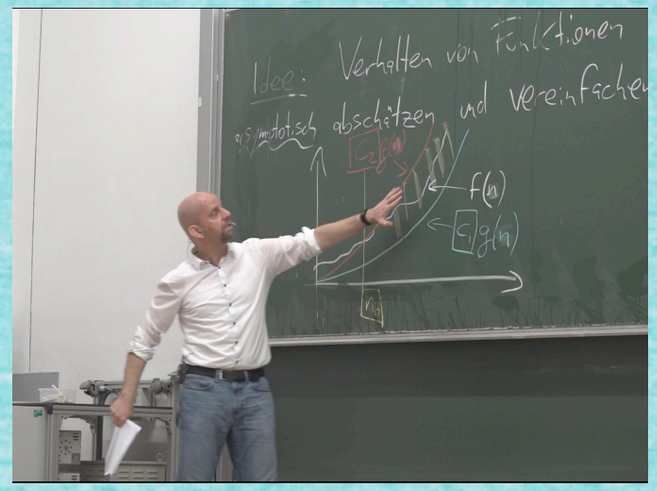
Die Funktion $f(n) := 2^n$ liegt...

- ... nur in $O(3^n)$. ✓
- ... nur in $\Omega(3^n)$.
- ... in $\Theta(3^n)$.

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

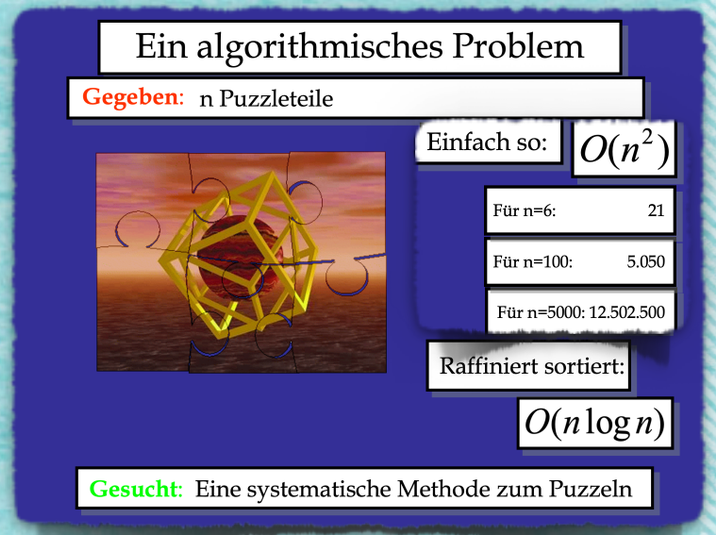
$$\boxed{c_1} \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq \boxed{c_2}$$

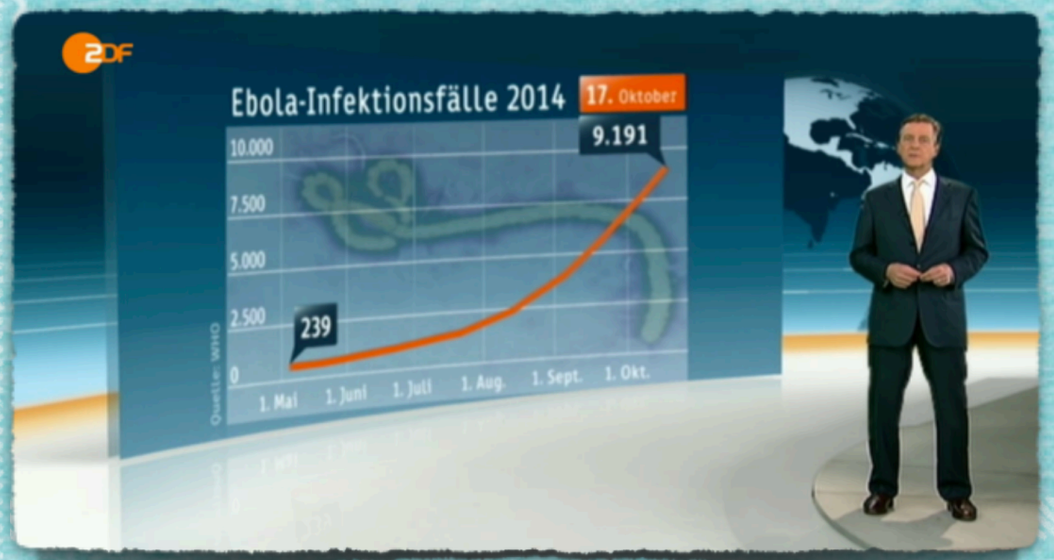
Wofür ist das gut?



$$\log_2 \left\lfloor \left(2n + 4m + n\left(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1\right) + 2m\left(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1\right) \right) \right\rfloor + 1$$

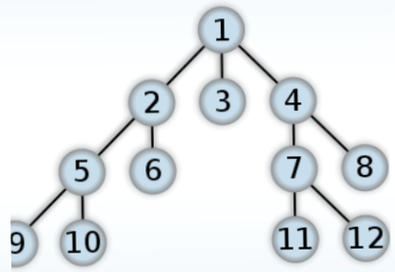
$$\Theta(m \log n)$$





$$\Theta(n^2) \qquad (2n)^2 = 4 \cdot n^2$$

$$\Theta(2^n) \qquad 2^{2n} = 2^n \cdot 2^n$$



Kapitel 3.8: Laufzeit von DFS und BFS

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

Algorithmus 3.7

INPUT: Graph G = (V,E), Knoten s

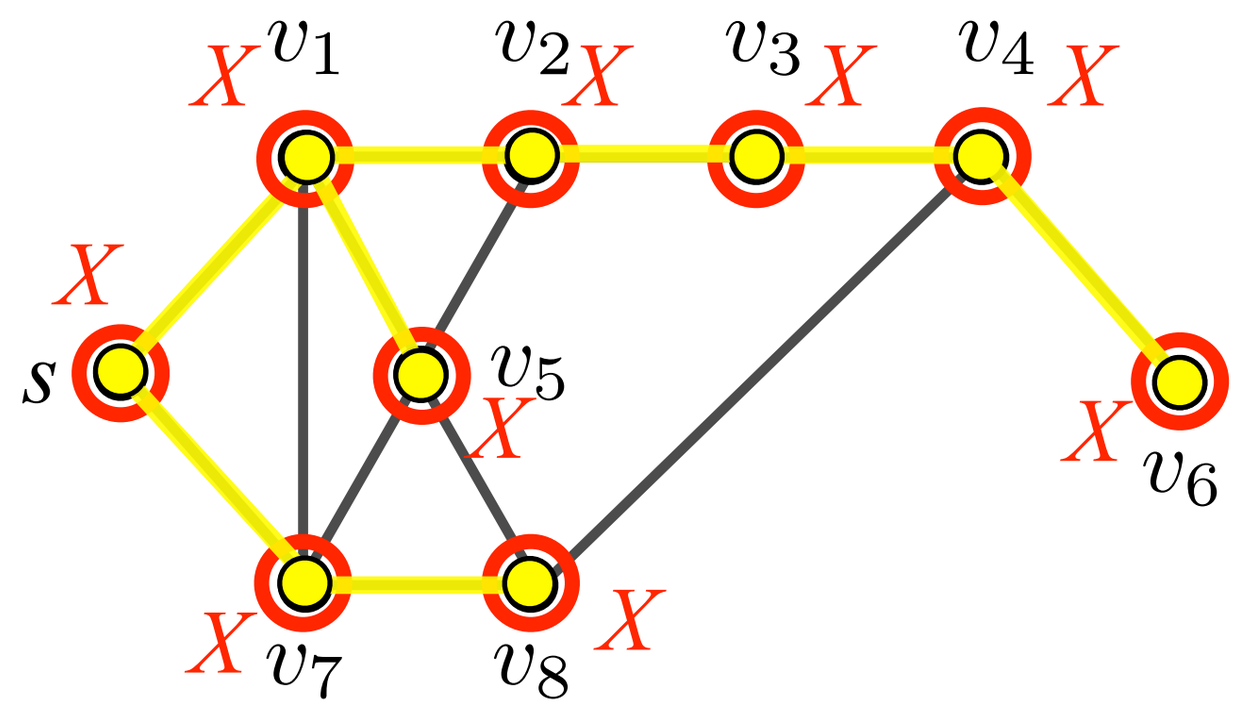
OUTPUT: Knotenmenge Y ⊆ V, die von s aus erreichbar ist,

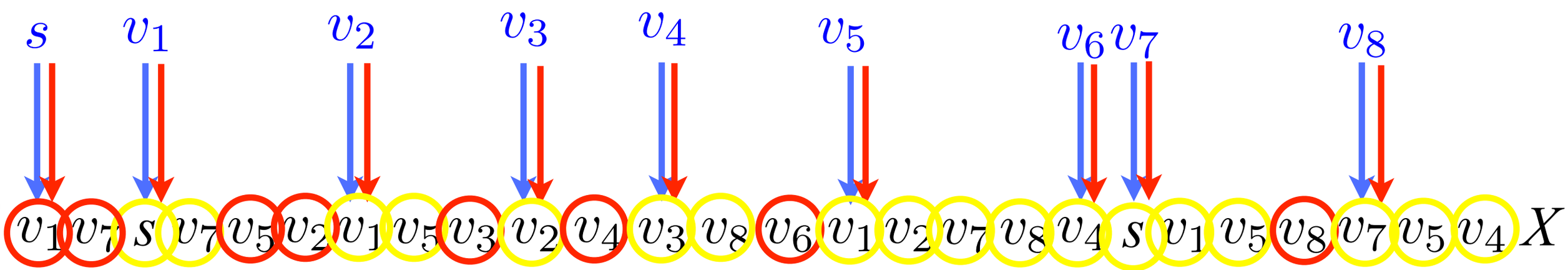
Kantenmenge T ⊆ E, die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei R:={s}, Y:={s}, T:=∅
2. WHILE (R≠∅) DO {
   - 2.1. Wähle v∈ R
   - 2.2. IF (es gibt kein w∈ V\Y mit e={v,w}∈E) THEN
     - 2.2.1. R:=R\{v}
   - 2.3. ELSE {
     - 2.3.1.Wähle ein w∈V\Y mit e={v,w} ∈ E
     - 2.3.2. Setze R := R u {w}, Y := Y u {w}, T := T u {e}

     }

   }
3. STOP





Satz 3.13

Der Graphen-Scan-Algorithmus 3.7 lässt sich so implementieren, dass die Laufzeit $O(n+m)$ ist.

Algorithmus 3.7

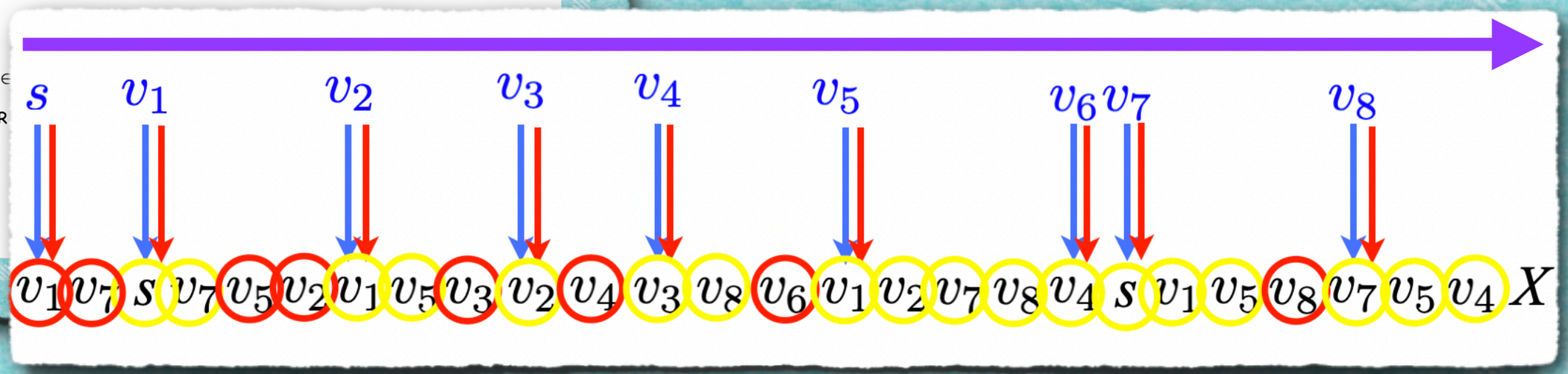
INPUT: Graph G = (V,E), Knoten s

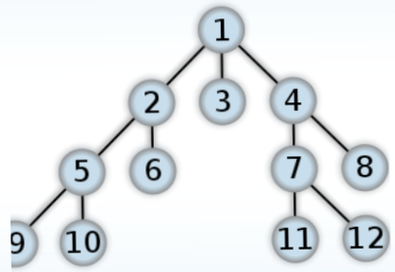
OUTPUT: Knotenmenge Y ⊆ V, die von s aus erreichbar ist,

Kantenmenge T ⊆ E, die die Erreichbarkeit sicherstellt

1. Sei R:={s}, Y:={s}, T:=∅
2. WHILE (R≠∅) DO {
   - 2.1. Wähle v∈ R
   - 2.2. IF (es gibt kein w∈ V\Y mit e={v,w}∈E) THEN
     - 2.2.1. R:=R\{v}
   - 2.3. ELSE {
     - 2.3.1.Wähle ein w∈
     - 2.3.2. Setze R := R
     - }
   - }
3. STOP

Adjazenzliste!





Kapitel 3.9: Eigenschaften von DFS und BFS

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

3.9 DFS vs. BFS

Einfach gesagt:

- ***DFS ist eine bestmögliche individuelle Suchstrategie mit lokaler Information.***
- ***BFS ist eine bestmögliche kooperative Suchstrategie mit globaler Information.***

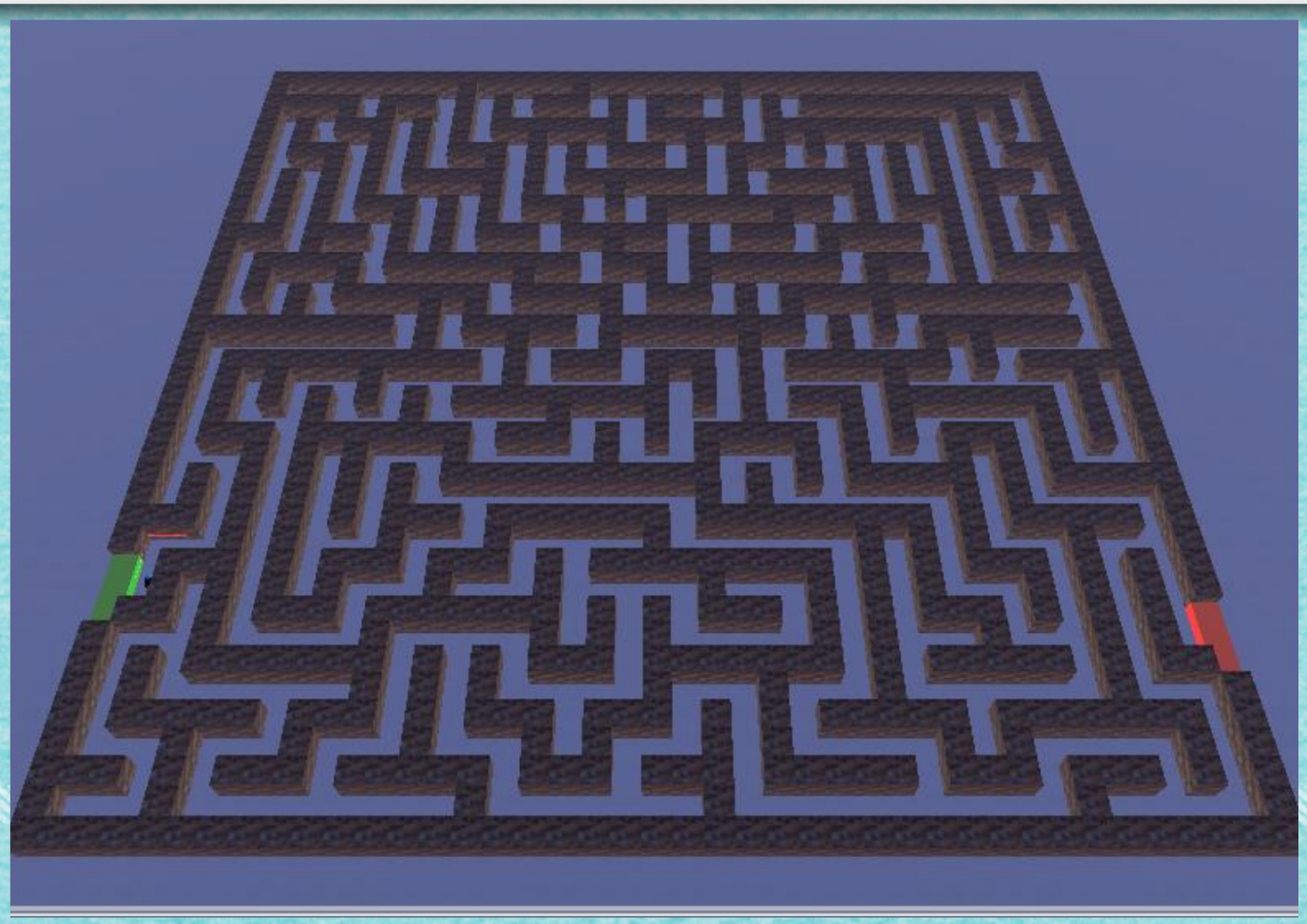
Konkret:

- ***DFS ist gut geeignet für die Suche nach einem Ausweg aus einem Labyrinth.***
- ***BFS ist gut geeignet für die Suche nach kürzesten Wegen in einem Graphen.***

Satz 3.16 (Lokale Suche mit DFS)

(1) DFS findet in jedem zusammenhängenden Graphen mit n Knoten einen Weg der Länge höchstens 2n-1, der alle Knoten besucht.

(2) Für jede lokale Suchstrategie gibt es einen Graphen mit n Knoten, so dass der letzte Knoten erst nach einer Weglänge von 2n-1 besucht wird.



Auf die Schnelle mit der Welle

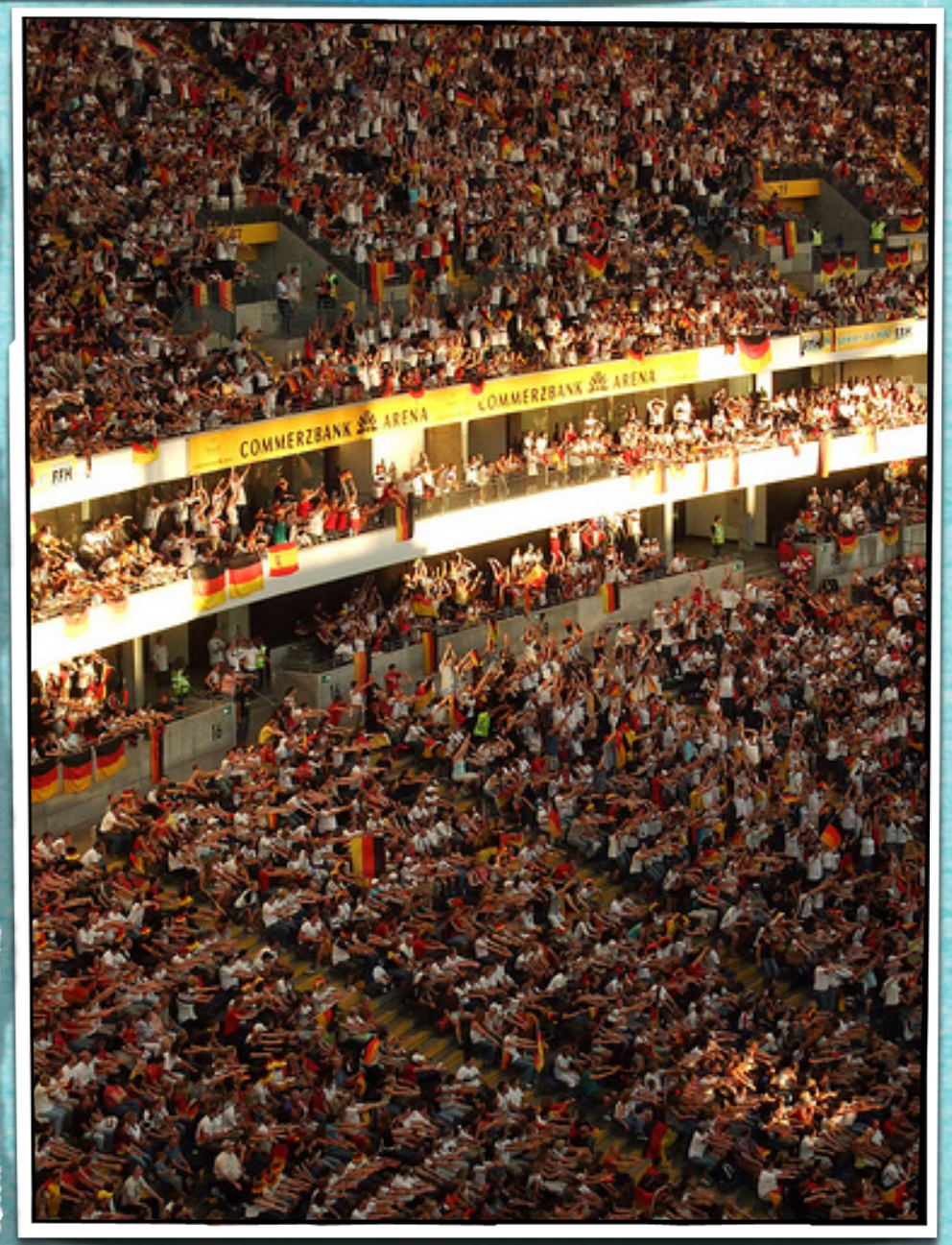
A. LOS bei „NULL“

B. Bis „ANGEKOMMEN!“:

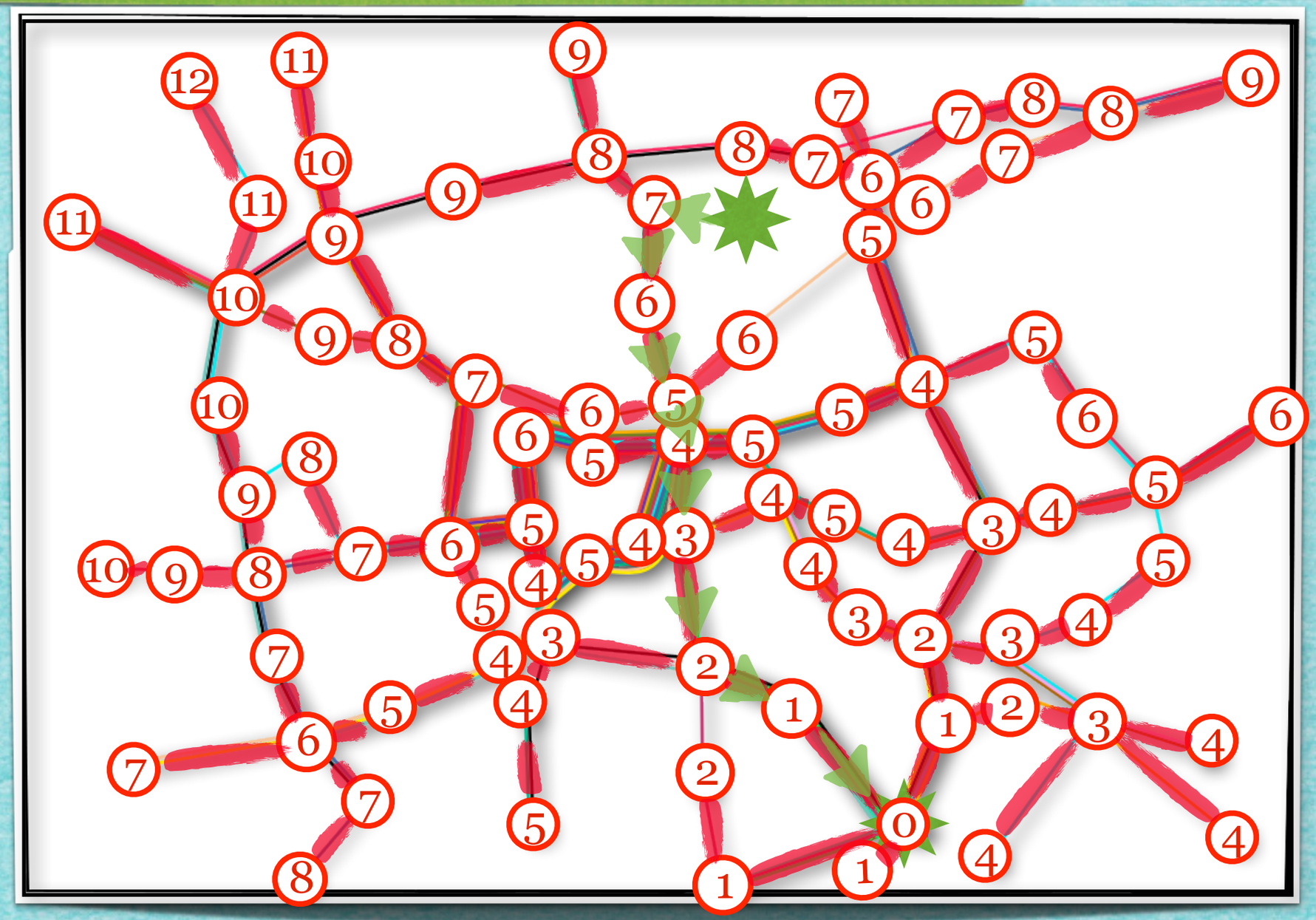
- Solange du noch nicht aufgestanden warst:
  - Wenn ein oder mehrere direkte Nachbarn aufstehen:
    1. Einen dieser Nachbarn merken
    2. In der nächsten Runde:
       2.1. aufstehen
       2.2. Zahl merken
    3. In der übernächsten Runde hinsetzen

C. Nach „ANGEKOMMEN!“:

- Auf gemerkten Nachbarn zeigen



Wellenreiten in Graphen

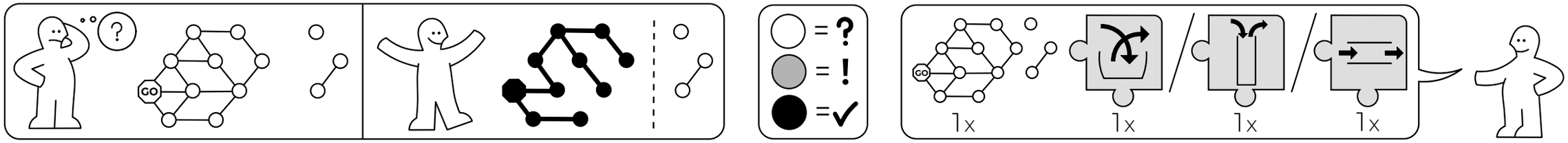


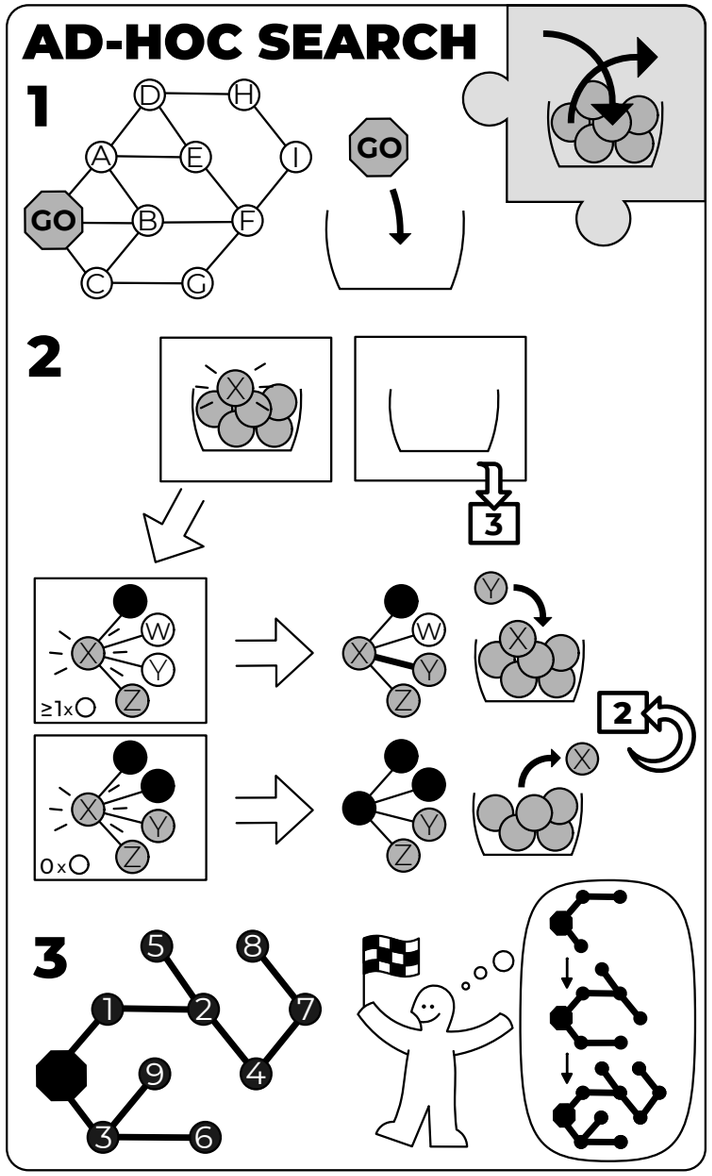
Breitensuche

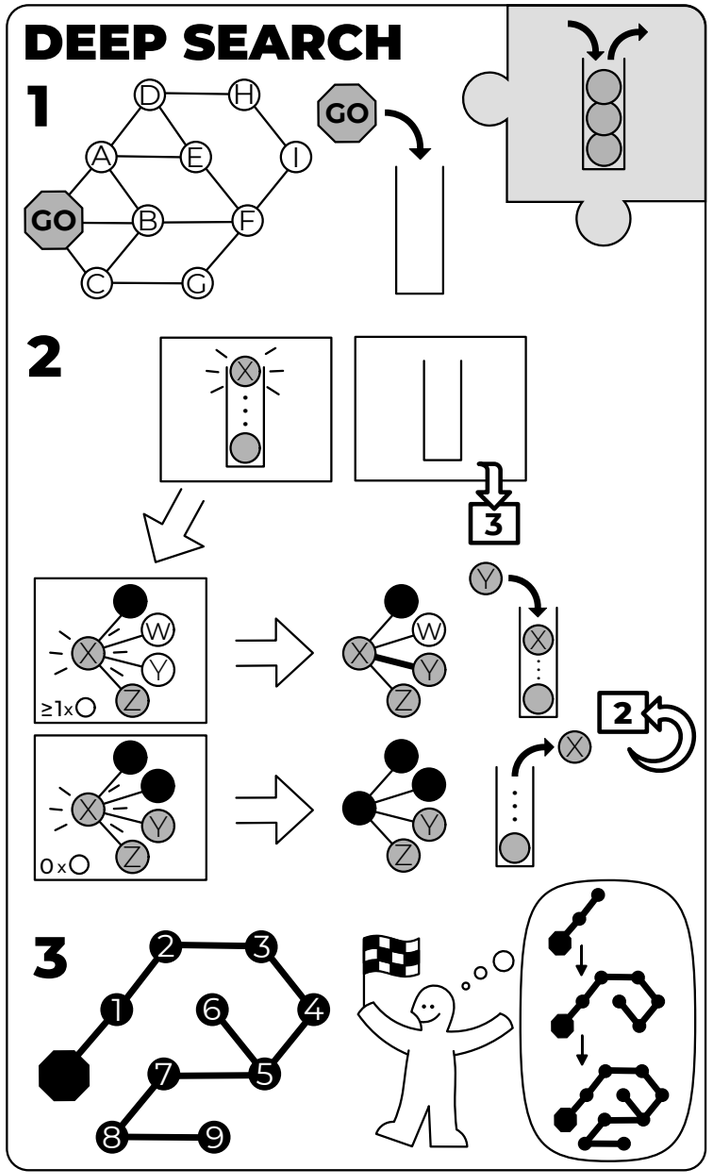
GRÅPH SKÄN

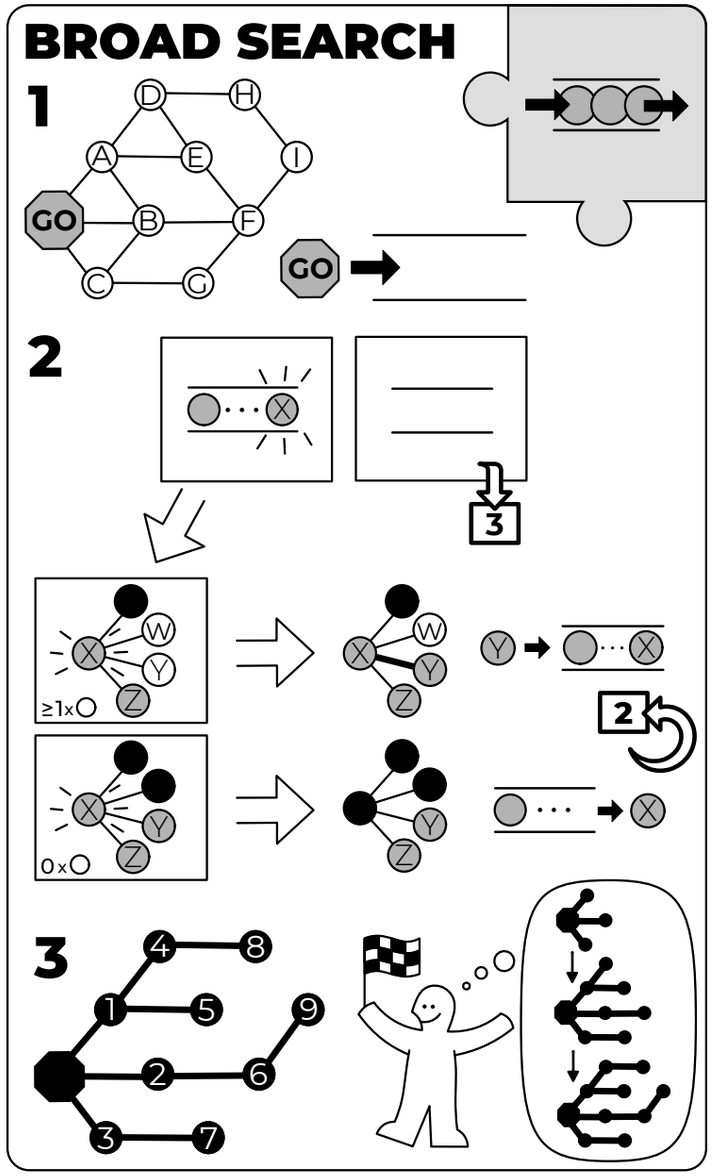
idea-instructions.com/graph-scan/
v1.3, CC by-nc-sa 4.0

IDEA

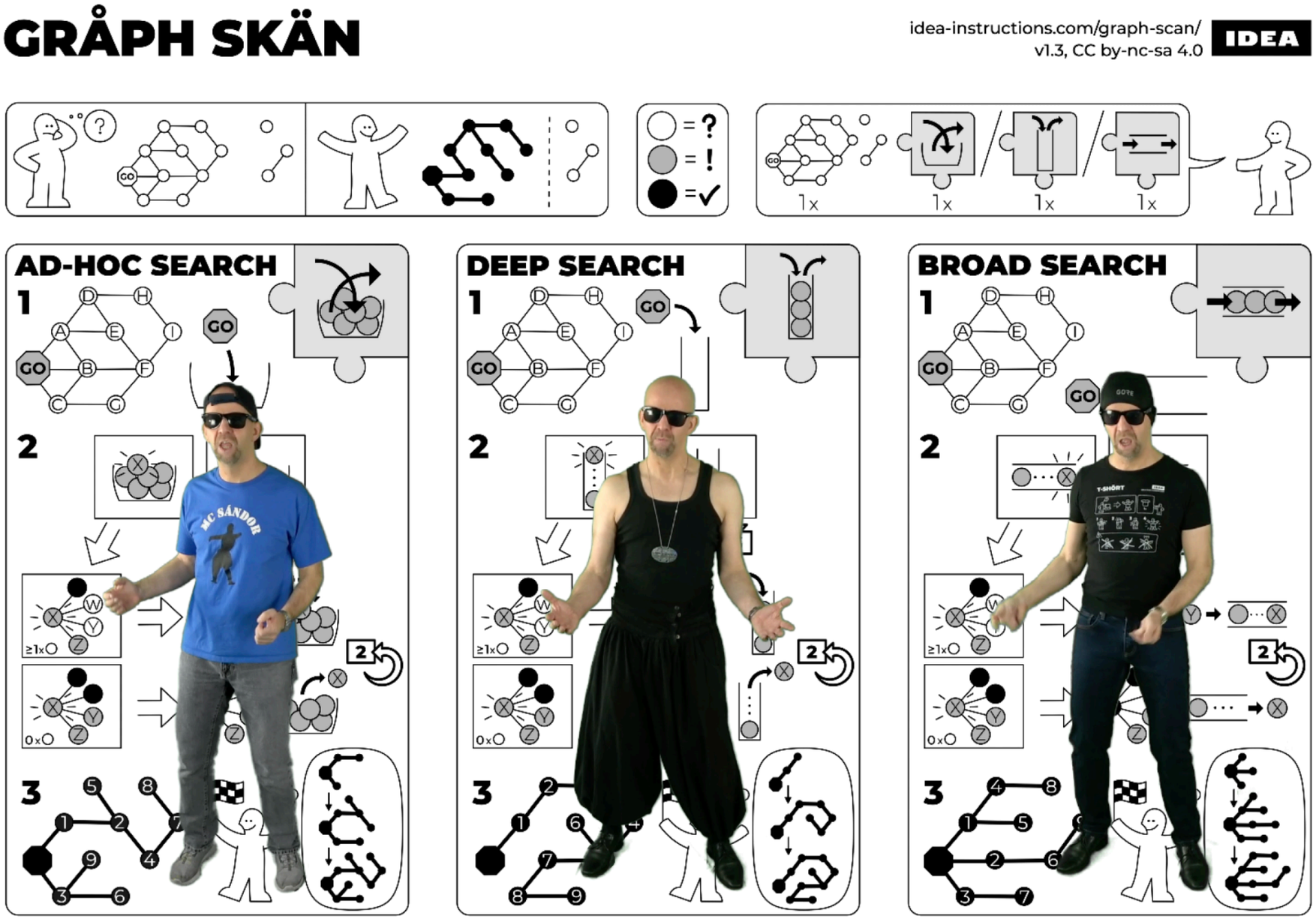


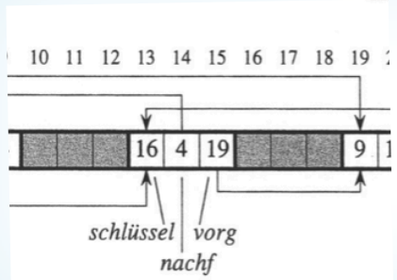


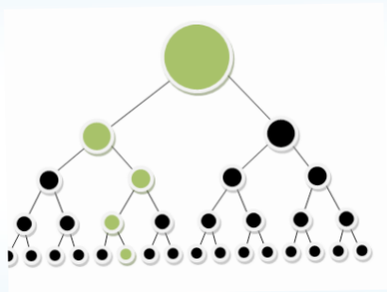




Zusammenfassung Kapitel 3!







Kapitel 4: Dynamische Datenstrukturen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

4.1 Grundoperationen

Aufgabenstellung:

- ***Verwalten einer Menge S von Objekten***
- ***Ausführen von verschiedenen Operationen (s.u.)***

Im Folgenden:

S	**Menge von Objekten**
k	**Wert eines Elements ("Schlüssel")**
x	**Zeiger auf Element**
NIL	**spezieller, "leerer" Zeiger**

4.1 Grundoperationen

<u>SEARCH(S,k):</u> **“Suche in S nach k”**

Durchsuche die Menge S nach einem Element von Wert k.

Ausgabe: Zeiger x, falls x existent
NIL, falls kein Element Wert k hat.

4.1 Grundoperationen

<u>INSERT(S,x):</u> **“Füge x in S ein”**

Erweitere S um das Element, das unter der Adresse x steht.

4.1 Grundoperationen

<u>DELETE(S,x):</u> **“Entferne x aus S”**

Lösche das unter der Adresse x stehende Element aus der Menge S.

4.1 Grundoperationen

Langsam:

- ***O(n):*** ***lineare Zeit***

  Alle Objekte anschauen

Sehr schnell:

- ***O(1):*** ***konstante Zeit***

  Immer gleich schnell, egal wie groß S ist.

Schnell:

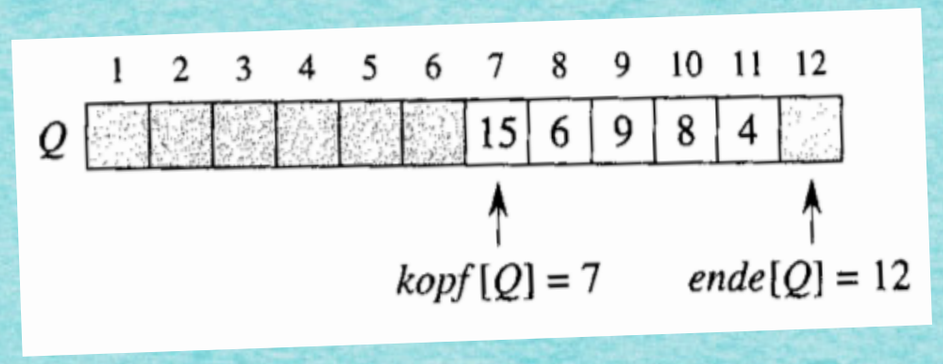
- ***O(log n): logarithmische Zeit***

  Wiederholtes Halbieren

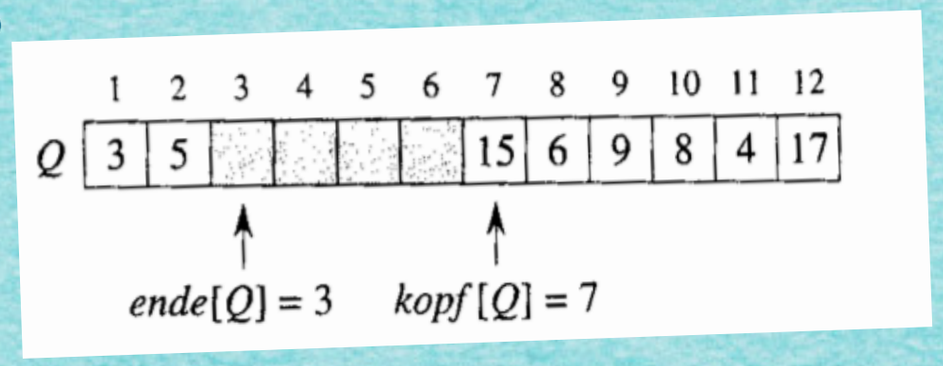
4.2 Stapel und Warteschlange

OUT

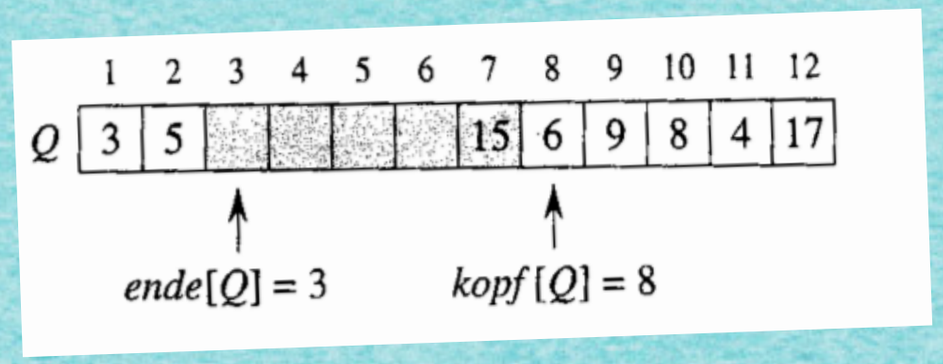
IN



Enqueue: 17, 3, 5



Dequeue:

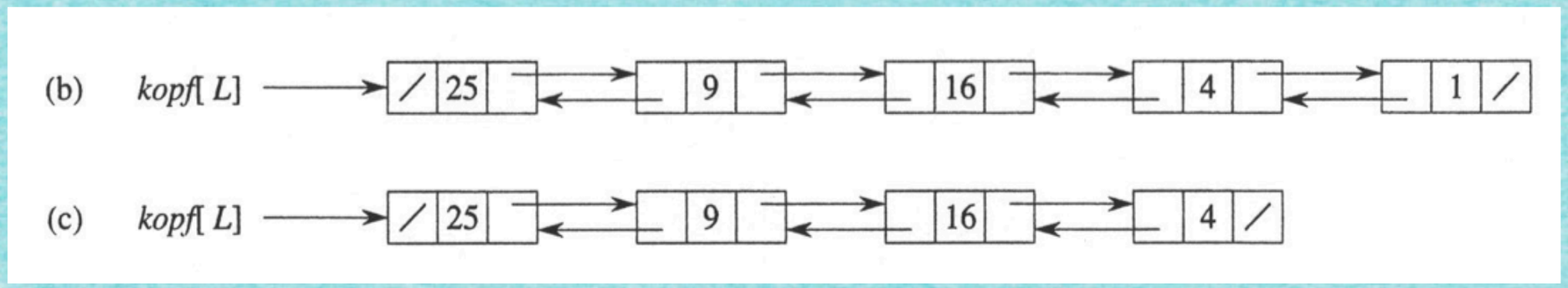


4.3 Verkettete Listen

Idee:

Ordne Objekte nicht explizit in aufeinanderfolgenden Speicherzellen an, sondern gib jeweils Vorgänger und Nachfolger an.

Löschen aus einer doppelt verketteten Liste



<u>Laufzeit:</u> O(n)

```
LIST-SEARCH(L, k)
x ← kopf[L]
while x ≠ NIL und schlüssel[x] ≠ k
      do x ← nachf[x]
return x
```

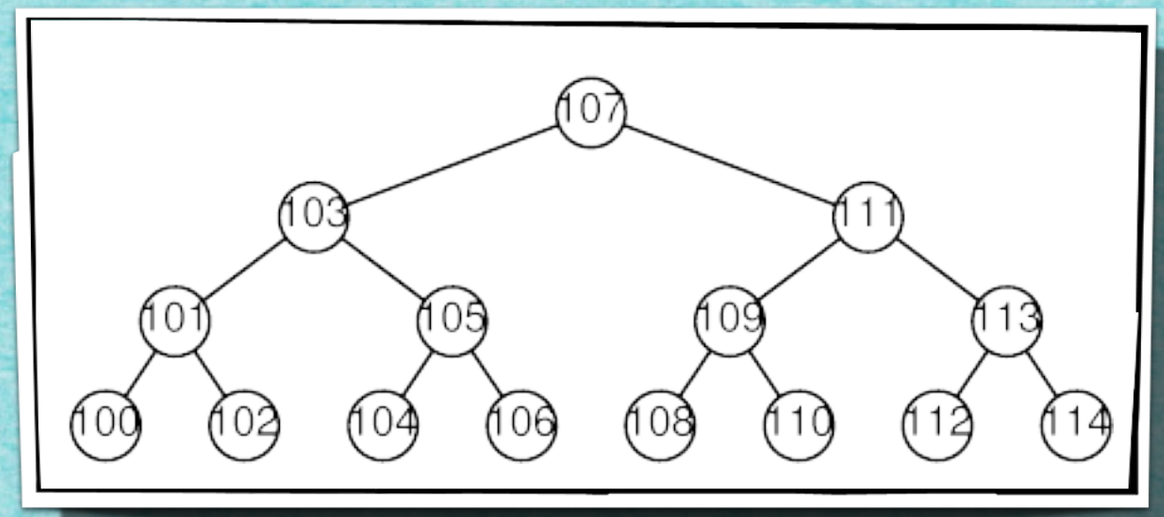
<u>Laufzeit:</u> O(1)

```
LIST-DELETE(L, x)
if vorg[x] ≠ NIL
    then nachf[vorg[x]] ← nachf[x]
    else  kopf[L] ← nachf[x]
if nachf[x] ≠ NIL
    then vorg[nachf[x]] ← vorg[x]
```

4.4 Binäre Suche

<u>Aufgabenstellung:</u>

- ***Rate eine Zahl zwischen 100 und 114!***



Algorithmus 4.1

INPUT: Sortierter Array mit Einträgen S[I], Suchwert WERT,
linke Randposition LINKS, rechte Randposition RECHTS,

OUTPUT: Position von WERT zwischen Arraypositionen LINKS und RECHTS, falls existent

BINÄRESUCHE(S,WERT,LINKS,RECHTS)

1. WHILE (LINKS≤RECHTS) DO {
    1.1. MITTE:= $\left\lfloor \frac{\text{LINKS} + \text{RECHTS}}{2} \right\rfloor$
    1.2. IF (S[MITTE]=WERT) THEN
        1.2.1. RETURN MITTE
    1.3. ELSEIF (S[MITTE]>WERT) THEN
        1.3.1. RECHTS:=MITTE-1
    1.4. ELSEIF
        1.4.1. LINKS:=MITTE+1
   }
2. RETURN "WERT nicht gefunden!"

Binäre Suche

```
BINÄRESUCHE(S,WERT,LINKS,RECHTS)

1.  WHILE (LINKS≤RECHTS) DO {
      1.1.  MITTE:= ⌊(LINKS + RECHTS) / 2⌋
      1.2.  IF (S[MITTE]=WERT) THEN
          1.2.1. RETURN MITTE
      1.3.  ELSEIF (S[MITTE]>WERT) THEN
          1.3.1. RECHTS:=MITTE-1
      1.4.  ELSEIF
          1.4.1. LINKS:=MITTE+1
    }
2.  RETURN "WERT nicht gefunden!"
```

Aufgabenstellung:

- ***Finde eine gesuchte Zahl in der gegebenen sortierten Menge!***

WERT=42

	LINKS						MITTE							RECHTS
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S[i]	1	2	5	6	13	17	28	33	42	47	52	64	89	96

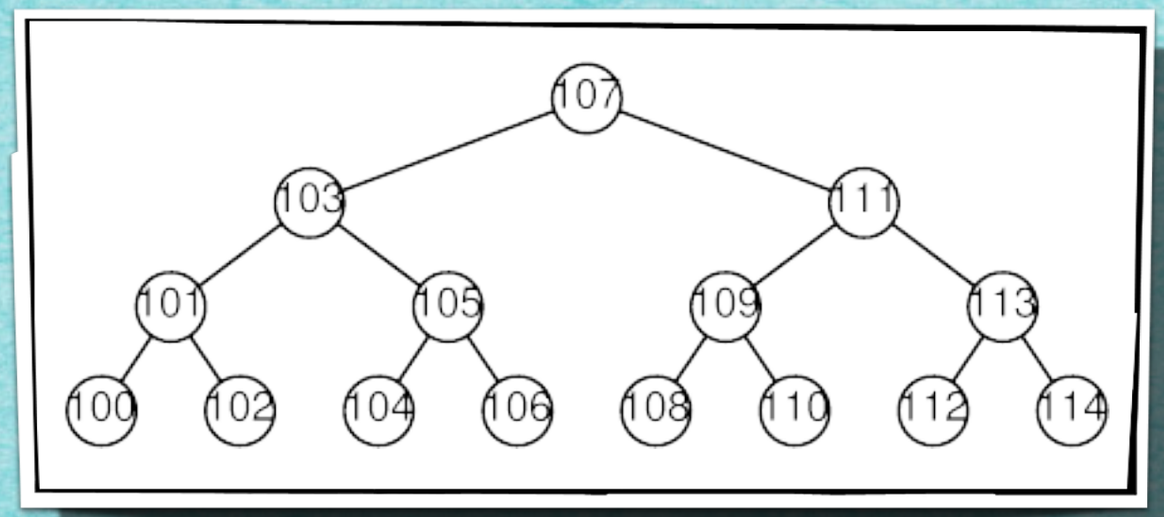
RETURN 9

Satz 4.2

Die binäre Suche terminiert in O(log(RECHTS-LINKS)) Schritten (für RECHTS>LINKS).

Beweis:

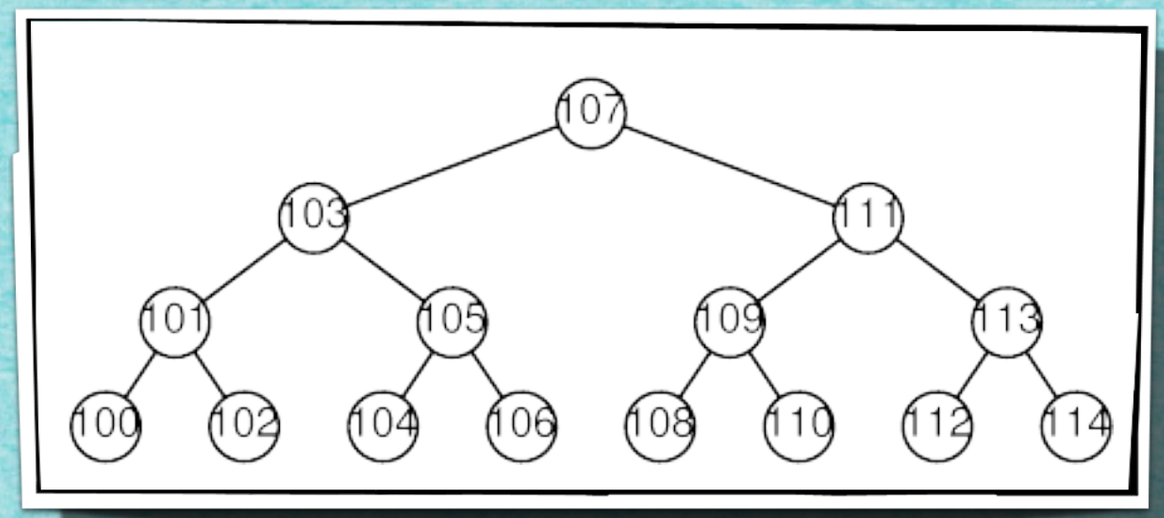
Selbst!



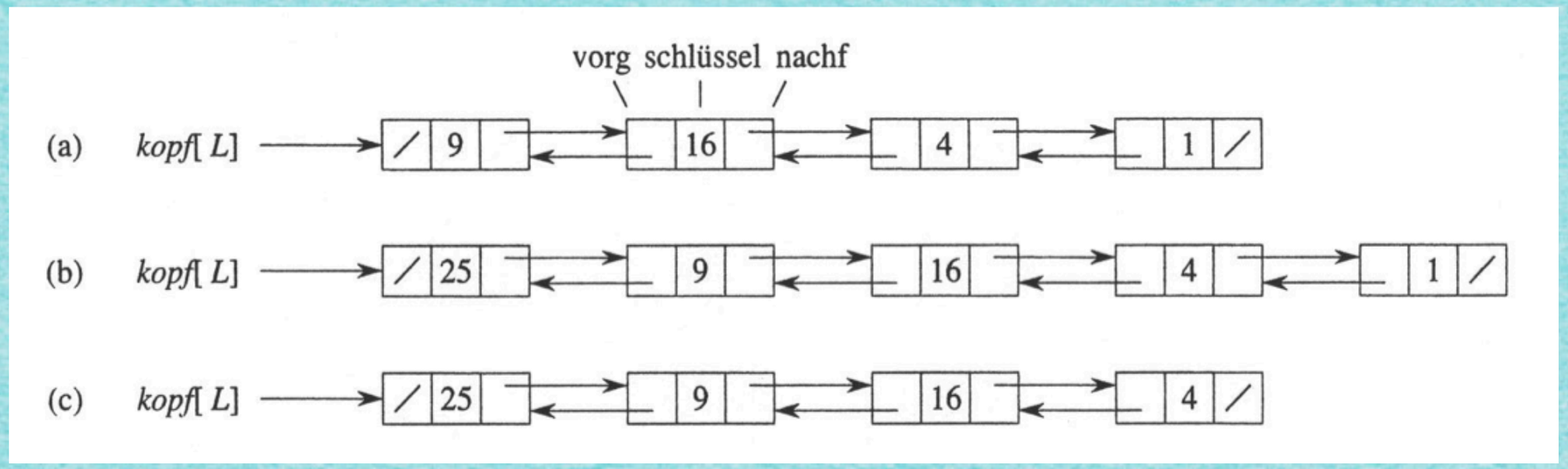
4.5 Binäre Suchbäume

Ideen:

- ***Strukturiere Daten wie im möglichen Ablauf einer binären Suche!***
- ***Erziele logarithmische Zeiten!***



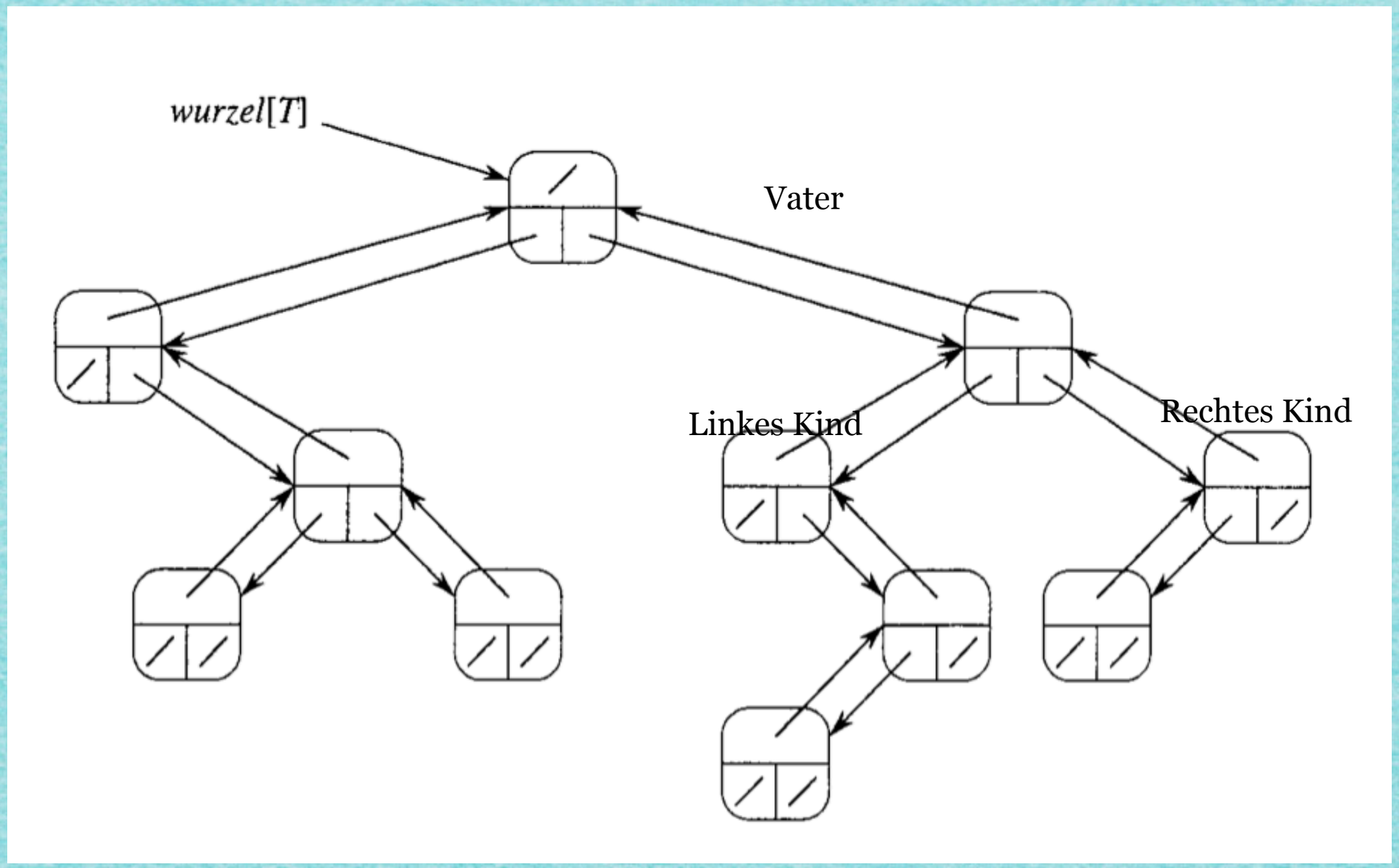
Struktur einer doppelt verketteten Liste



- **Füge vorne das Element mit Schlüssel 25 ein.**

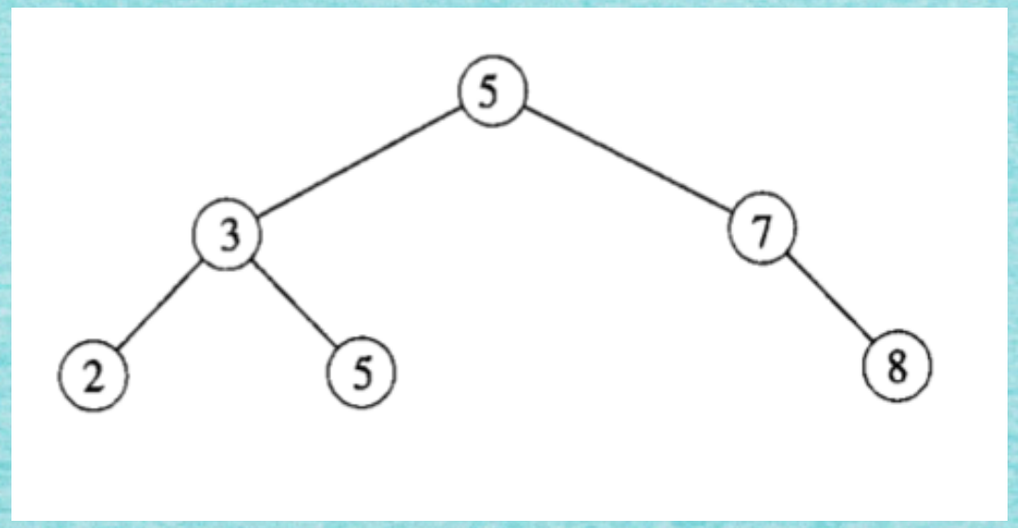
- **Finde ein Element mit Schlüssel 1 und lösche es.**

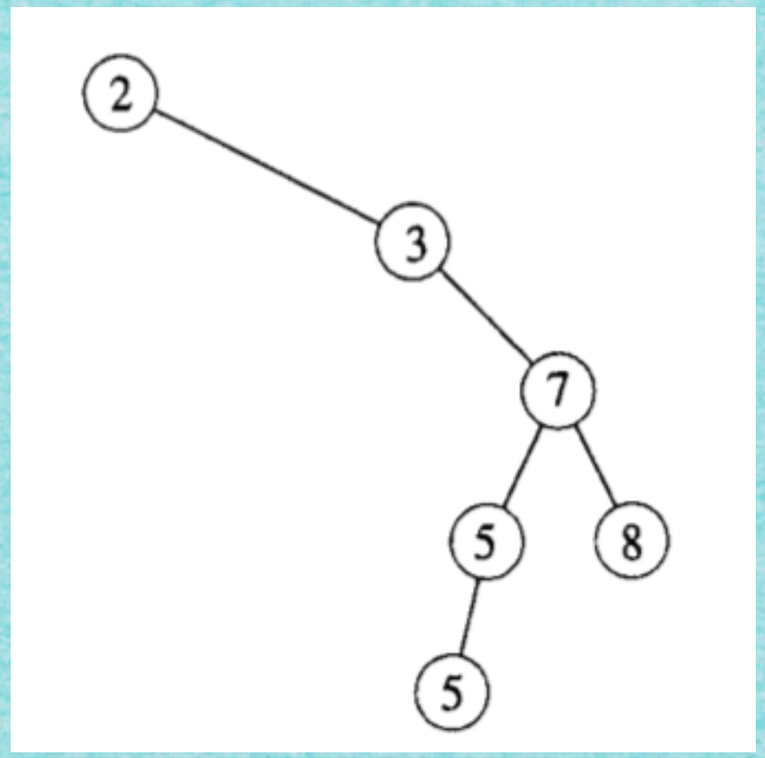
Binärer Suchbaum



Außerdem wichtig: Struktur der Schlüsselwerte!

Ordnungsstruktur





Linker Teilbaum: Kleinere (bzw. nicht größere) Zahlen
Rechter Teilbaum: Größere Zahlen

Definition 4.3

(1) Ein ***gerichteter Graph*** D=(V,A) besteht aus einer endlichen Menge V von Knoten v und einer endlichen Menge von gerichteten Kanten, a=(v,w). (v ist Vorgänger von w.)

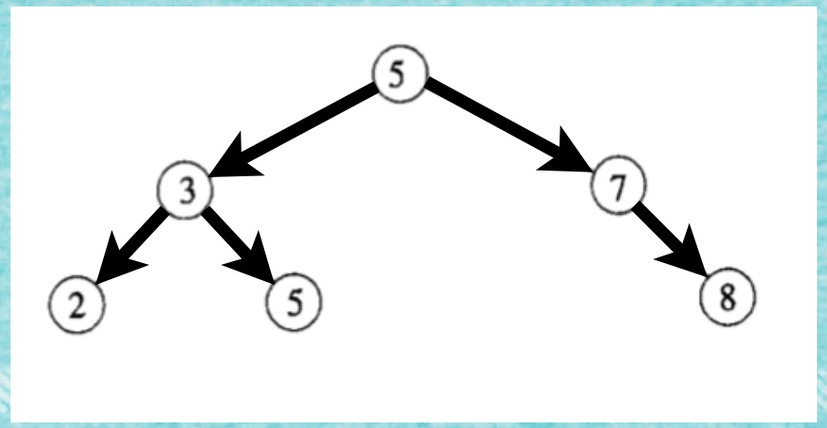
(2) Ein ***gerichteter Baum*** B=(V,T) hat folgende Eigenschaften:

(i) Es gibt einen eindeutigen Knoten w ohne Vorgänger.

(ii) Jeder Knoten außer w ist auf einem eindeutigen Weg von w aus erreichbar; das heißt insbesondere, dass v einen eindeutigen Vorgänger (Vaterknoten) hat.

(3) Die ***Höhe*** eines gerichteten Baumes ist die maximale Länge eines gerichteten Weges von der Wurzel.

(4) Ein ***binärer Baum*** ist ein gerichteter Baum, in dem jeder Knoten höchstens zwei Nachfolger ("Kindknoten") hat. Einer ist der "linke" l[v], der andere der "rechte", r[v].



Definition 4.3 (Forts.)

(5) Ein binärer Baum heißt *voll*, wenn jeder Knoten zwei oder keinen Kindknoten hat.

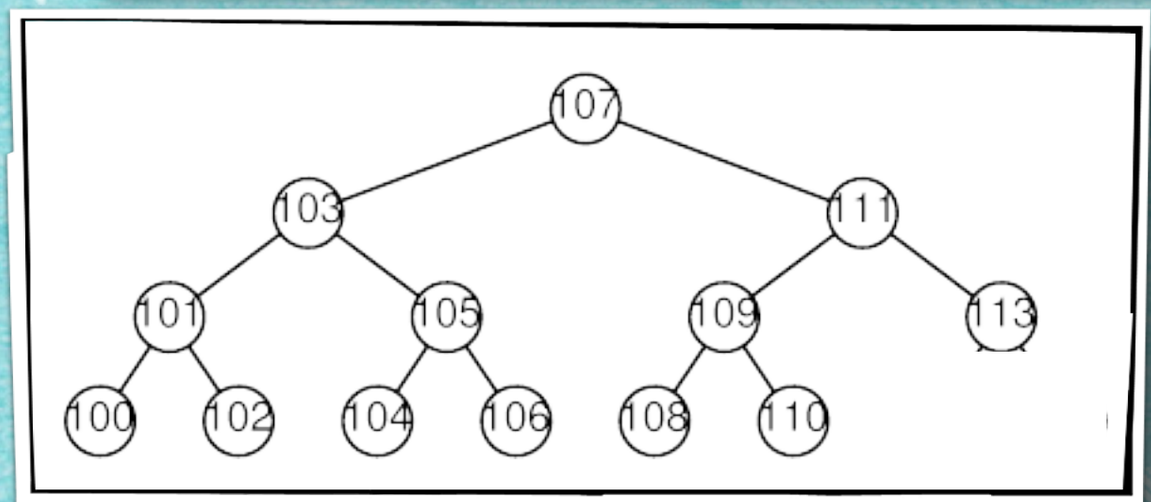
(6) Ein binärer Baum heißt *vollständig*, wenn zusätzlich alle Blätter gleichen Abstand zur Wurzel haben.

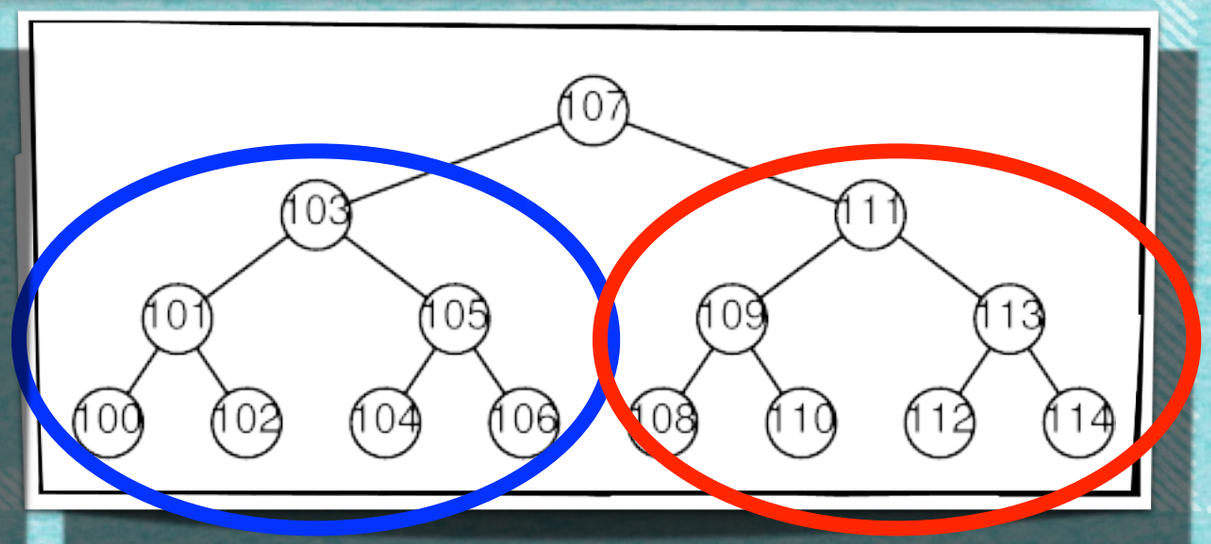
(7) Ein Knoten ohne Kindknoten heißt *Blatt*.

(8) Der *Teilbaum eines Knotens v* ist durch die Menge der von v erreichbaren Knoten und der dabei verwendeten Kanten definiert; der linke Teilbaum ist der Teilbaum von l[v].

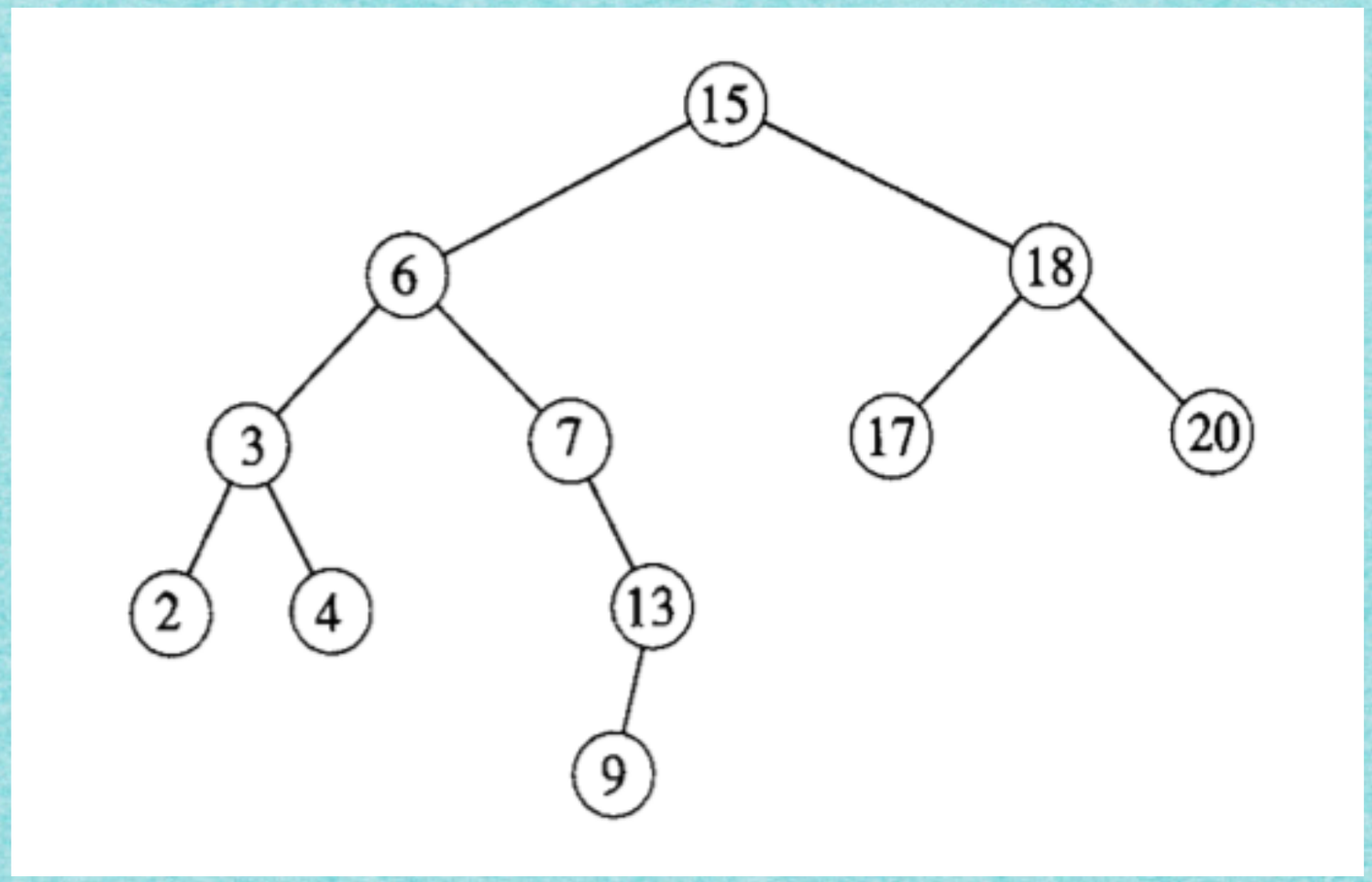
(9) In einem *binären Suchbaum* hat jeder Knoten v einen Schlüsselwert S[v],und es gilt:

- **S[u]≤S[v] für Knoten u im linken Teilbaum von v**
- **S[u]>S[v] für Knoten u im rechten Teilbaum von v**





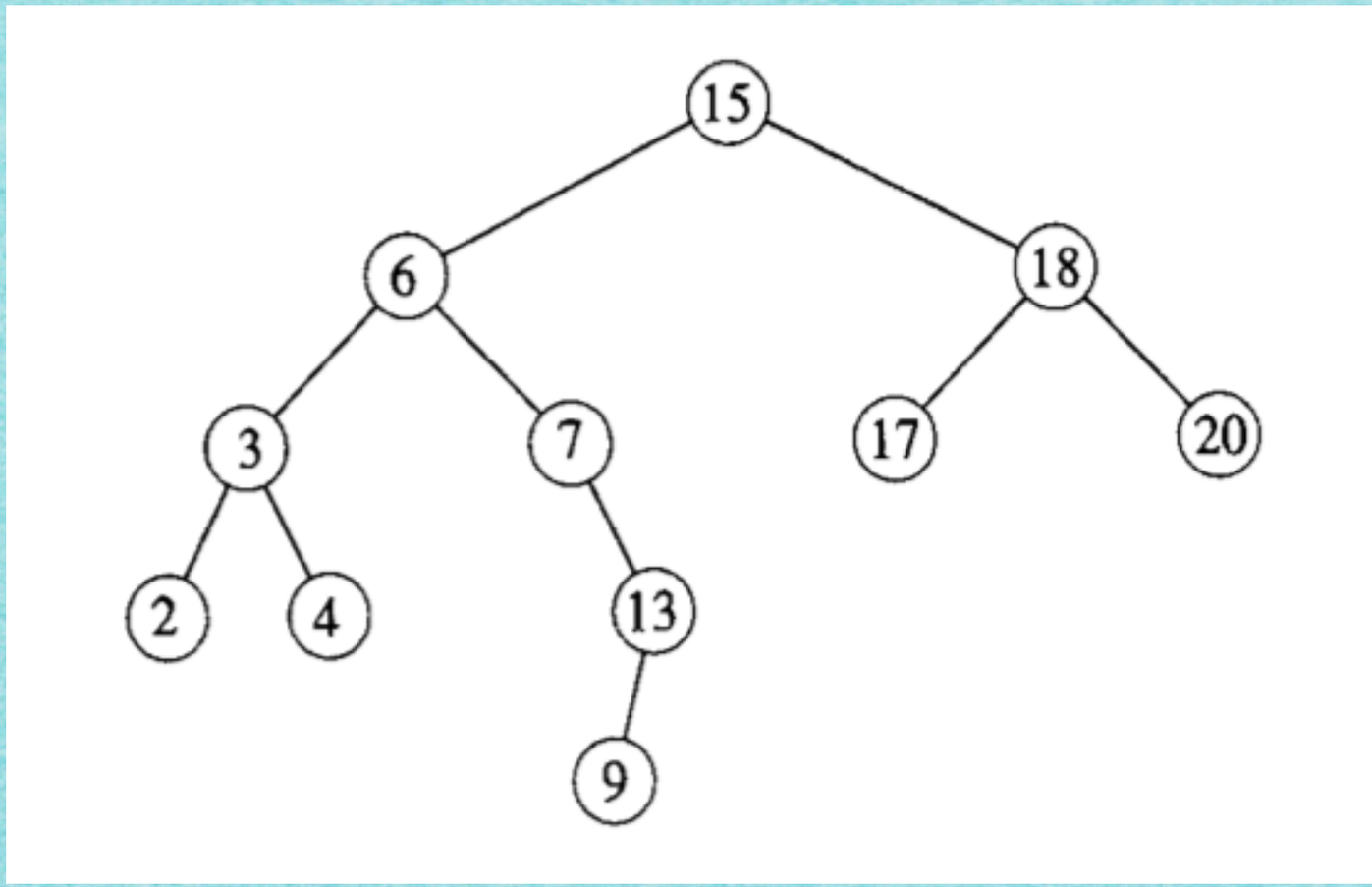
Minimum und Maximum




```
TREE-MINIMUM(x)
while links[x] ≠ NIL
        do x ← links[x]
return x
```

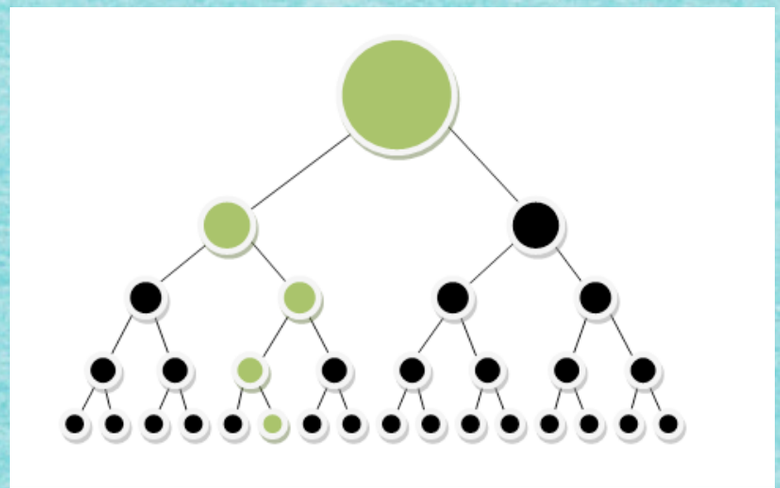
```
TREE-MAXIMUM(x)
while rechts[x] ≠ NIL
        do x ← rechts[x]
return x
```

Suche im Suchbaum

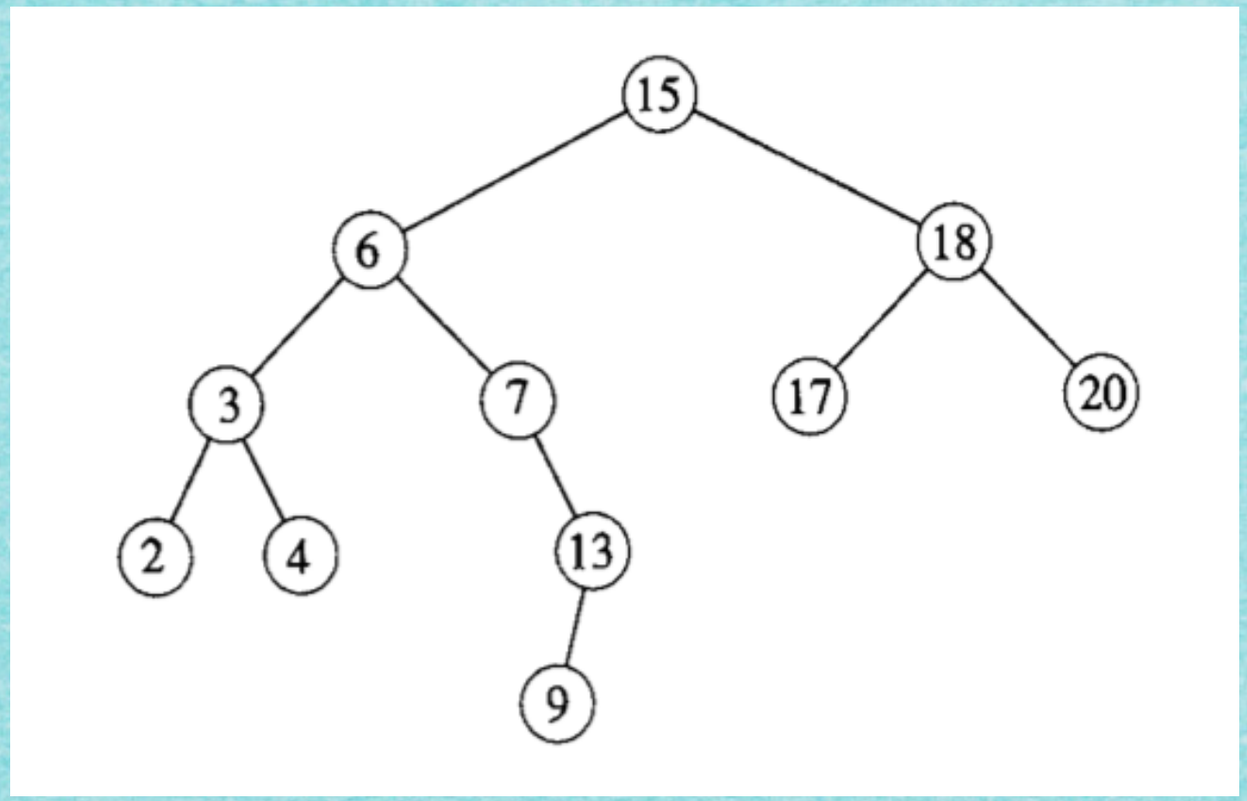


ITERATIVE-TREE-SEARCH(x, k)

```
while x ≠ NIL und k ≠ schlüssel[x]
        do if k < schlüssel[x]
                then x ← links[x]
                else  x ← rechts[x]
return x
```



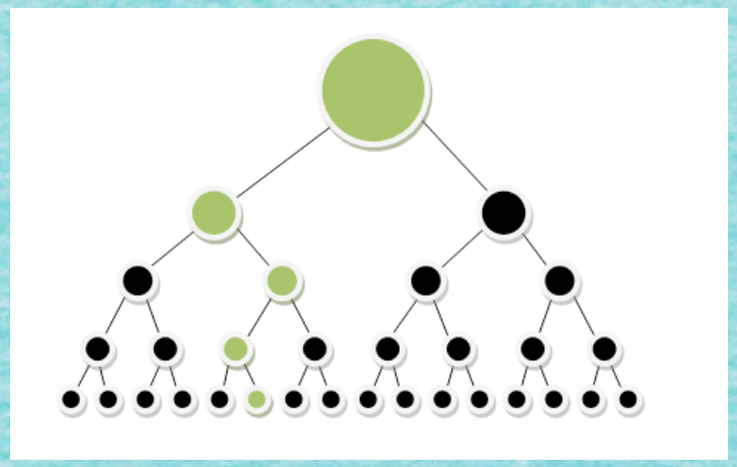
Nachfolger im Suchbaum



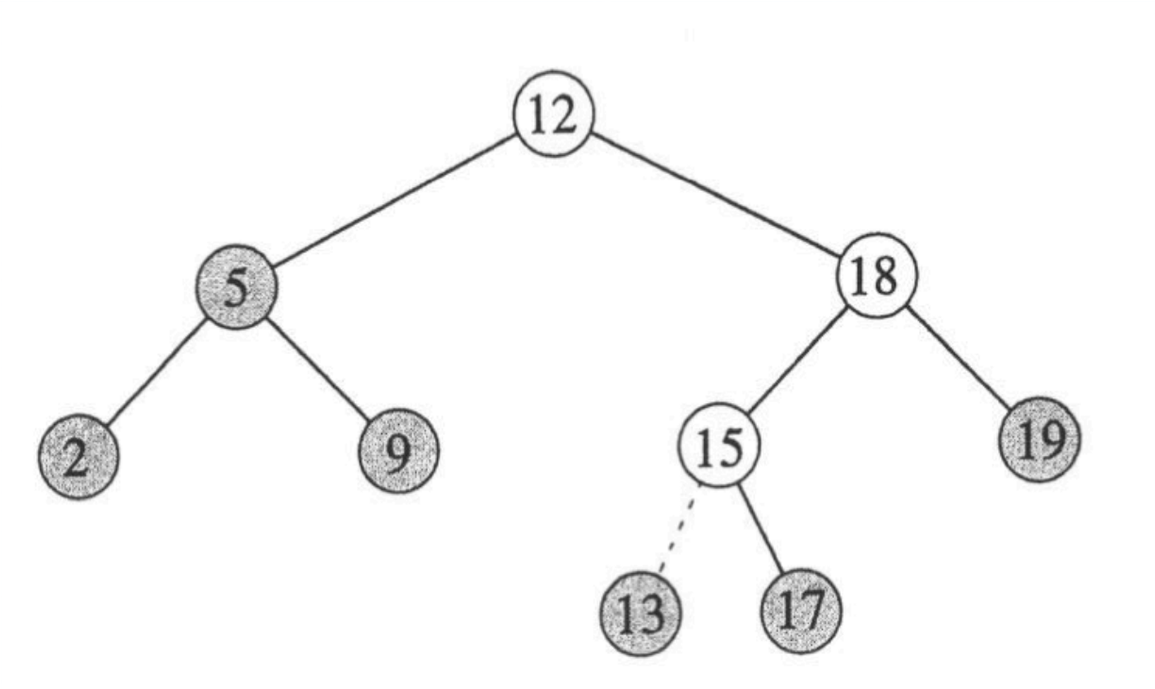

```
TREE-SUCCESSOR(x)
if rechts[x] ≠ NIL
    then return TREE-MINIMUM(rechts[x])
y ← p[x]
while y ≠ NIL und x = rechts[y]
        do x ← y
           y ← p[y]
return y
```

Satz 4.4
Suchen, Minimum, Maximum, Nachfolger, Vorgänger können in einem binären Suchbaum der Höhe h in Zeit O(h) durchlaufen werden.

Beweis:
Klar, der Baum wird nur einmal vertikal durchlaufen!

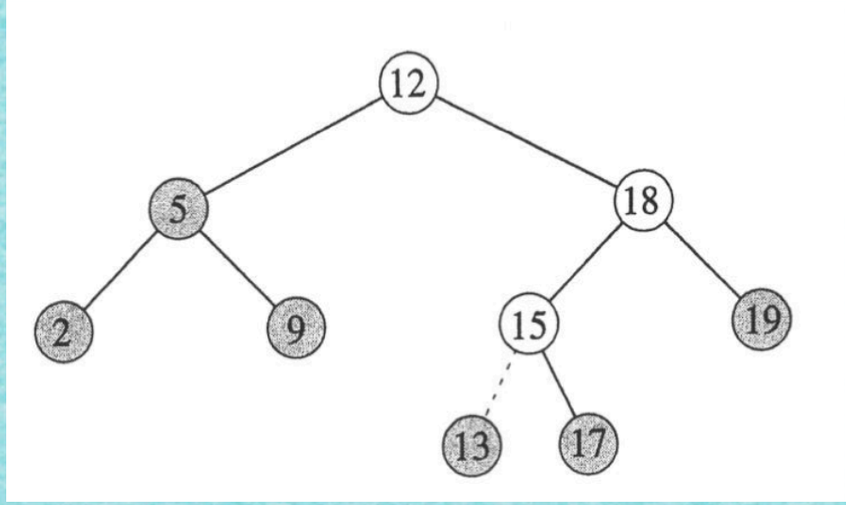


Einfügen im Suchbaum



Füge 13 ein!

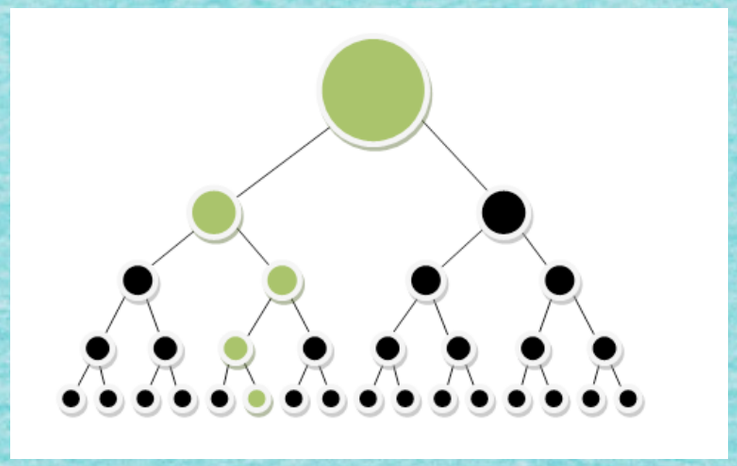
Einfügen im Suchbaum




```
TREE-INSERT(T, z)
y ← NIL
x ← wurzel[T]
while x ≠ NIL
      do y ← x
         if schlüssel[z] < schlüssel[x]
            then x ← links[x]
            else x ← rechts[x]
p[z] ← y
if y = NIL
   then wurzel[T] ← z                          ▷ Baum T war leer
   else if schlüssel[z] < schlüssel[y]
            then links[y] ← z
            else rechts[y] ← z
```

<u>Satz 4.5</u>
Einfügen benötigt O(h) für einen binären Suchbaum der Höhe h.

<u>Beweis:</u>
Klar, der Baum wird nur vertikal abwärts durchlaufen!

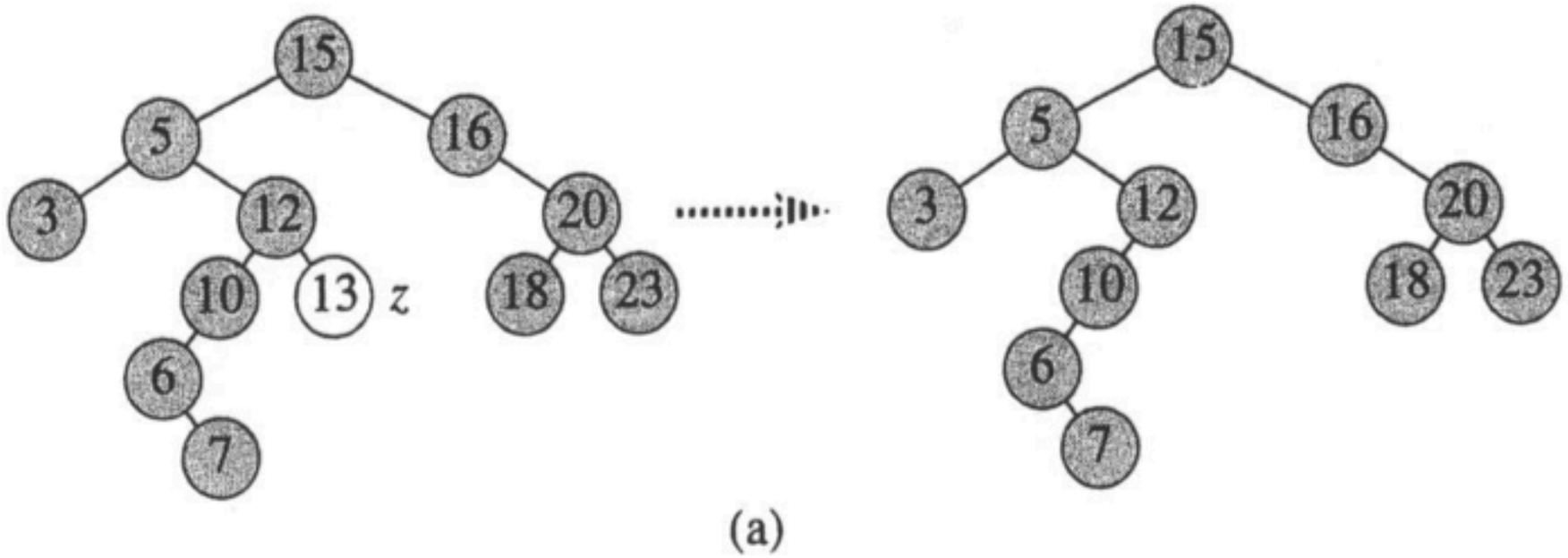


4.1 Grundoperationen

<u>DELETE(S,x):</u> **“Entferne x aus S”**

Lösche das unter der Adresse x stehende Element aus der Menge S.

Löschen im Suchbaum



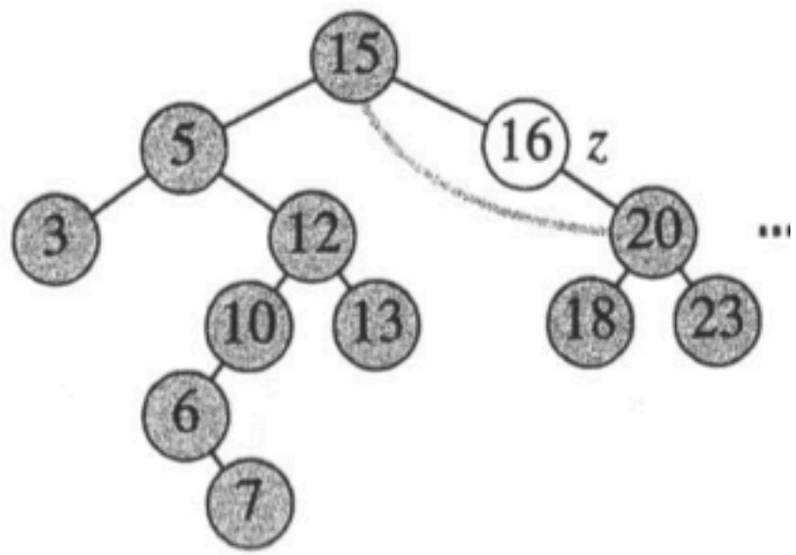
(a)

Lösche 13!

(a) Keine Kinder:

Einfach entfernen

Löschen im Suchbaum

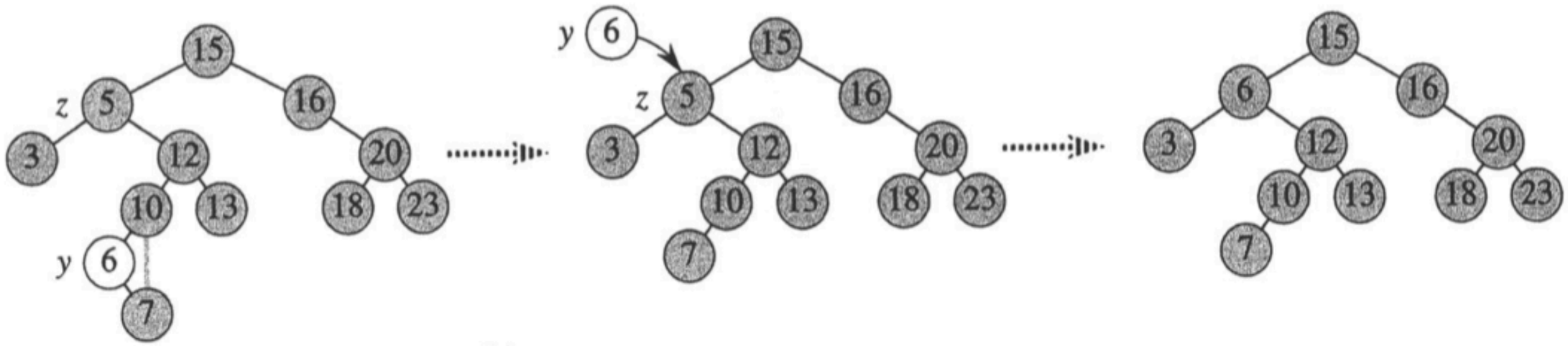


Lösche 16!

(b) Ein Kind:

"Ausschneiden"

Löschen im Suchbaum



(c)

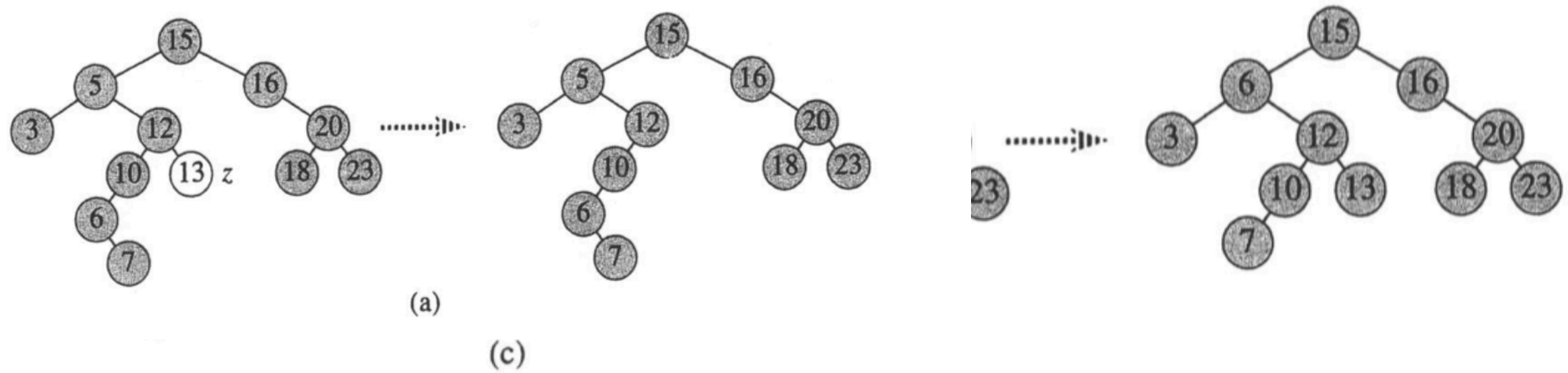
Lösche 5!

(c) Zwei Kinder:

"Nachfolger verpflanzen"

Löschen im Suchbaum

```
TREE-DELETE(T, z)
if links[z] = NIL oder rechts[z] = NIL
    then y ← z
    else  y ← TREE-SUCCESSOR(z)
if links[y] ≠ NIL
    then x ← links[y]
    else  x ← rechts[y]
if x ≠ NIL
    then p[x] ← p[y]
if p[y] = NIL
    then wurzel[T] ← x
    else  if y = links[p[y]]
              then links[p[y]] ← x
              else  rechts[p[y]] ← x
if y ≠ z
    then schlüssel[z] ← schlüssel[y]
          kopiere die Satellitendaten von y in z
return y
```



<u>Satz 4.6</u>
Löschen benötigt O(h) für einen binären Suchbaum der Höhe h.

<u>Beweis:</u>
Klar, der Baum wird i.W. nur einmal durchlaufen!

4.5 Binäre Suchbäume

<u>Schnell:</u>

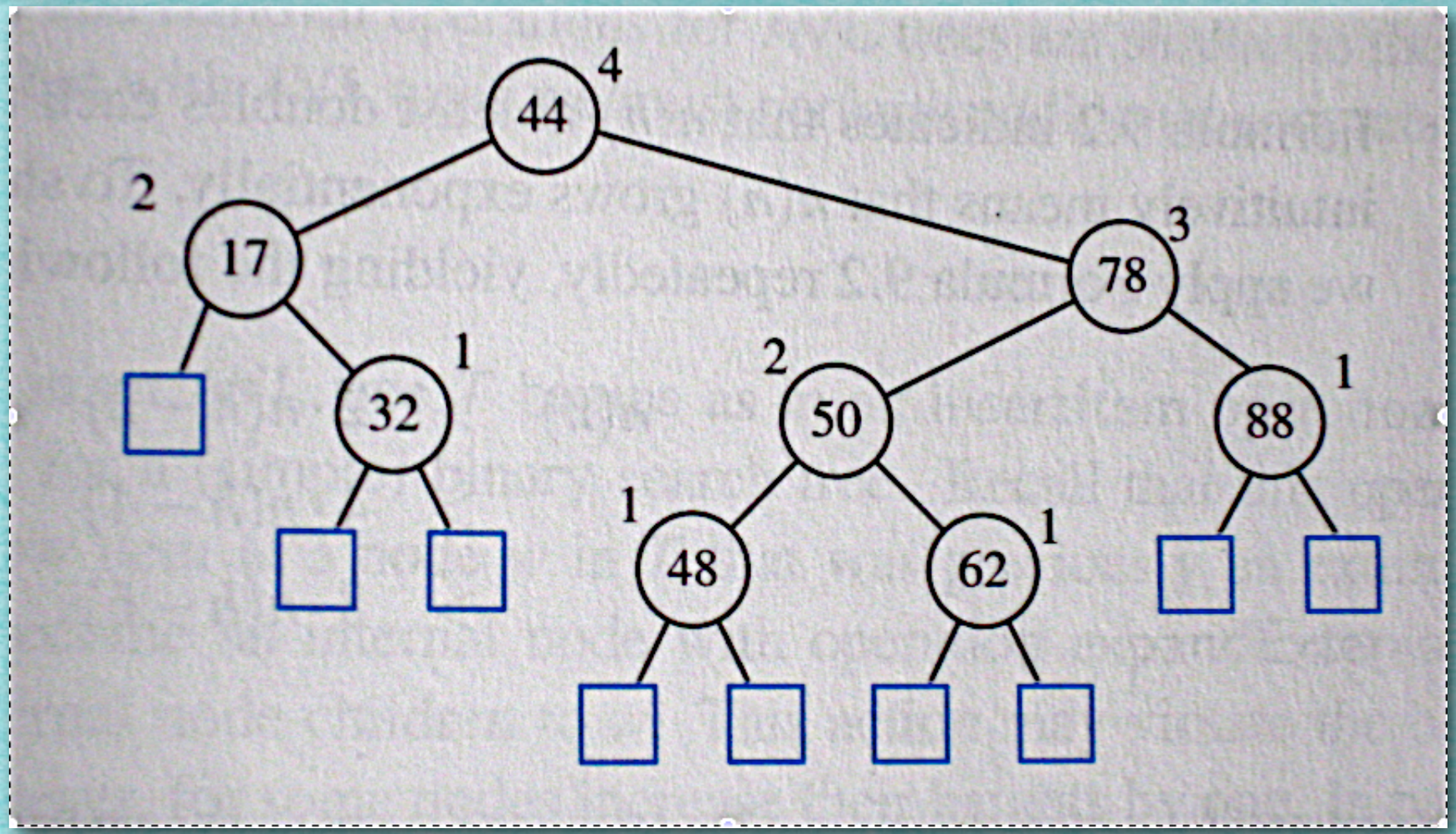
- ***O(log n): logarithmische Zeit***
- ***O(h): Tiefe des Baumes***

<u>Also: Wie können wir die Tiefe des Baumes auf O(log n) beschränken?</u>

Definition 4.7

(1) Ein binärer Suchbaum ist höhenbalanciert, wenn sich für jeden inneren Konten v die Höhe der beiden Kinder von v um höchstens 1 unterscheidet.

(2) Ein höhenbalancierter Suchbaum heißt auch AVL-Baum.



<u>Idee 3:</u> Wieviele Knoten braucht man mindestens für einen AVL-Baum der Höhe h?

(D.h. wir untersuchen nicht
Höhe in Abhängigkeit von der Knotenzahl
sondern
Knotenzahl in Abhängigkeit von der Höhe!)

wenn n mindestens exponentiell in h wächst,
dann wächst h höchstens logarithmisch in n.

Betrachte allgemein:

Mit $n(1) = 1$ und $n(2) = 2$ • bzw.

und $n(h+1) = 1 + n(h) + n(h-1)$

Satz 4.8

Die Höhe eines AVL-Baumes mit n Knoten ist $O(\log n)$.

Beweis:

Statt einer oberen Schranke für die Höhe eines AVL-Baumes zeigen wir zunächst eine untere Schranke für die Zahl der Knoten eines AVL-Baumes!

Sei $n(h)$ die kleinste Zahl von Knoten eines AVL-Baumes der Höhe h.

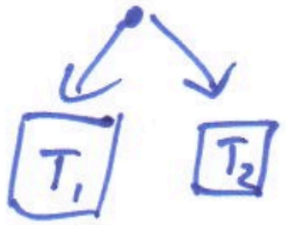
Wir beobachten

$n(0) = 1$ (ein Knoten erforderlich)

$n(1) = 2$ (zwei Knoten erforderlich wegen Höhe)

Noch einmal gilt

$$n(h) = \underset{\text{Wurzelknoten}}{1} + \underset{\text{Teilbaum}}{n(h-1)} + \underset{\text{Teilbaum}}{n(h-2)}.$$



Satz 4.8

Ein AVL-Baum mit n Knoten hat höchstens Höhe O(log n).

Beweis:

Wie gesehen!

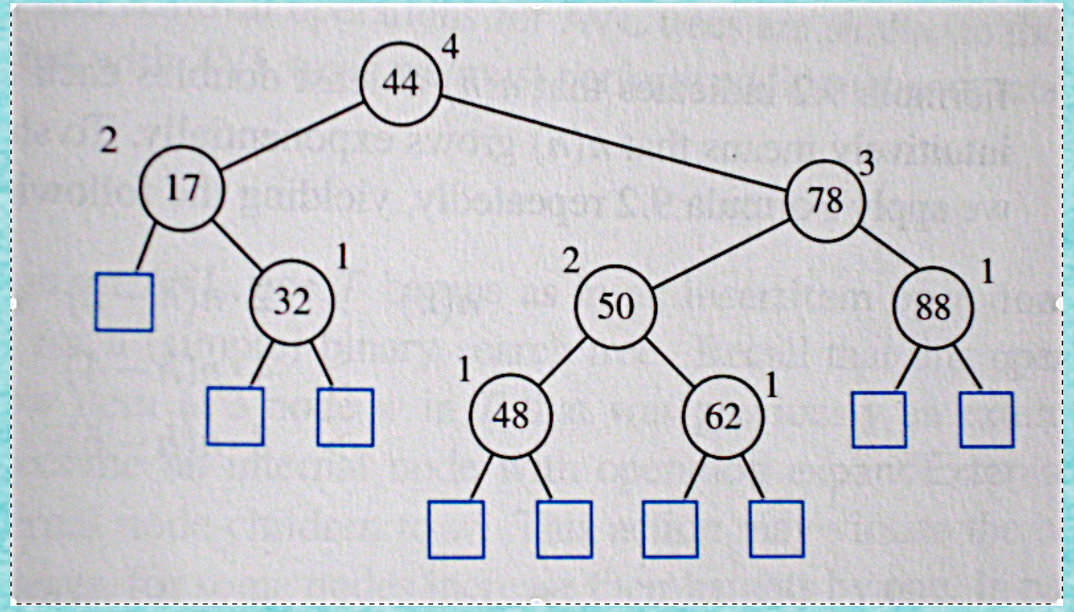
Damit noch offen:

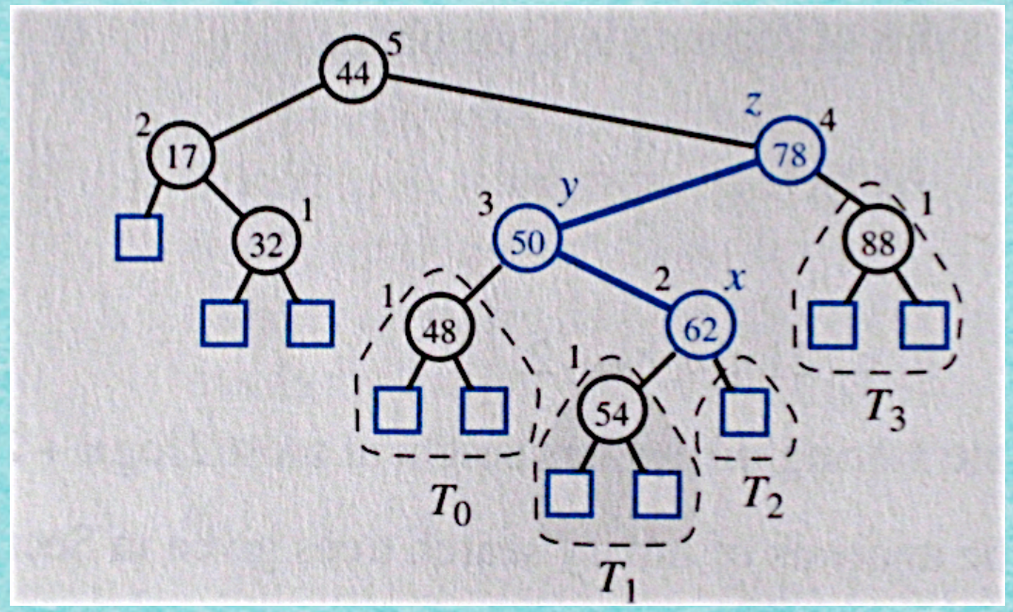
Wie erhält man Höhenbalanciertheit in dynamischen Situationen?

Einfügen („INSERT“)

<u>Aufgabe:</u>

- ***Füge 54 ein!***

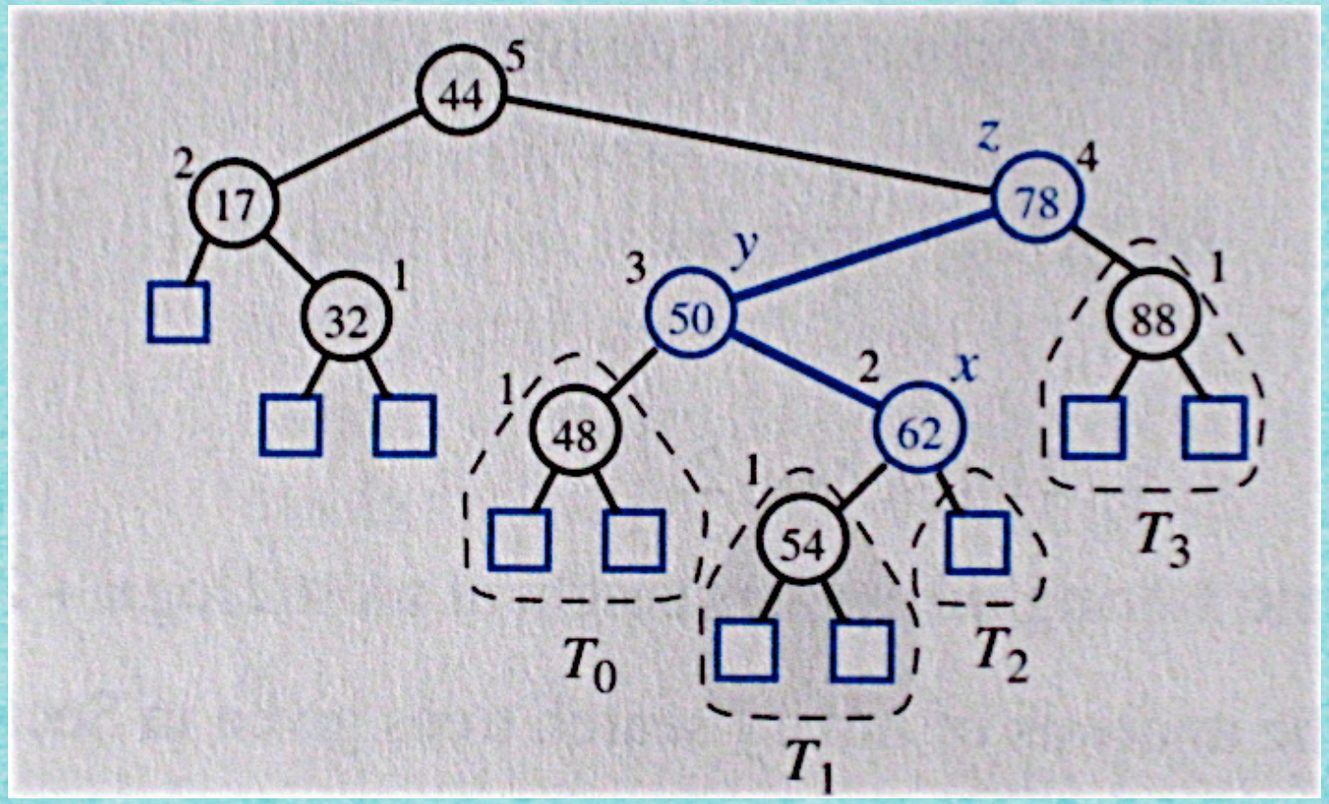




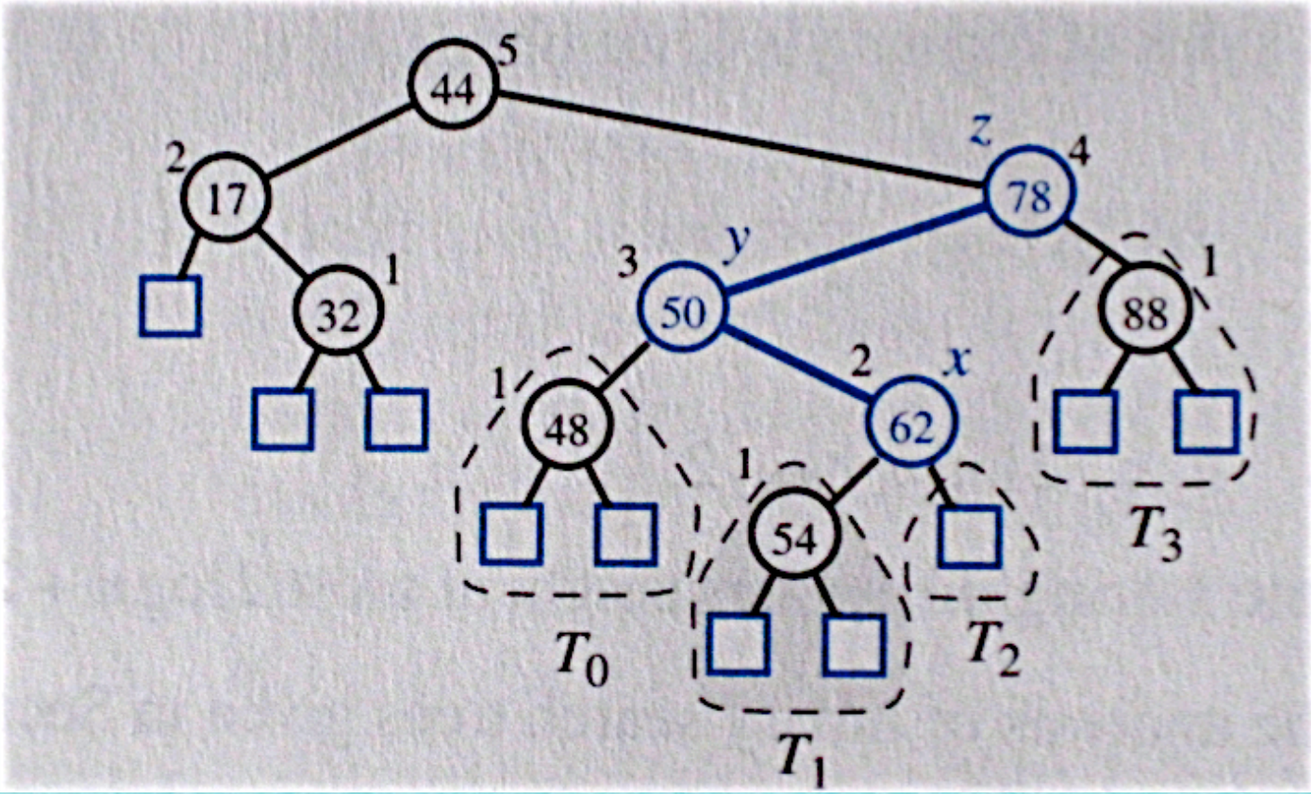
Einfügen

Idee:

- ***Höhenbalanciertheit ändert sich beim Einfügen einzelner Elemente nur wenig - und lokal!***



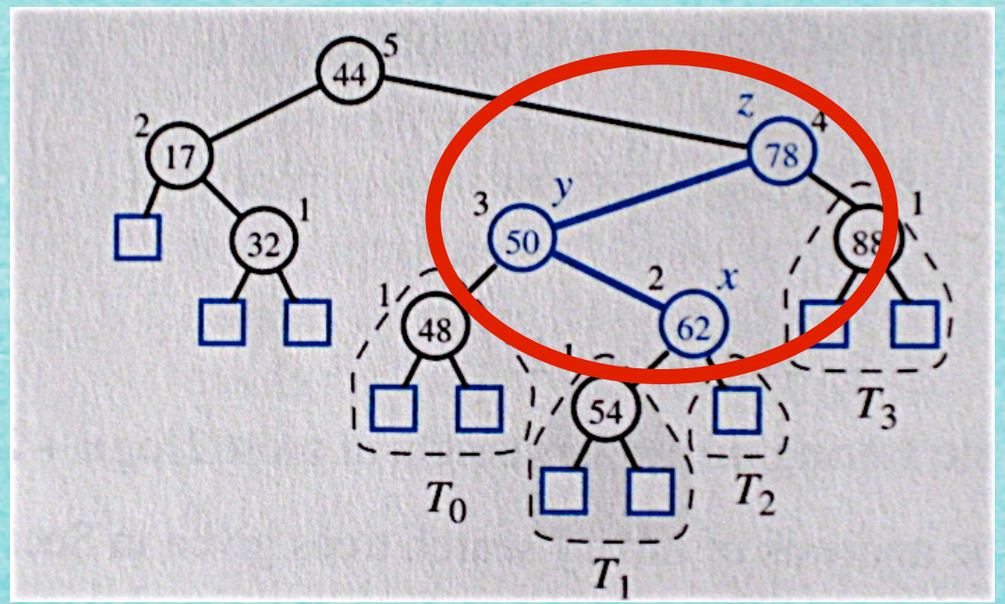
Einfügen

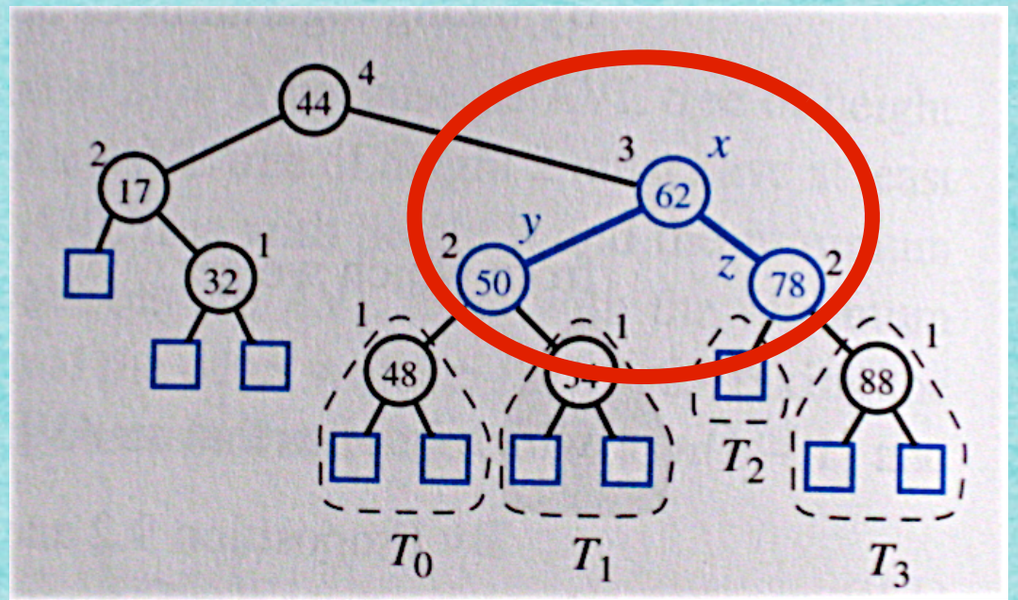


Was tun?

- ***Teilbaum der 78 ist nicht höhenbalanciert.***
- ***Die Höhe sollte höchstens 3 sein, damit auch der ganze Baum unter der 44 höhenbalanciert ist.***
- ***Betrachte Knoten 78, Kind 50, Enkel 62!***

Einfügen





Neuer Baum!

- ***Höhenbalanciert***
- ***Nur lokale Umsetzung der Knoten 78, 50, 62***
- ***Vorher drei Knoten untereinander, jetzt der mittlere über zwei anderen.***
- ***„Rotation“***

Algorithmus 4.9

INPUT:	Knoten x eines binären Suchbaumes T, Vaterknoten y, Großvaterknoten z
OUTPUT:	Binärer Suchbaum T nach Umstrukturierung mit x, y, z

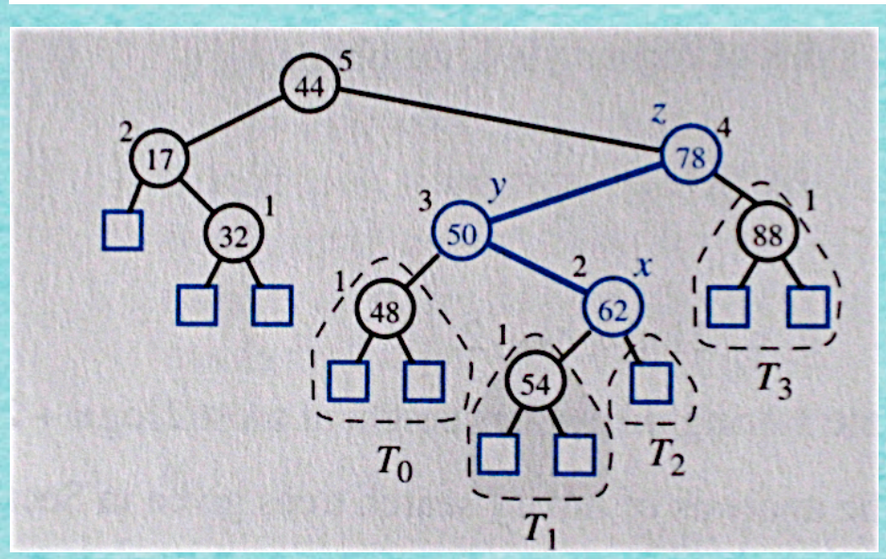
RESTRUCTURE(x)

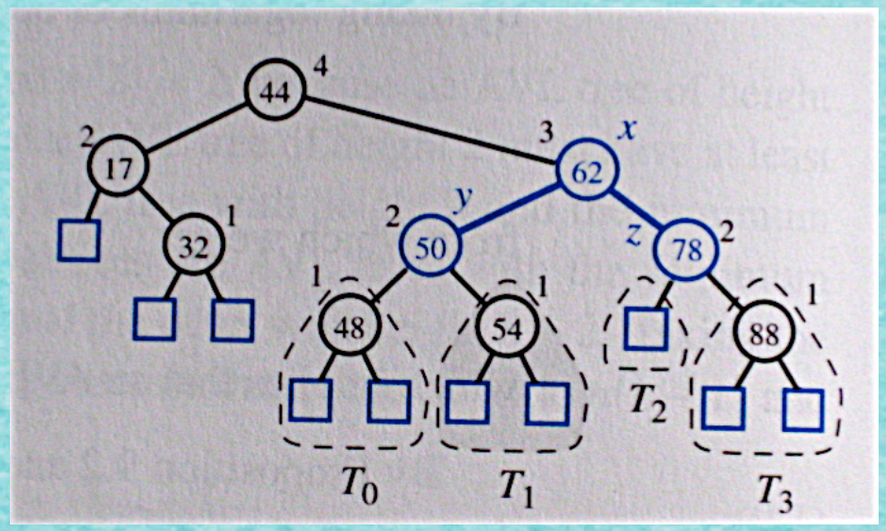
1. Sei (a, b, c) die Größensortierung der Knoten x, y, z;
   seien (T_0 , T_1 , T_2, T_3) die Größensortierung der vier Teilbäume unter x, y, z, die nicht Wurzeln x, y, z haben

2. Ersetze den Teilbaum mit Wurzel z durch einen neuen Teilbaum mit Wurzel b.

3. Setze a als linkes Kind von b, mit T_0 und T_1 als linken und rechten Teilbaum unter a;
   setze c als rechtes Kind von b, mit T_2 und T_3 als linken und rechten Teilbaum unter c.

4. RETURN



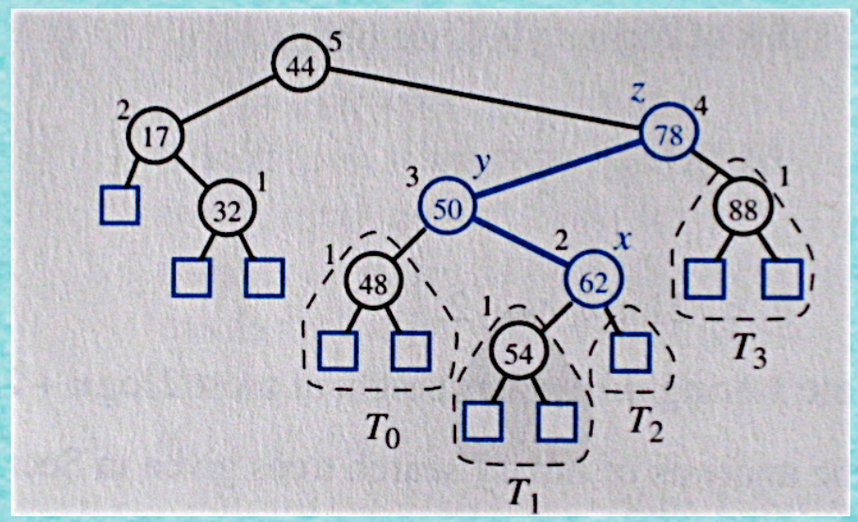


Satz 4.10

Mithilfe von RESTRUCTURE kann man einen AVL-Baum auch nach einer Einfüge-Operation höhenbalanciert halten.
Die Zeit dafür ist O(1).

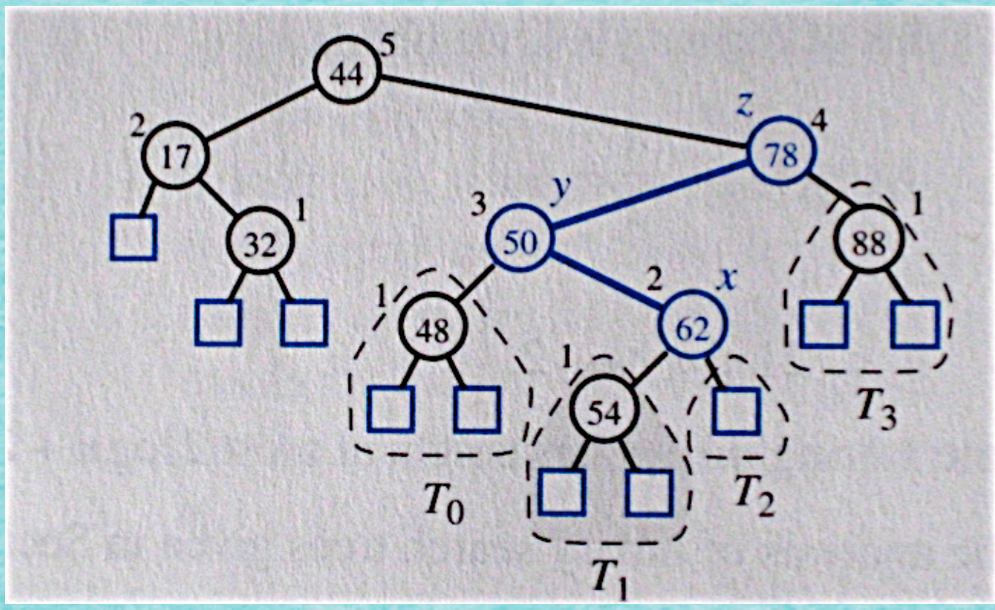
Beweis:

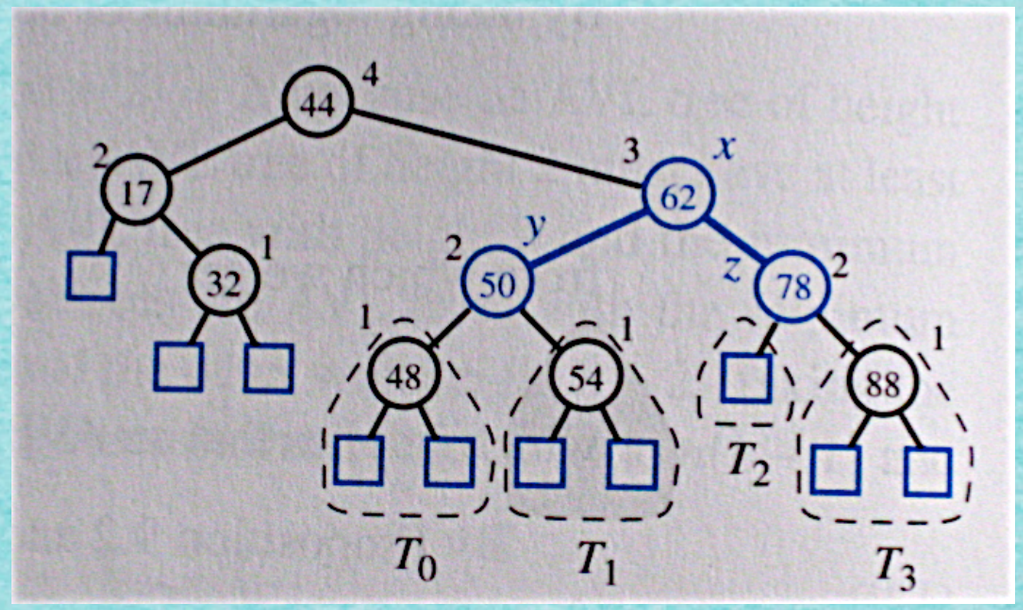
Angenommen, durch Hinzufügen eines Knotens v ist der Baum unbalanciert geworden.
Sei z der nach dem Einfügen niedrigste unbalancierte Vorfahre von v.
Sei y das Kind von z, das Vorfahre von v ist; y muss zwei höher sein als das andere Kind von z.
Sei x das Kind von y, das im selben Teilbaum wie v liegt.



Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Jetzt ersetzen wir die Teilstruktur z, y, x (3 Knoten untereinander) durch eine Teilstruktur mit 2 Knoten unter einem.
Z.z.: Danach ist der Baum ein AVL-Baum!



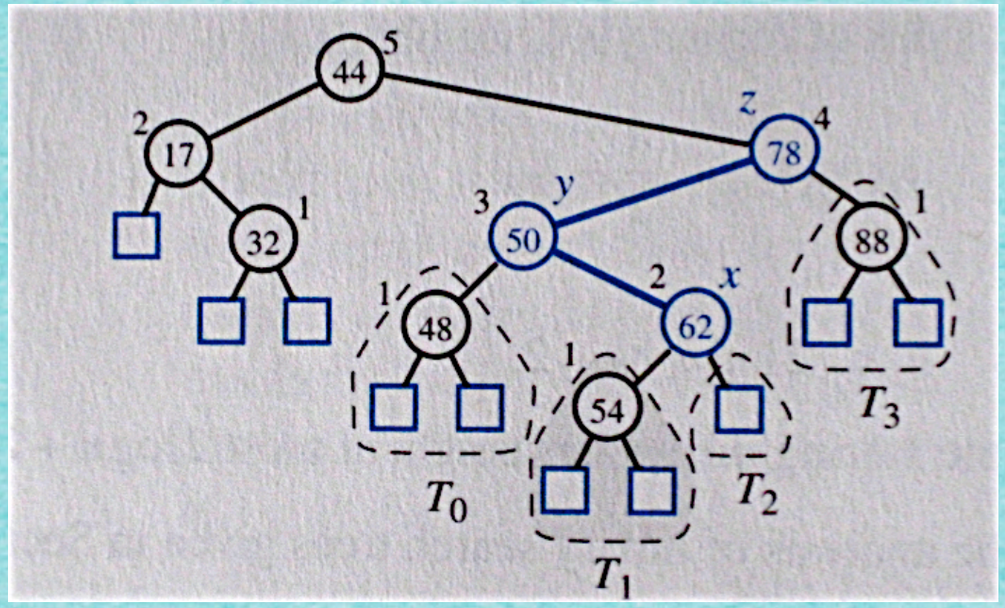


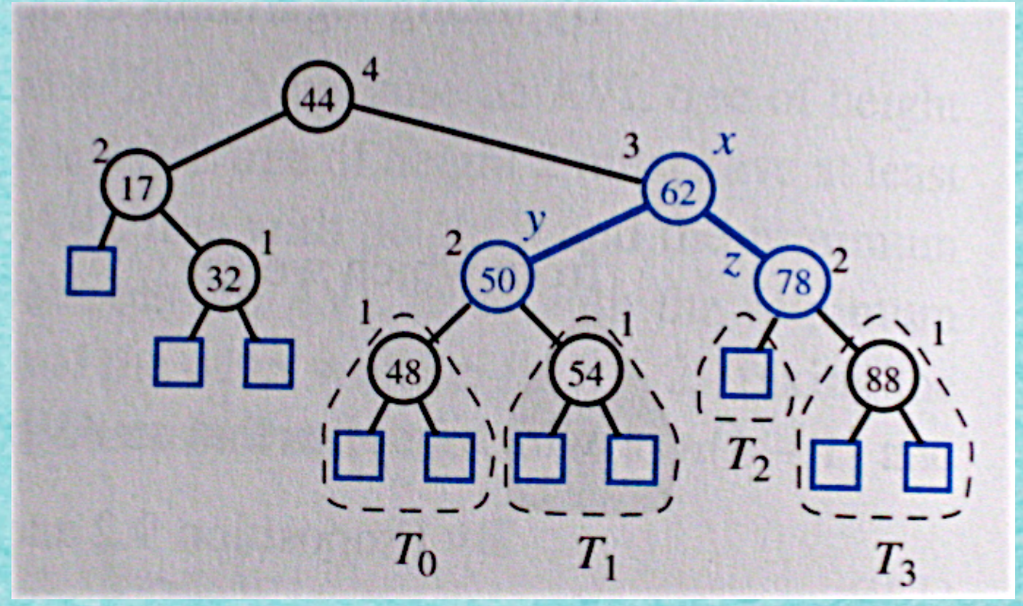
Betrachte jetzt die möglichen Anordnungen von x, y, z!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

Welche Anordnungen gibt es?

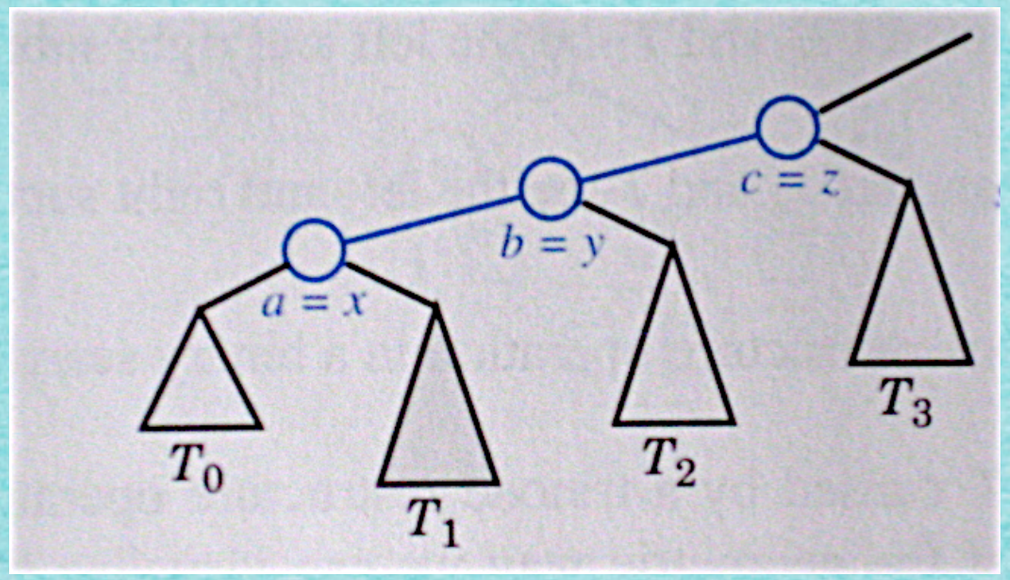
(1) $x \le y \le z$
(2) $x \le z \le y$
(3) $y \le x \le z$
(4) $y \le z \le x$
(5) $z \le x \le y$
(6) $z \le y \le x$

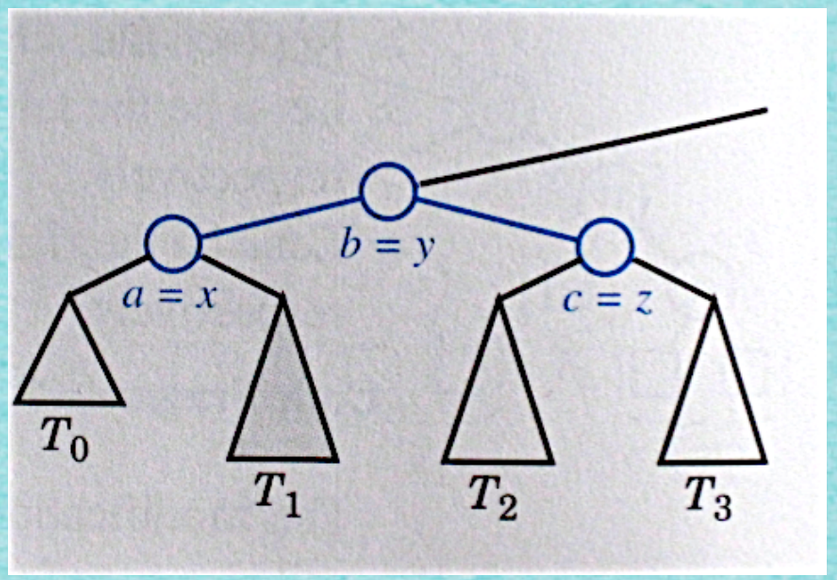




Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(1) $x \le y \le z$

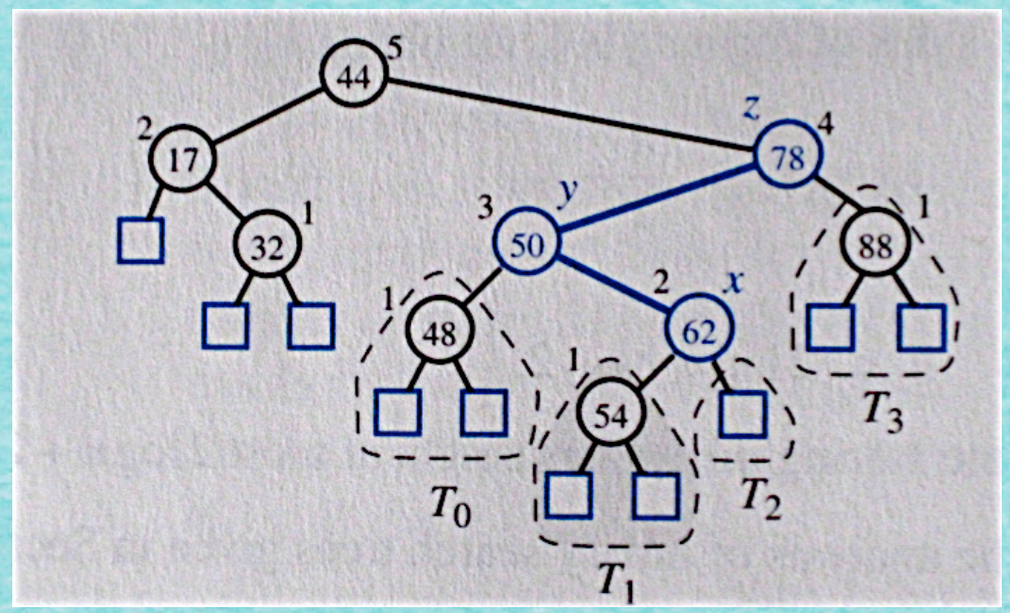




Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

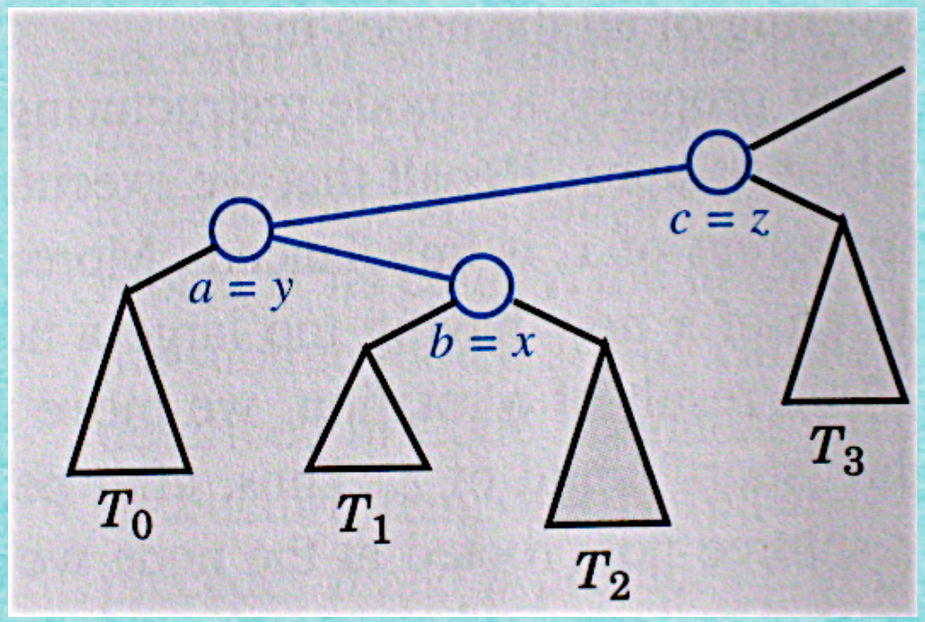
(2) $x \leq z \leq y$

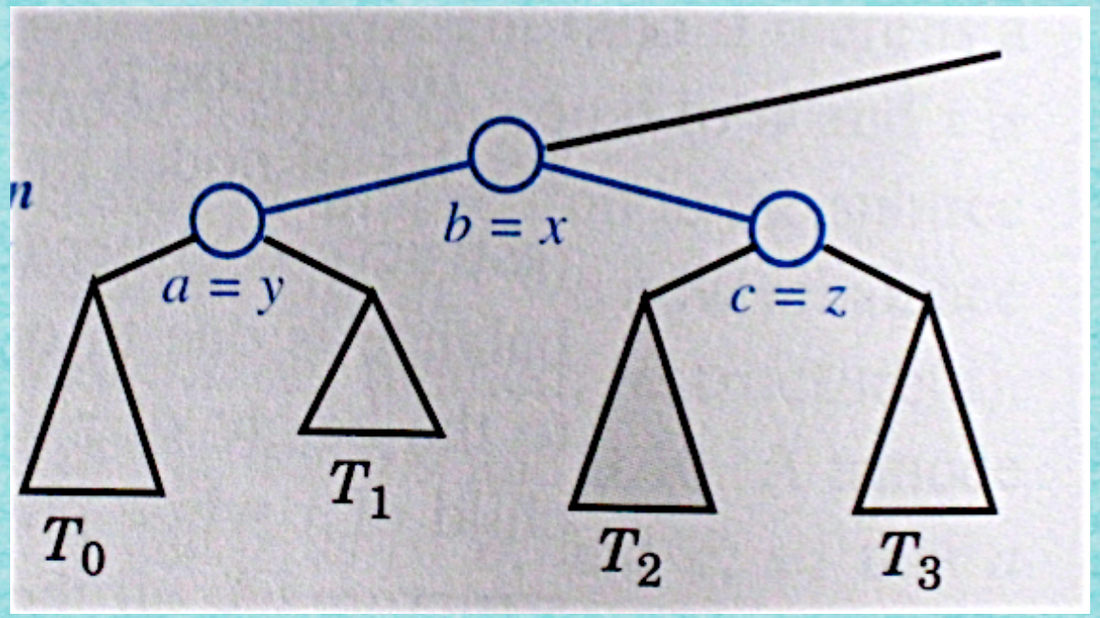


Der Fall kann nicht auftreten!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(3) $y \leq x \leq z$

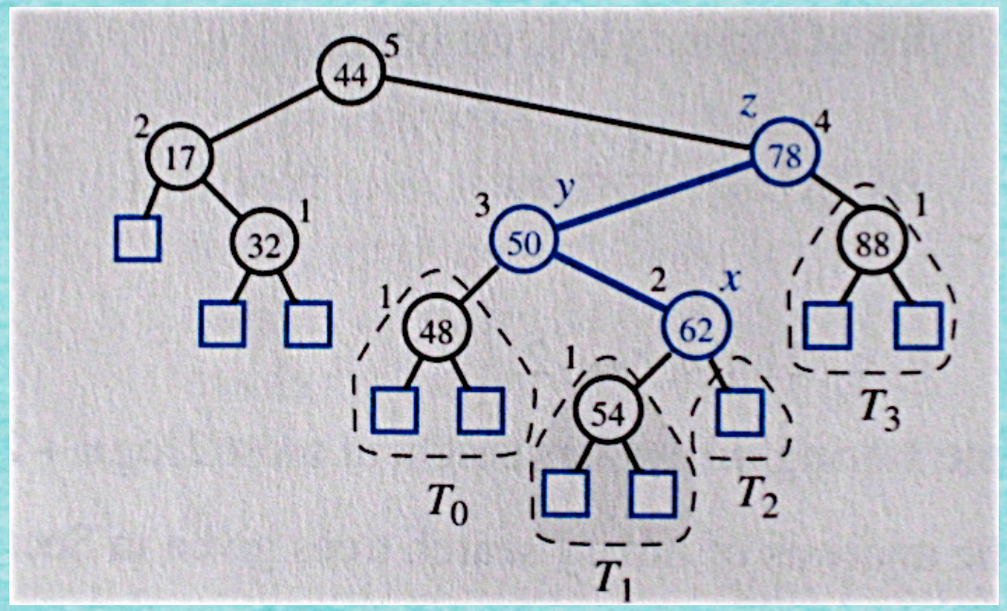




Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

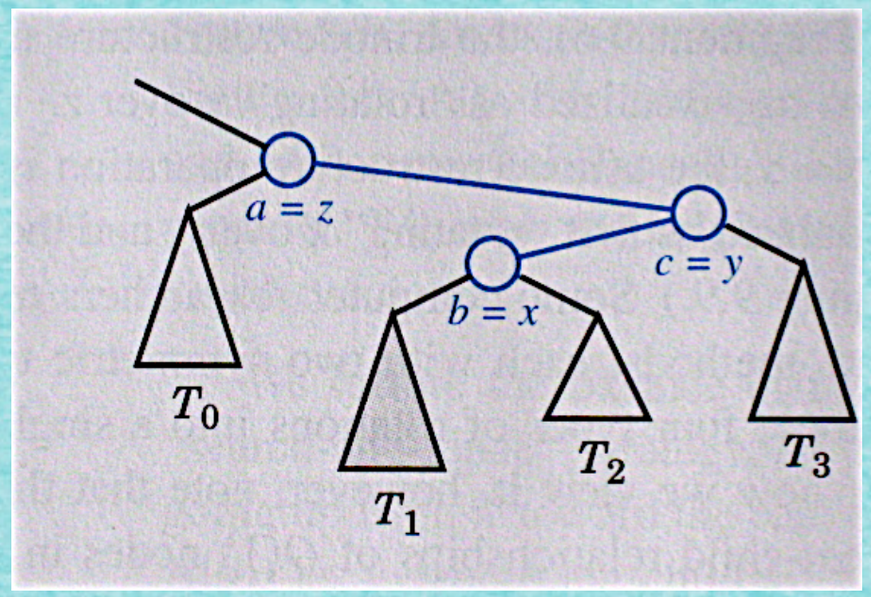
(4) $y \leq z \leq x$

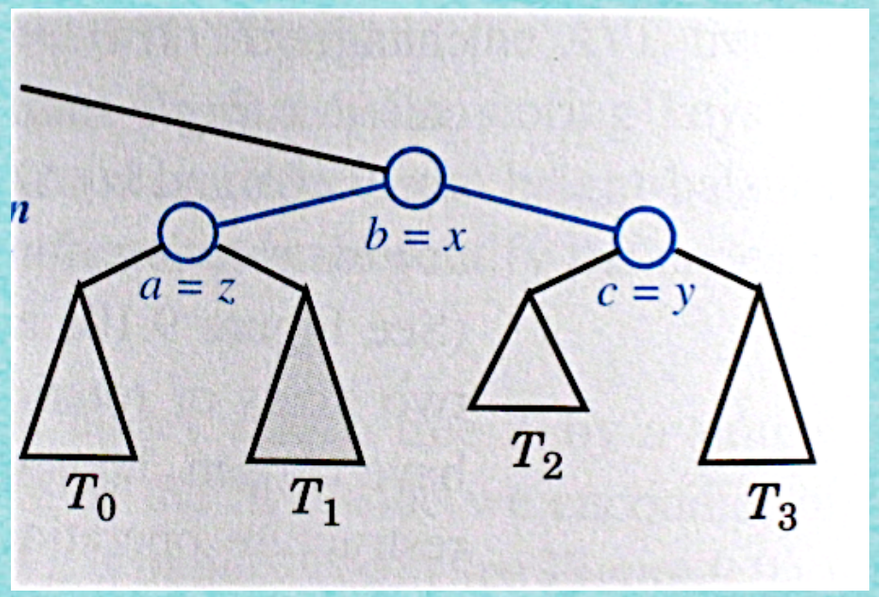


Der Fall kann nicht auftreten!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(5) $z \le x \le y$

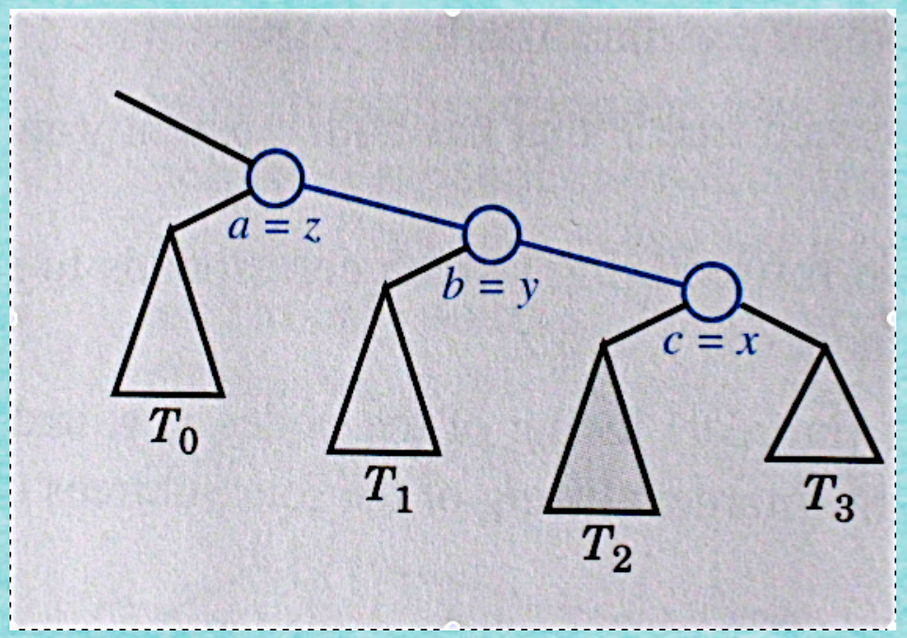


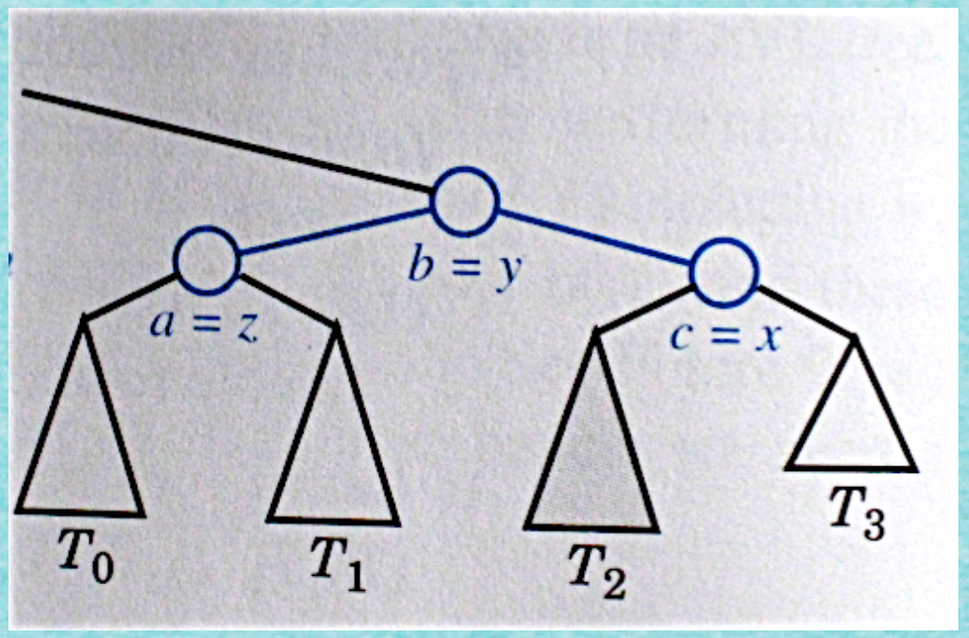


Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

Beweis von Satz 4.10 (Forts.):

(6) $z \leq y \leq x$





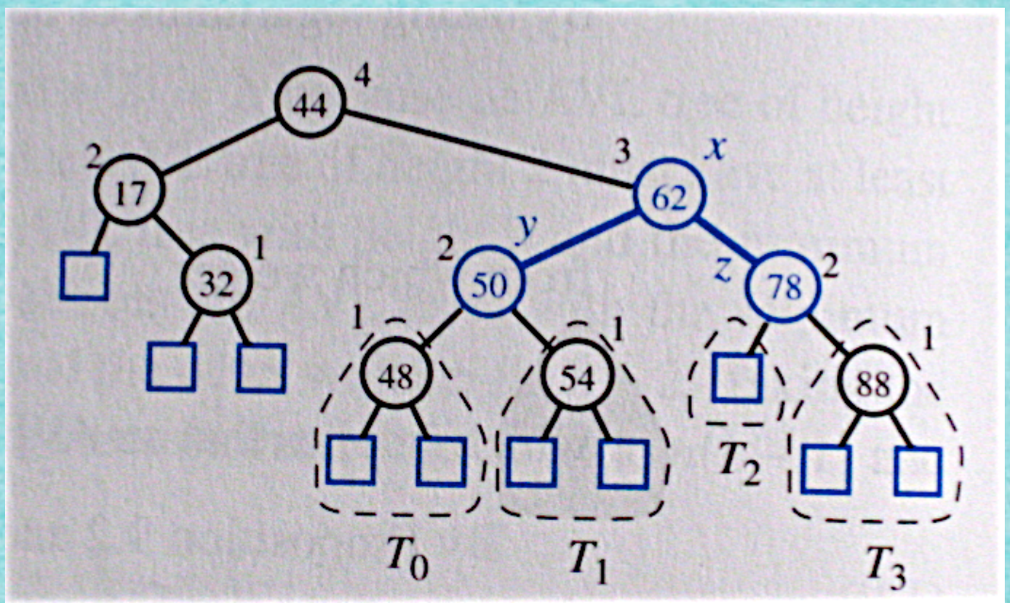
Der Baum ist wieder höhenbalanciert!

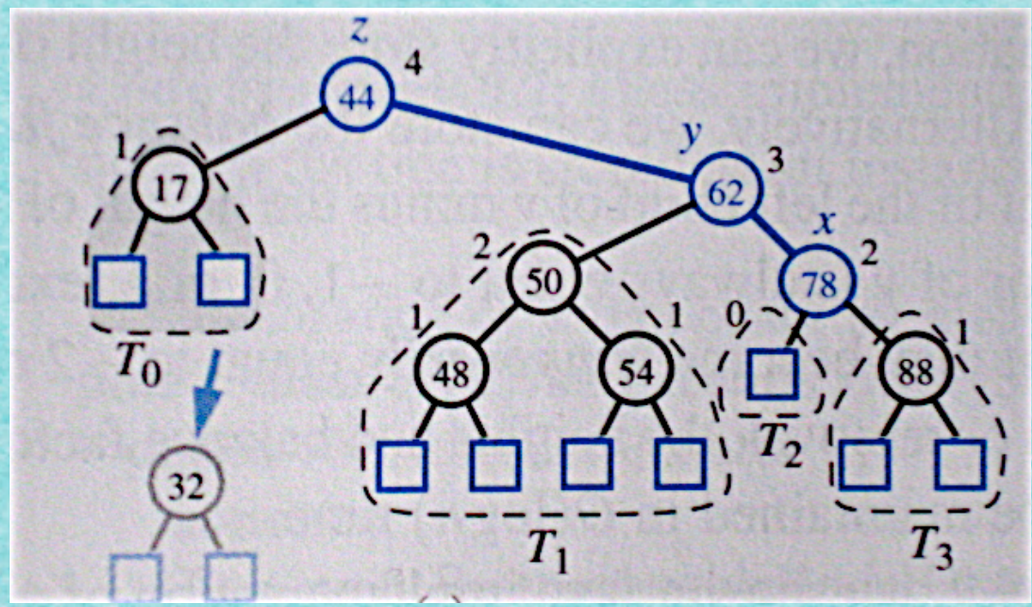
Alle Schritte erfordern nur konstant viele Rechenoperationen.

Löschen („DELETE“)

<u>Aufgabe:</u>

- ***Lösche 32!***

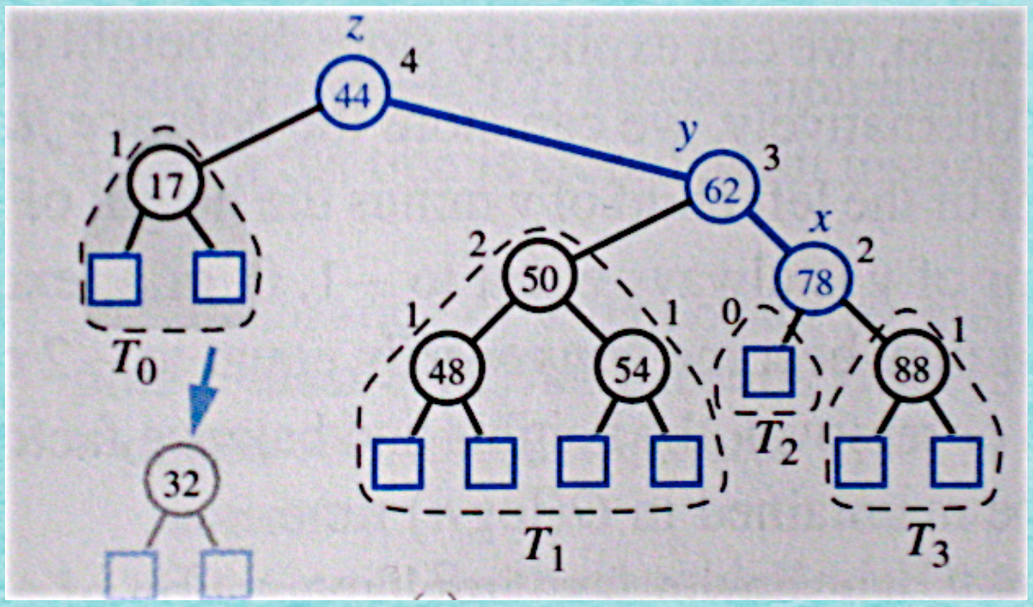


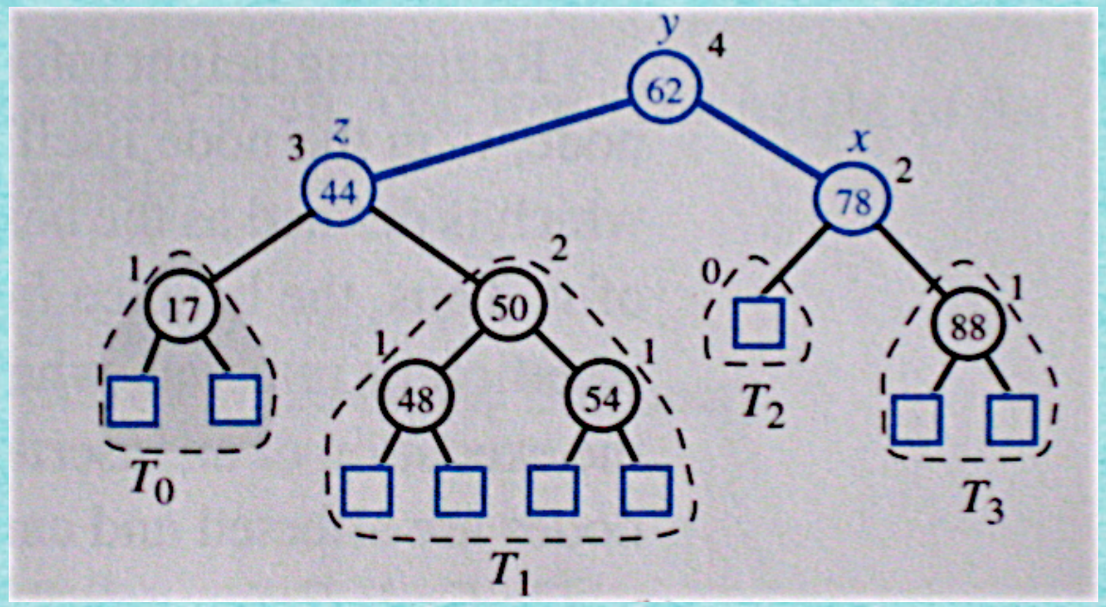


Löschen

Wieder:

- ***Verwende RESTRUCTURE!***





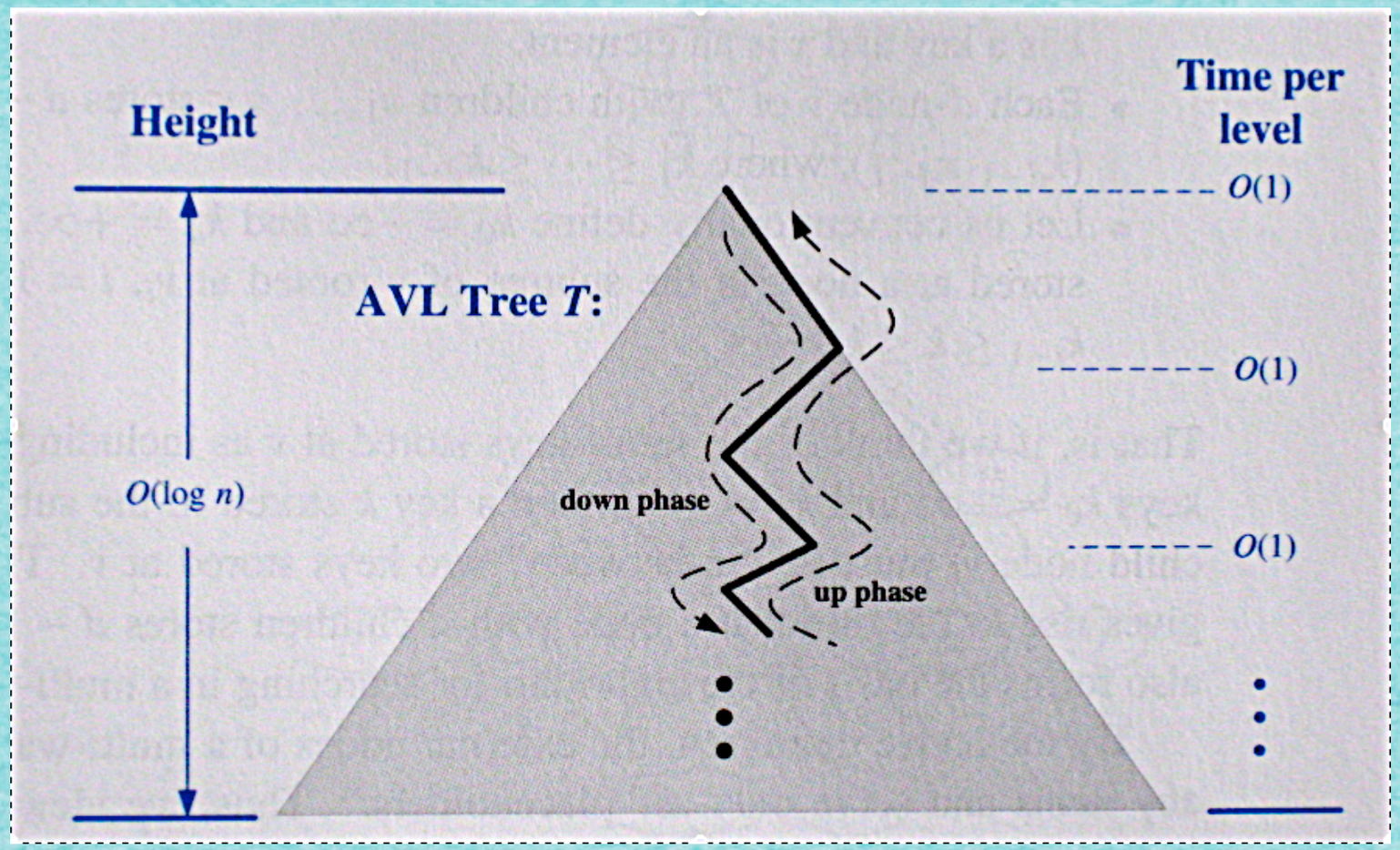
Das reicht in diesem Beispiel!

Allerdings kann im allgemeinen ein neues Problem auftauchen: Der neu höhenbalancierte Teilbaum von b kann niedriger sein als der vorher von z. Dadurch wird eventuell der Vater von z unbalanciert!

Löschen

Wieder:

- ***Verwende RESTRUCTURE!***
- ***Ggf. immer wieder…***

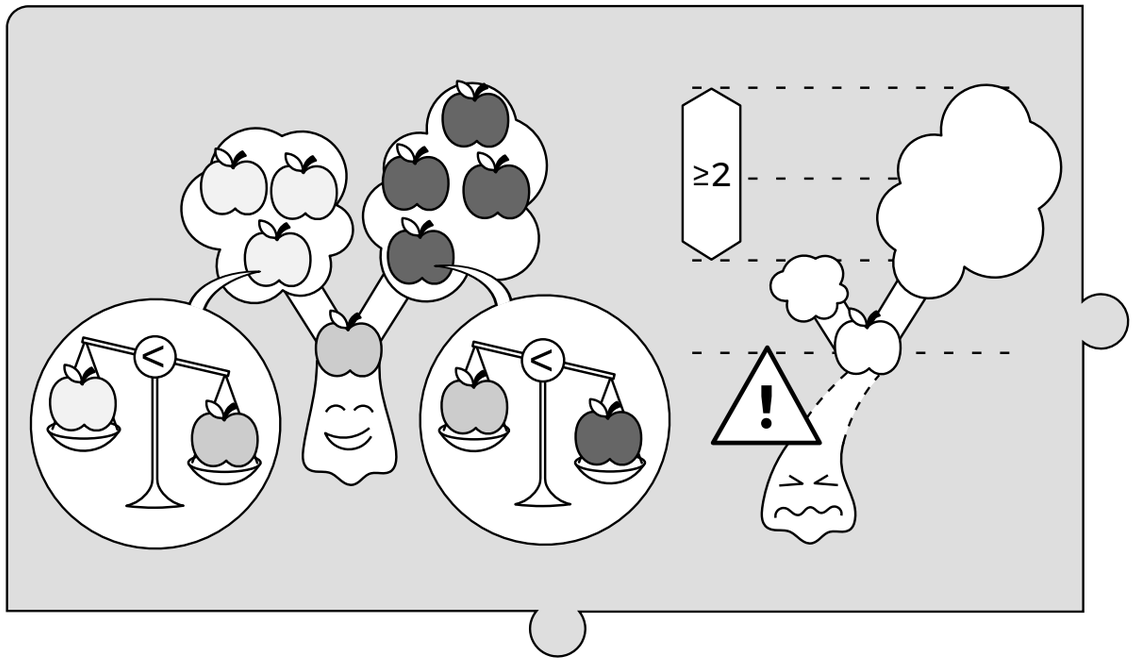


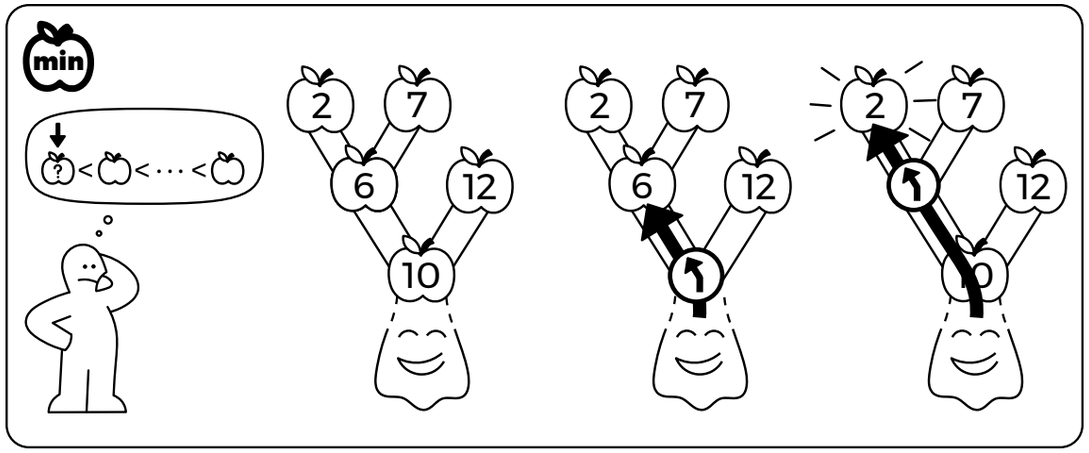
Höchstens O(log n) RESTRUCTURE-Operationen, jeweils in O(1)!

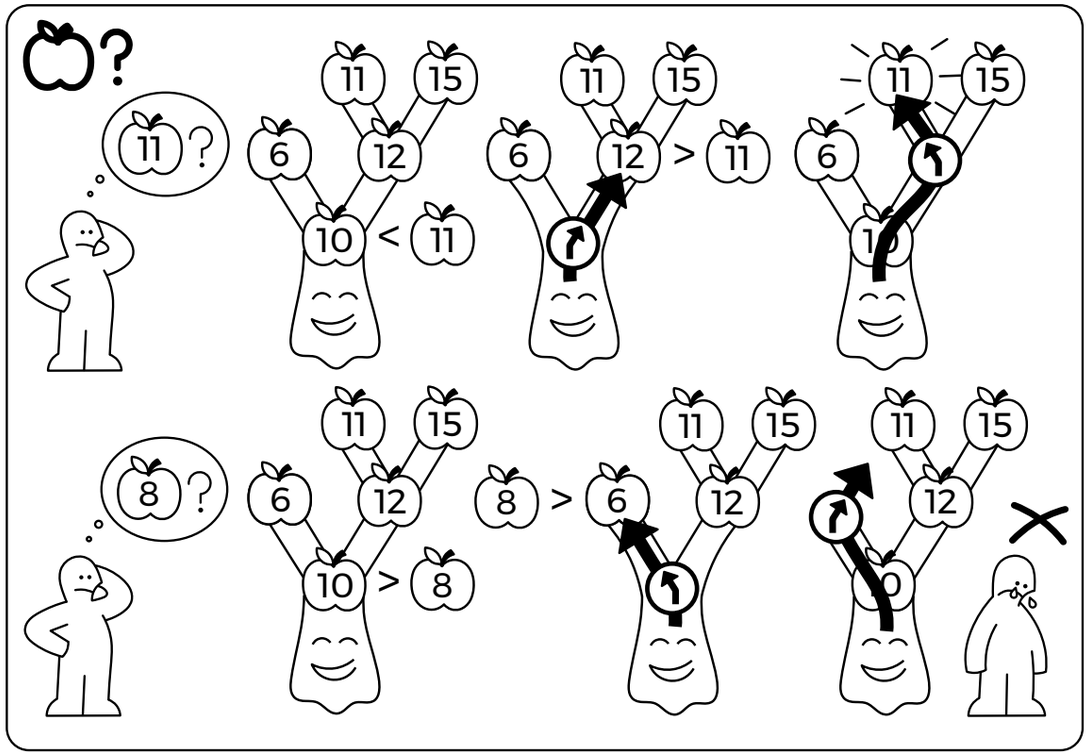
BÄLÄNCE TREE 1/2

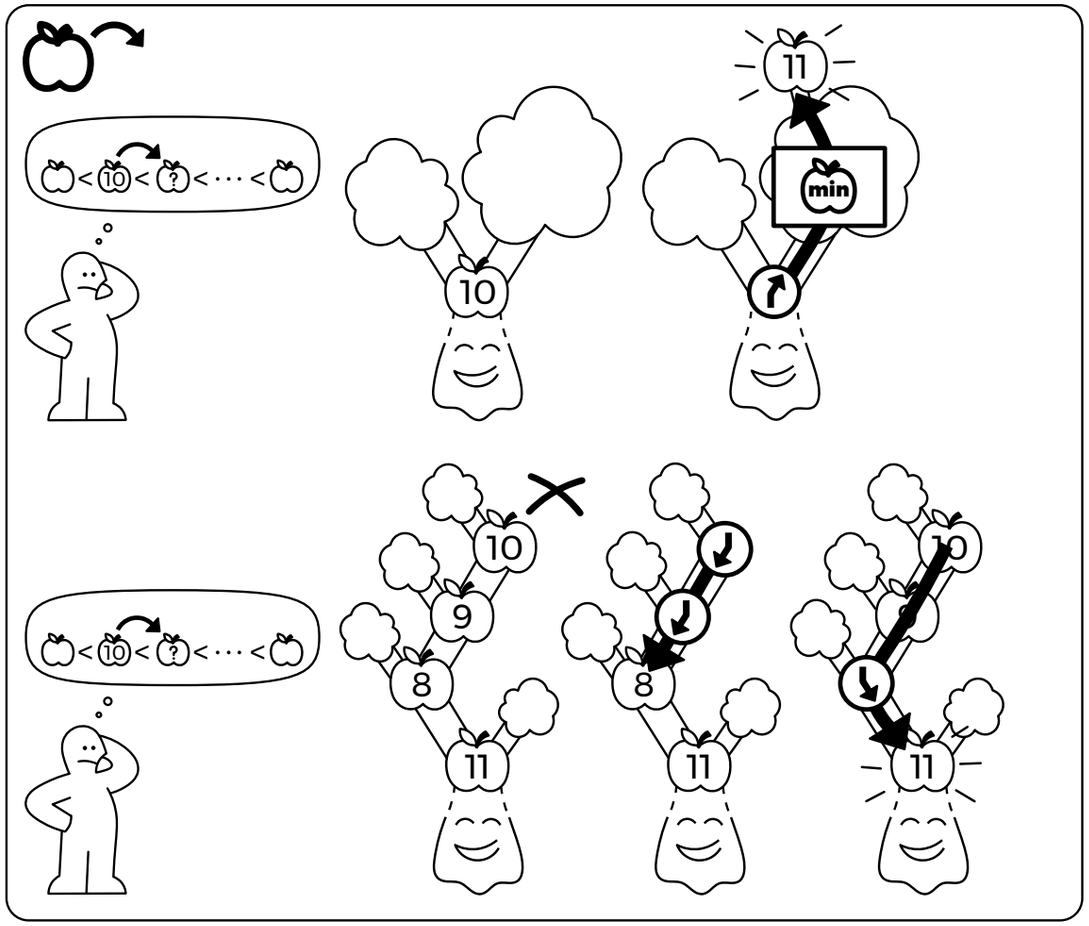
idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA





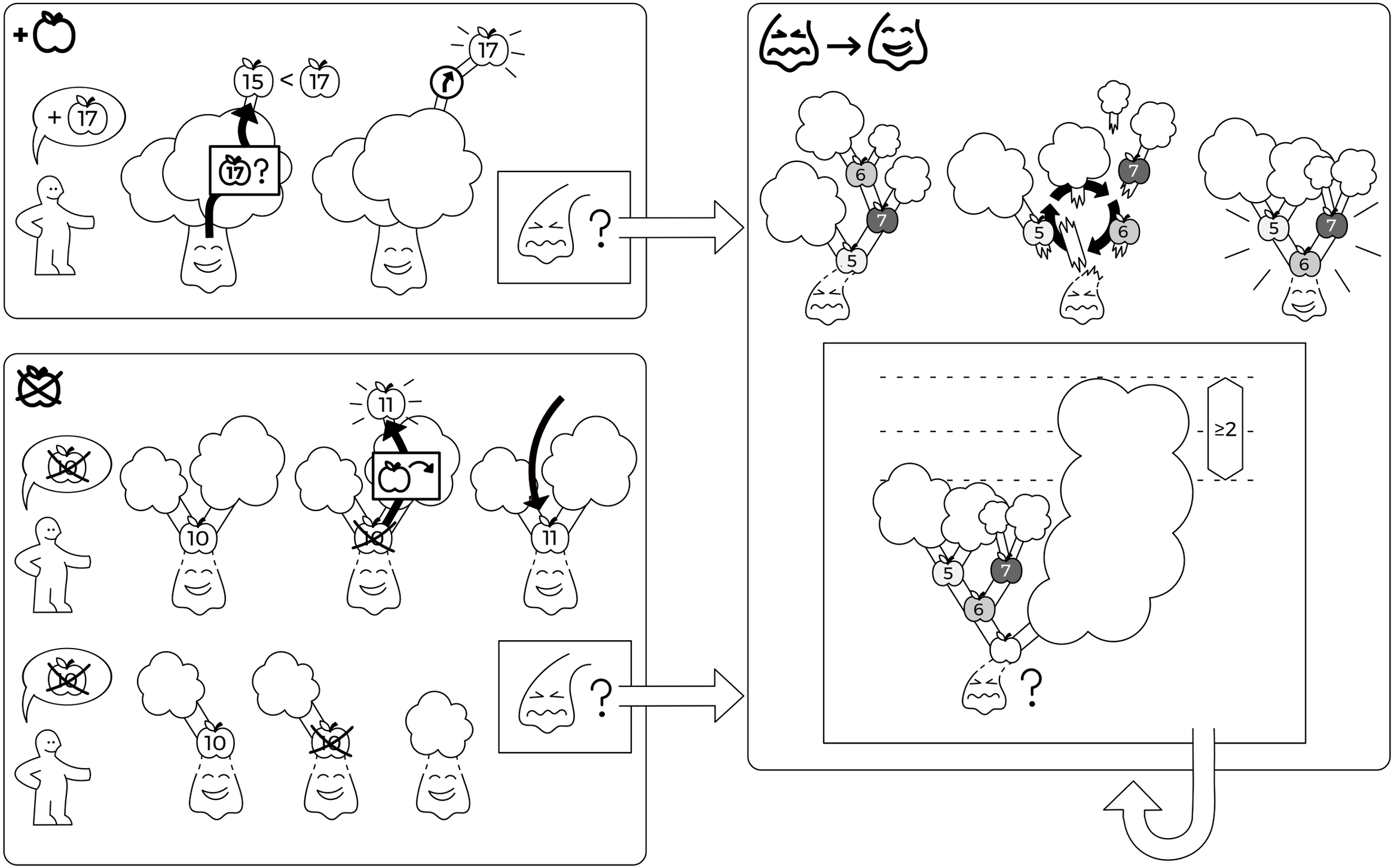


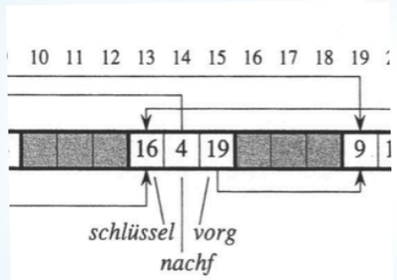


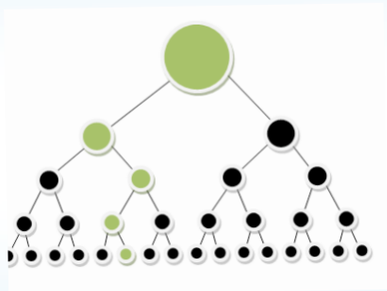
BÄLÄNCE TREE 2/2

idea-instructions.com/avl-tree/
v1.0, CC by-nc-sa 4.0

IDEA





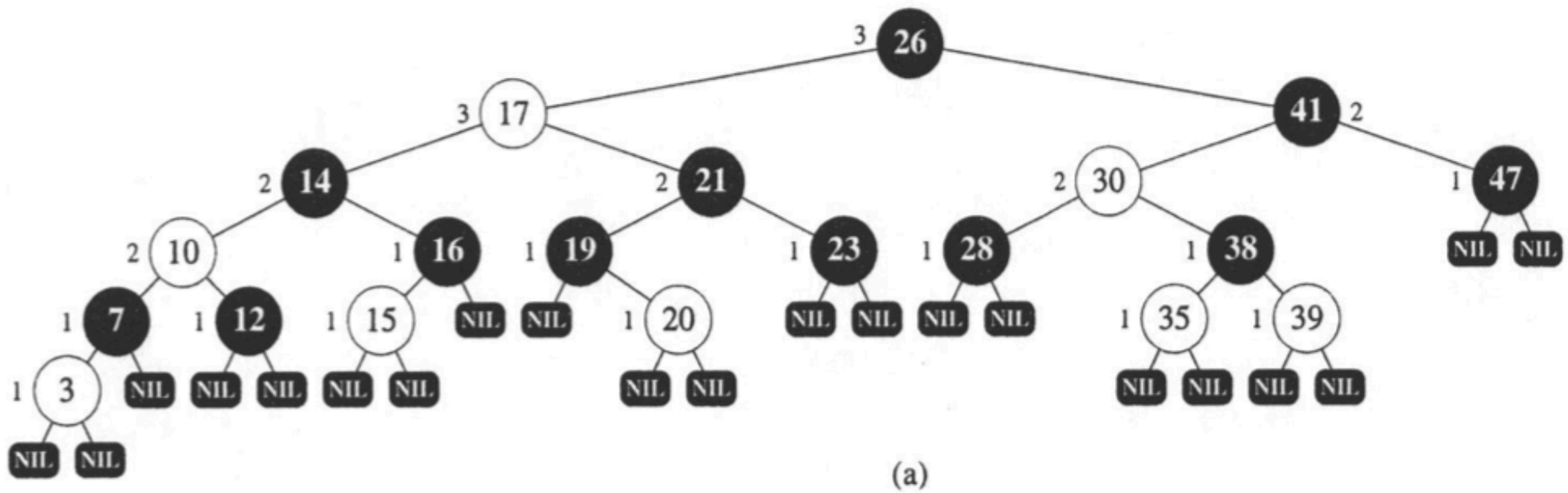


Kapitel 4.8-4.11: Andere dynamische Datenstrukturen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

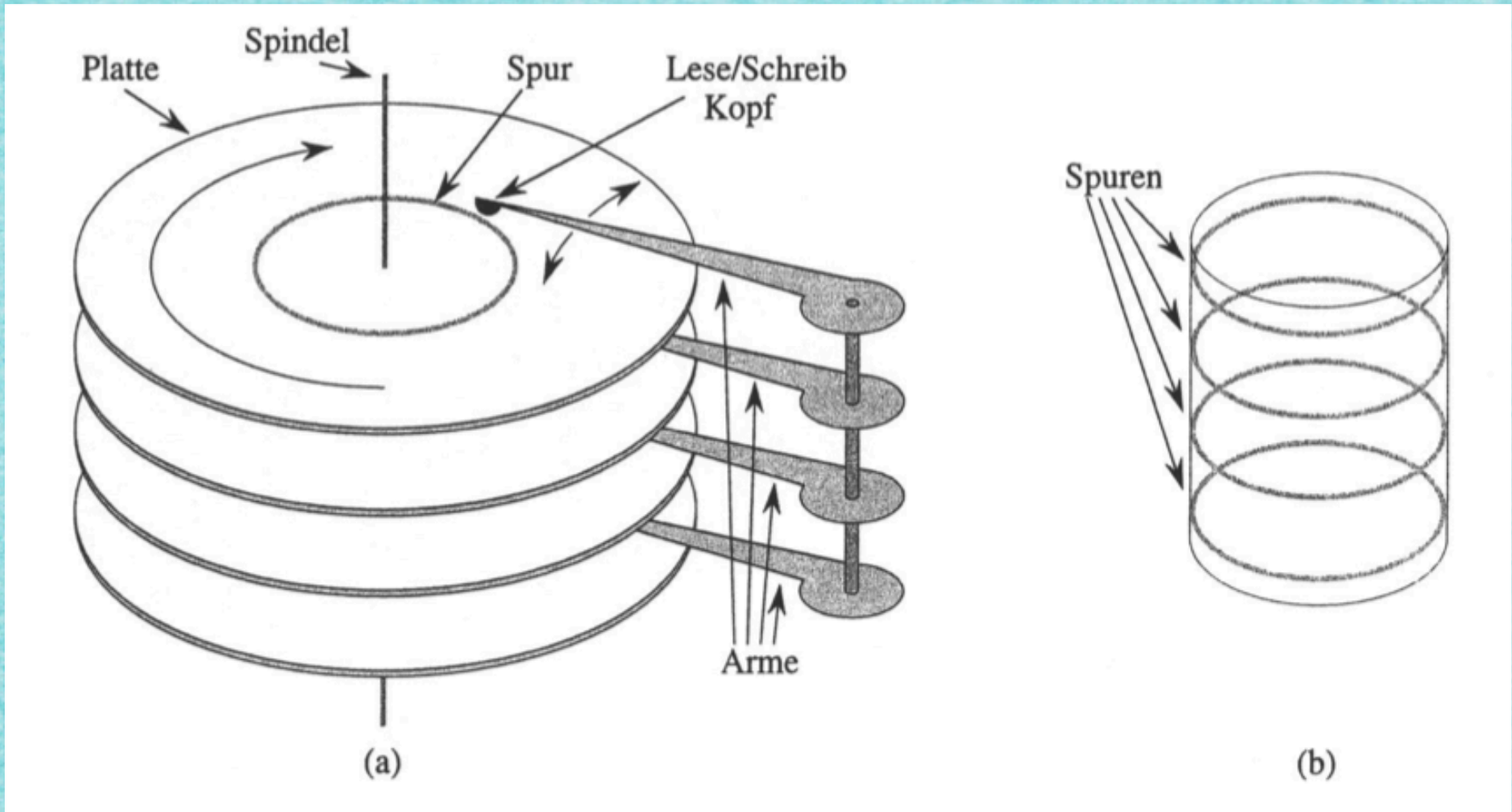
4.8 Rot-Schwarz-Bäume



(a)

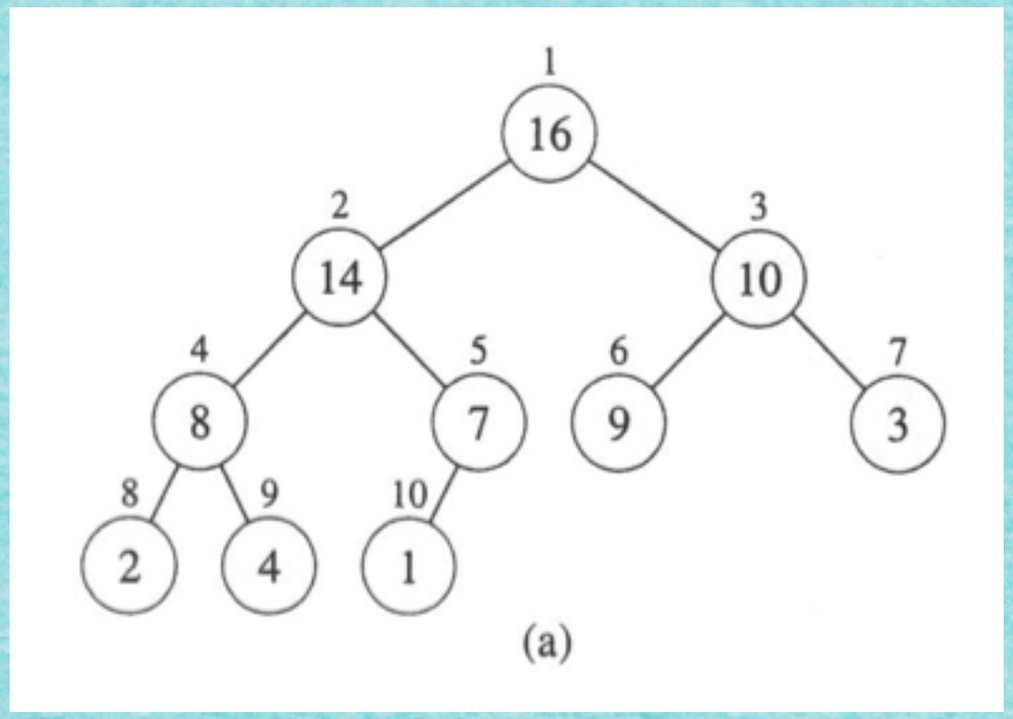
Idee: Verwende "Farben", um den Baum vertikal zu strukturieren und zu balancieren!

4.9 B-Bäume



Kontext: Speicherhierarchien mit unterschiedlich schnellen Zugriffszeiten

4.10 Heaps



Idee: Ordne Baum so, dass
größere Elemente immer oben stehen!

4.11 Andere Strukturen

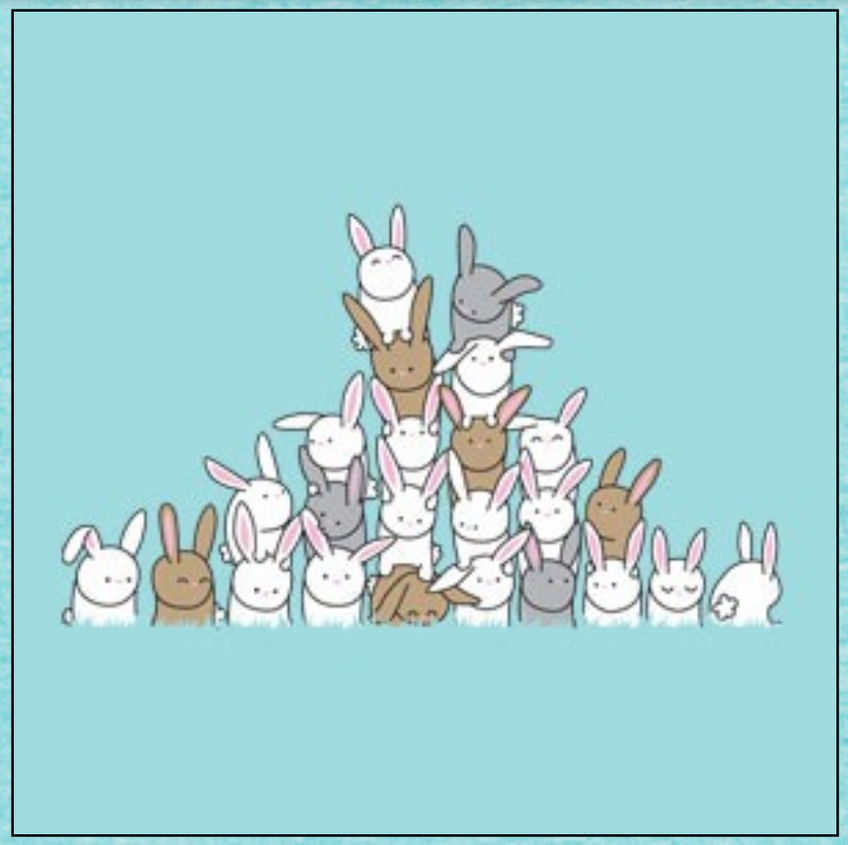
4.11.1 Fibonacci-Heaps:
Heap-Struktur mit sehr schneller *amortisierter* Zugriffszeit.

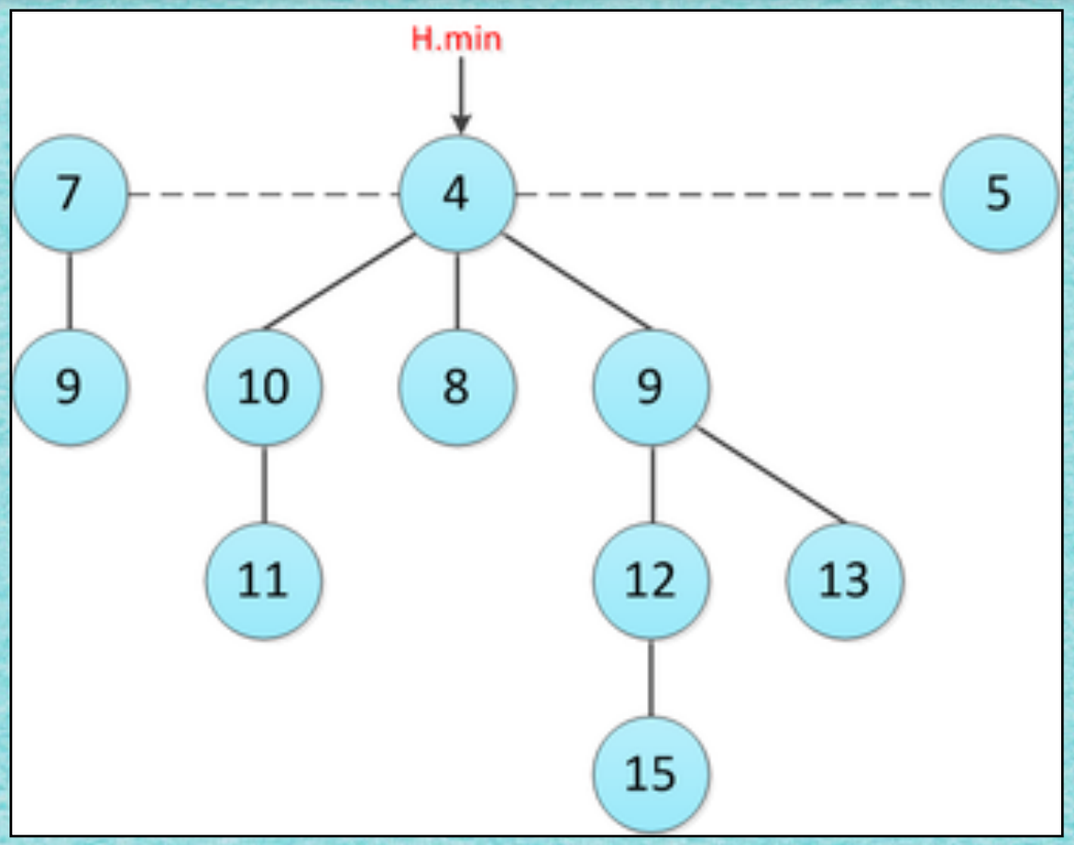
Common Operations	*Effect*	Unsorted Linked List	Self-balancing binary search tree	Binary heap	Binomial heap	Fibonacci heap
insert(data,key)	Adds *data* to the queue, tagged with *key*	O(1)	O(log n)	O(log n)	O(log n)	O(1)
findMin() -> key,data	Returns *key,data* corresponding to min-value *key*	O(n)	O(log n) or O(1) (**)	O(1)	O(log n)[4]	O(1)[1]
deleteMin()	Deletes *data* corresponding to min-value *key*	O(n)	O(log n)	O(log n)	O(log n)	O(log n)*
delete(node)	Deletes *data* corresponding to given *key*, given a pointer to the node being deleted	O(1)	O(log n)	O(log n)	O(log n)	O(log n)*
decreaseKey(node)	Decreases the *key* of a node, given a pointer to the node being modified	O(1)	O(log n)	O(log n)	O(log n)	O(1)*
merge(heap1,heap2) -> heap3	Merges two heaps into a third	O(1)	O(m log(n+m))	O(m + n)	O(log n)***	O(1)

(*)Amortized time
(**)With trivial modification to store an additional pointer to the minimum element
(***)Where n is the size of the larger heap

4.11 Andere Strukturen

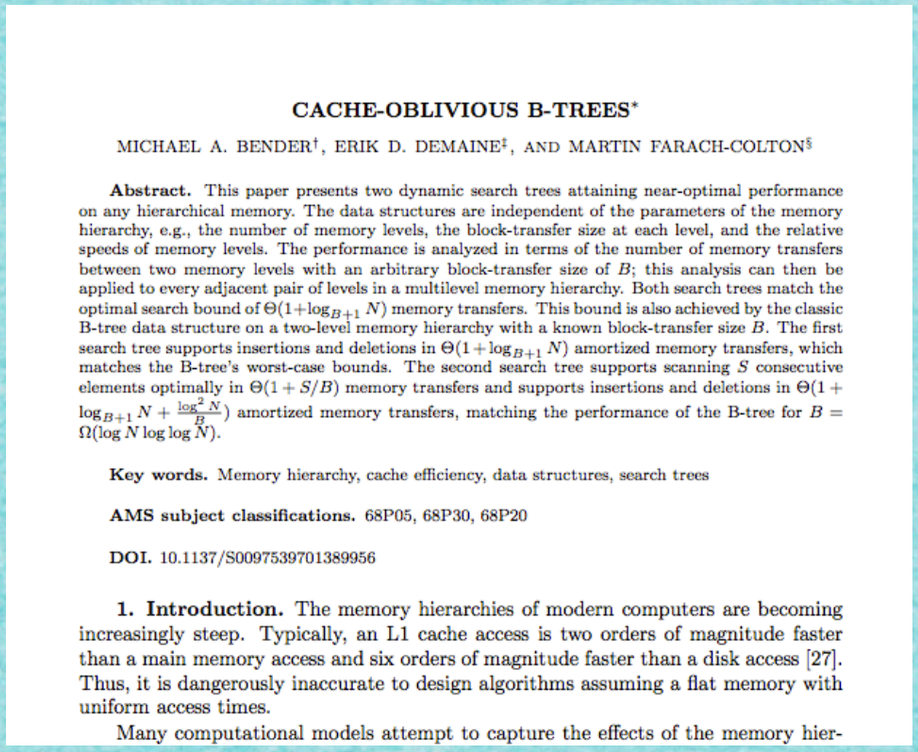
4.11.1 Fibonacci-Heaps:
Heap-Struktur mit sehr schneller *amortisierter* Zugriffszeit.





4.11 Andere Strukturen

4.11.2 Cache-Oblivious B-Trees: Umgang mit großen Datenmengen bei unbekannter Cache-Größe



CACHE-OBLIVIOUS B-TREES*

MICHAEL A. BENDER†, ERIK D. DEMAINE‡, AND MARTIN FARACH-COLTON§

Abstract. This paper presents two dynamic search trees attaining near-optimal performance on any hierarchical memory. The data structures are independent of the parameters of the memory hierarchy, e.g., the number of memory levels, the block-transfer size at each level, and the relative speeds of memory levels. The performance is analyzed in terms of the number of memory transfers between two memory levels with an arbitrary block-transfer size of B; this analysis can then be applied to every adjacent pair of levels in a multilevel memory hierarchy. Both search trees match the optimal search bound of $\Theta(1+\log_{B+1} N)$ memory transfers. This bound is also achieved by the classic B-tree data structure on a two-level memory hierarchy with a known block-transfer size B. The first search tree supports insertions and deletions in $\Theta(1+\log_{B+1} N)$ amortized memory transfers, which matches the B-tree's worst-case bounds. The second search tree supports scanning S consecutive elements optimally in $\Theta(1+S/B)$ memory transfers and supports insertions and deletions in $\Theta(1+\log_{B+1} N+\frac{\log^2 N}{B})$ amortized memory transfers, matching the performance of the B-tree for $B=\Omega(\log N \log\log N)$.

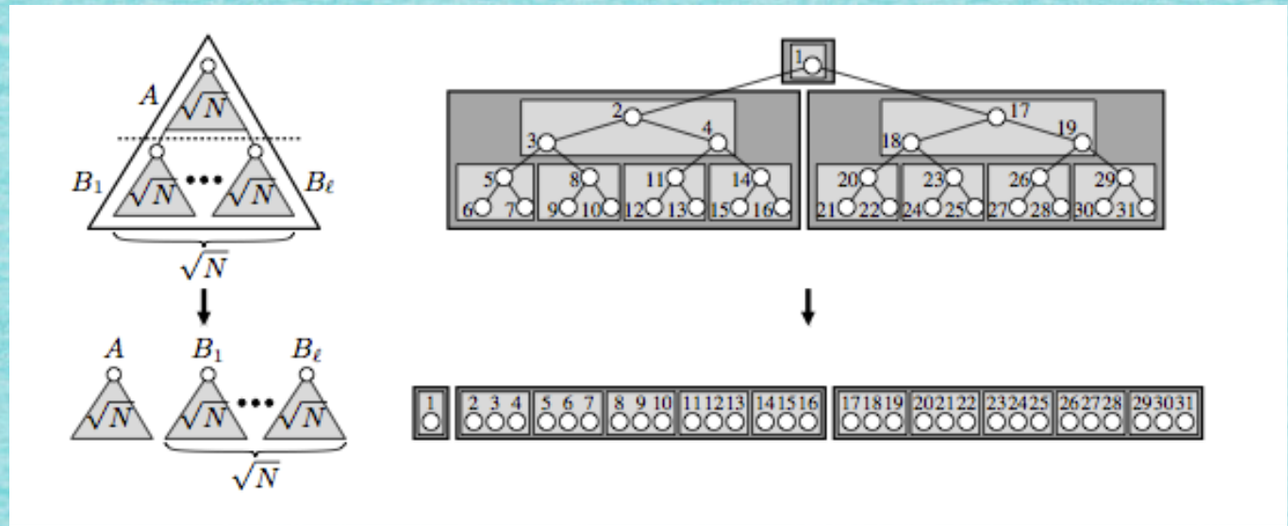
Key words. Memory hierarchy, cache efficiency, data structures, search trees

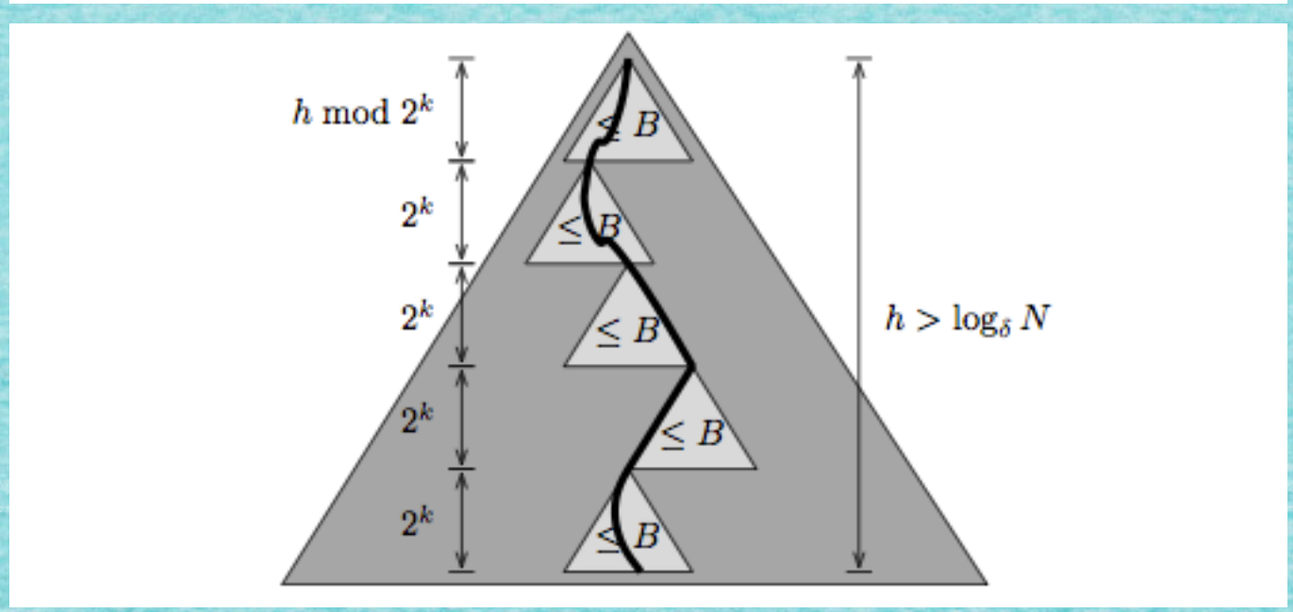
AMS subject classifications. 68P05, 68P30, 68P20

DOI. 10.1137/S0097539701389956

1. Introduction. The memory hierarchies of modern computers are becoming increasingly steep. Typically, an L1 cache access is two orders of magnitude faster than a main memory access and six orders of magnitude faster than a disk access [27]. Thus, it is dangerously inaccurate to design algorithms assuming a flat memory with uniform access times.

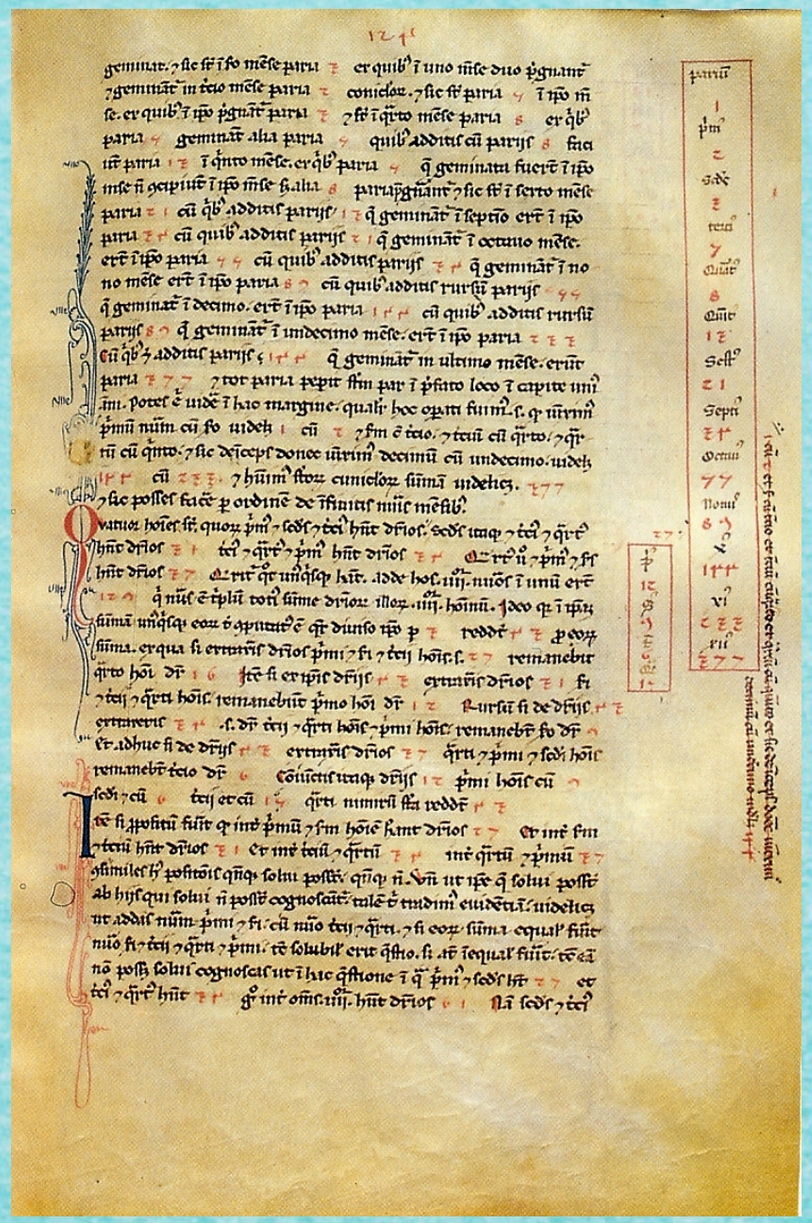
Many computational models attempt to capture the effects of the memory hier-





4.7 Fibonacci-Zahlen

Leonardo da Pisa,
gen. Fibonacci
1180-1241



Zusammenfassung Kapitel 4!

Kapitel 5: Sortieren

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

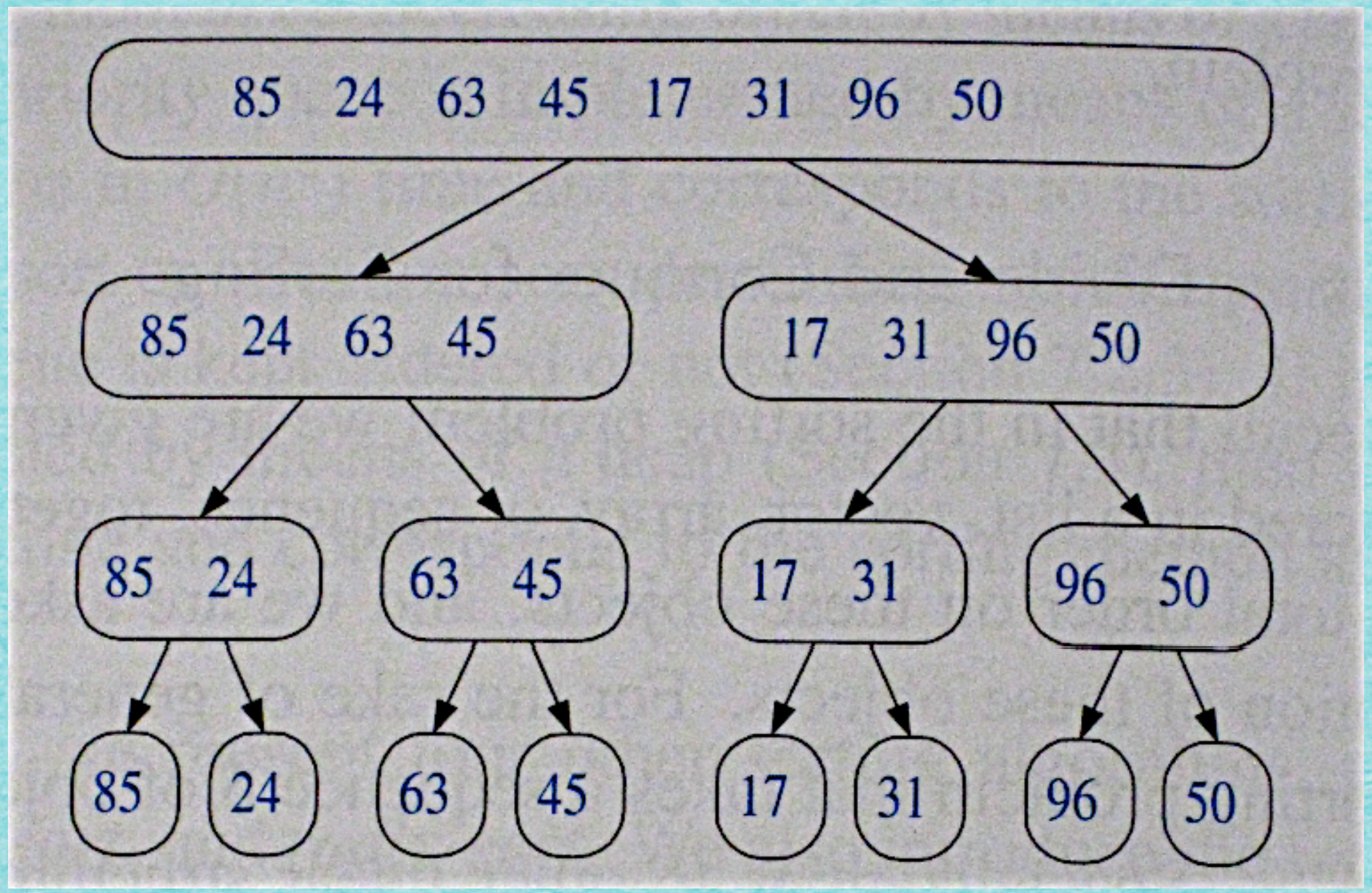
23 17 13 19 33 28 15

Zahl der Vergleiche: $O(n^2)$

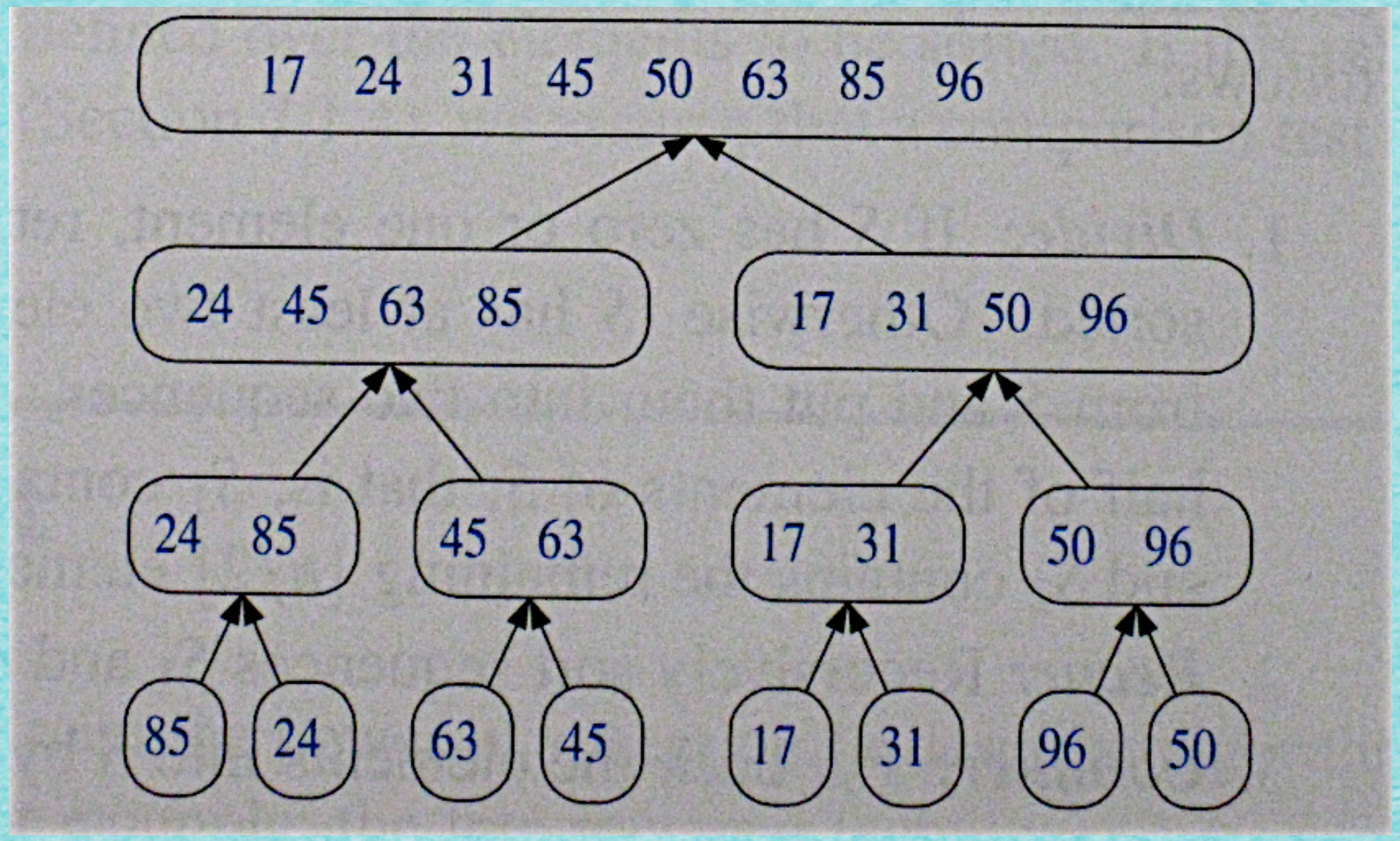
Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

„Geht's nicht noch etwas schneller?"

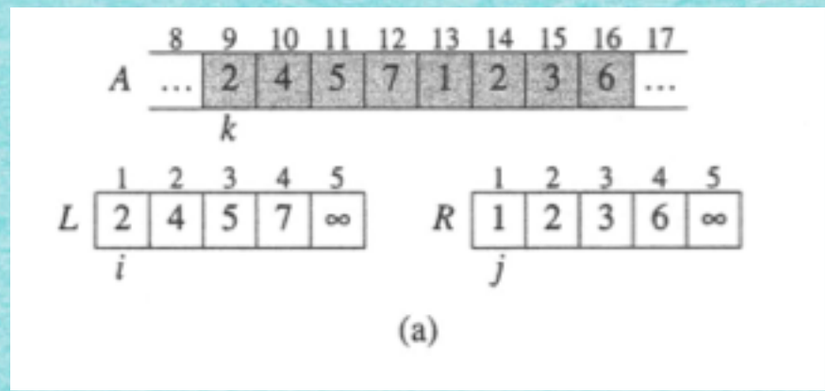
5.2 Mergesort



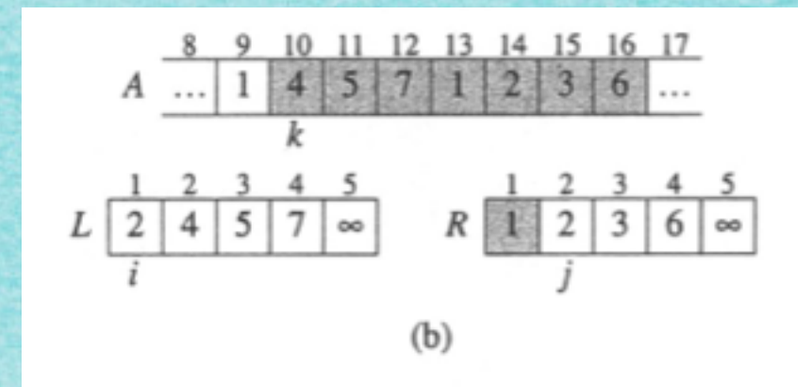
5.2 Mergesort



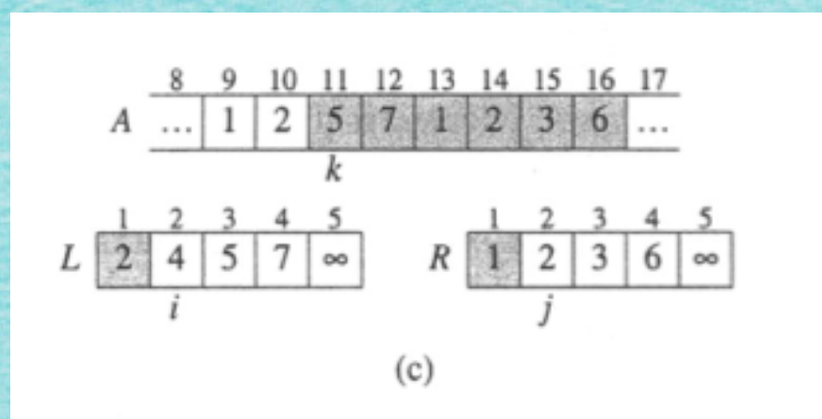
5.2 Mergesort



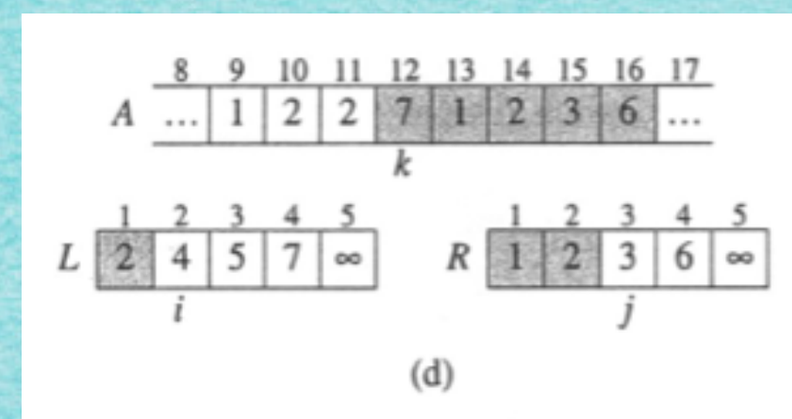
(a)



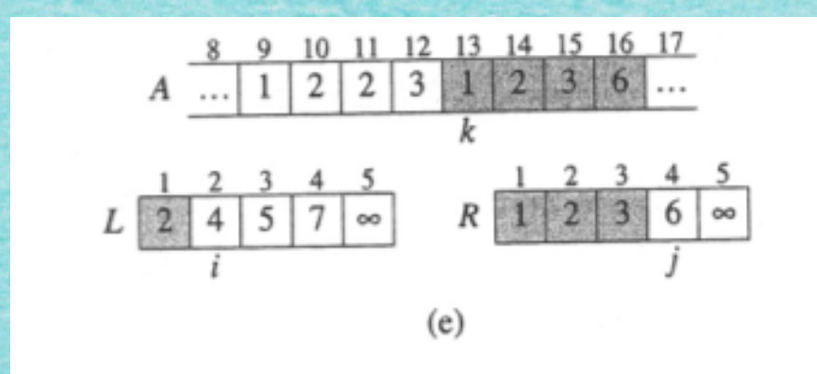
(b)



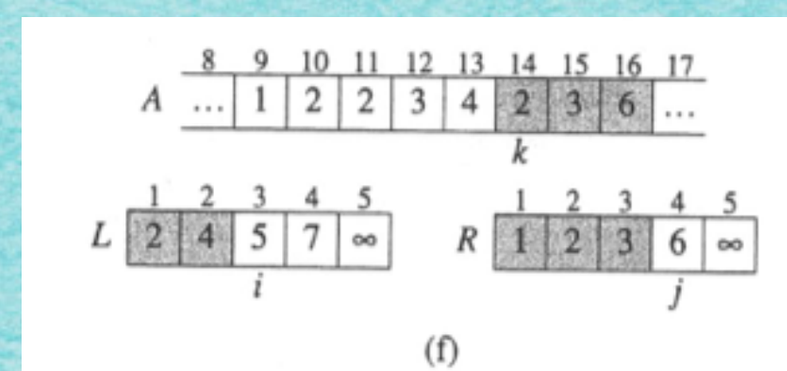
(c)



(d)



(e)



(f)

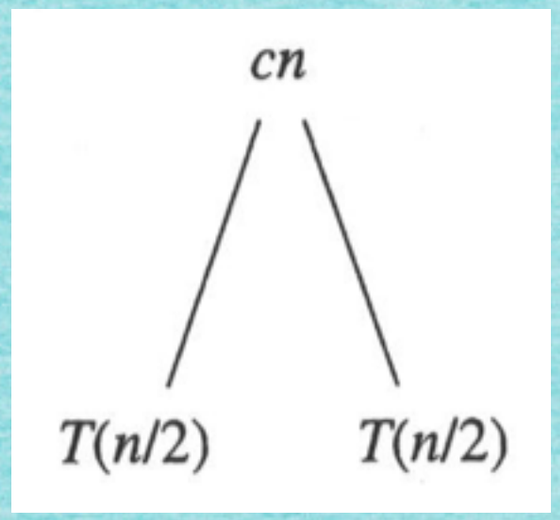
5.2.3 Laufzeit von Mergesort

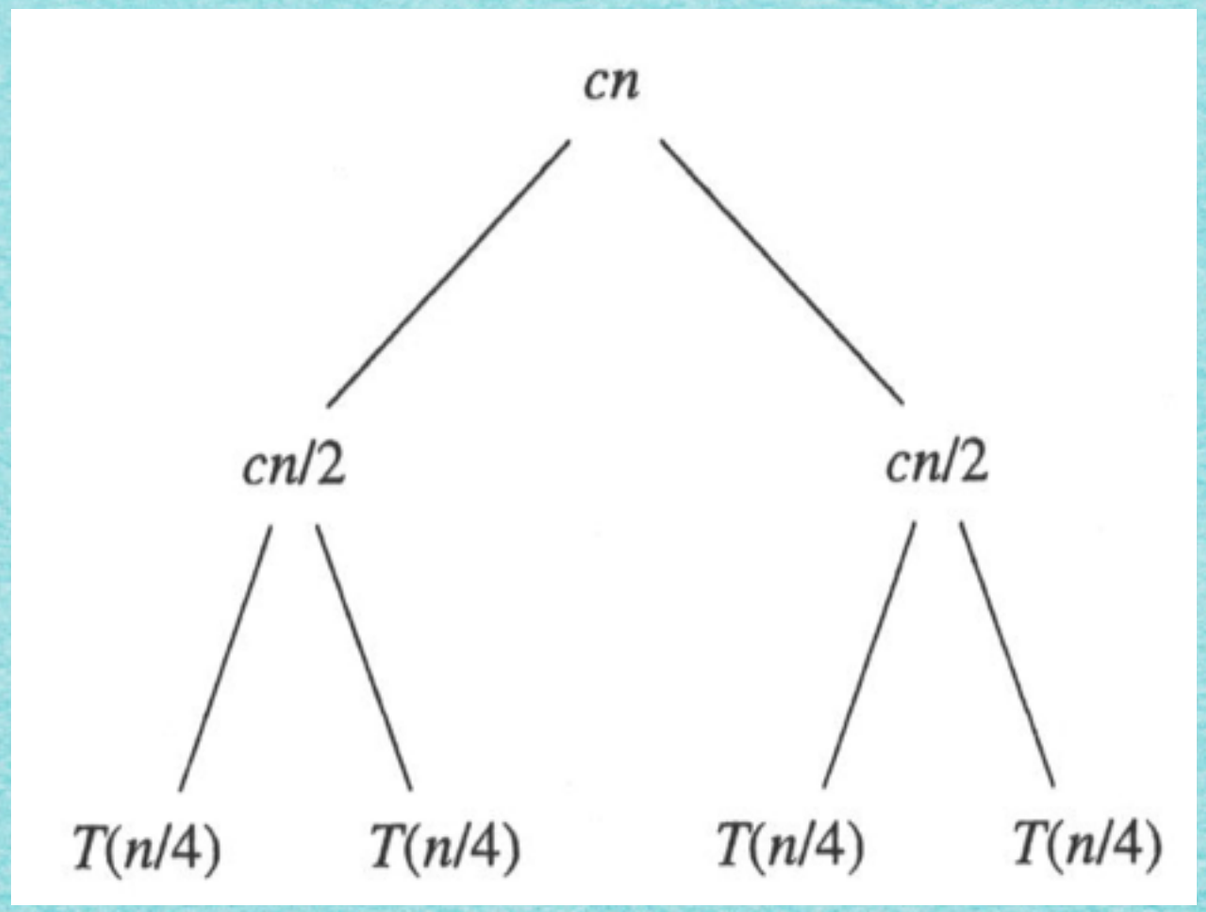
Wie viele Schritte benötigt Merge-Sort für einen Array der Länge n?

$T(n)$

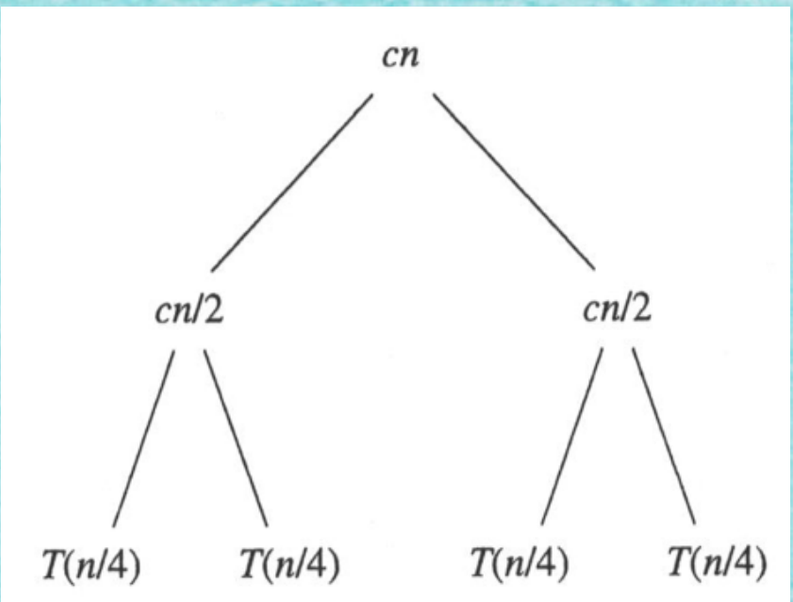
5.1.3 Laufzeit von Mergesort

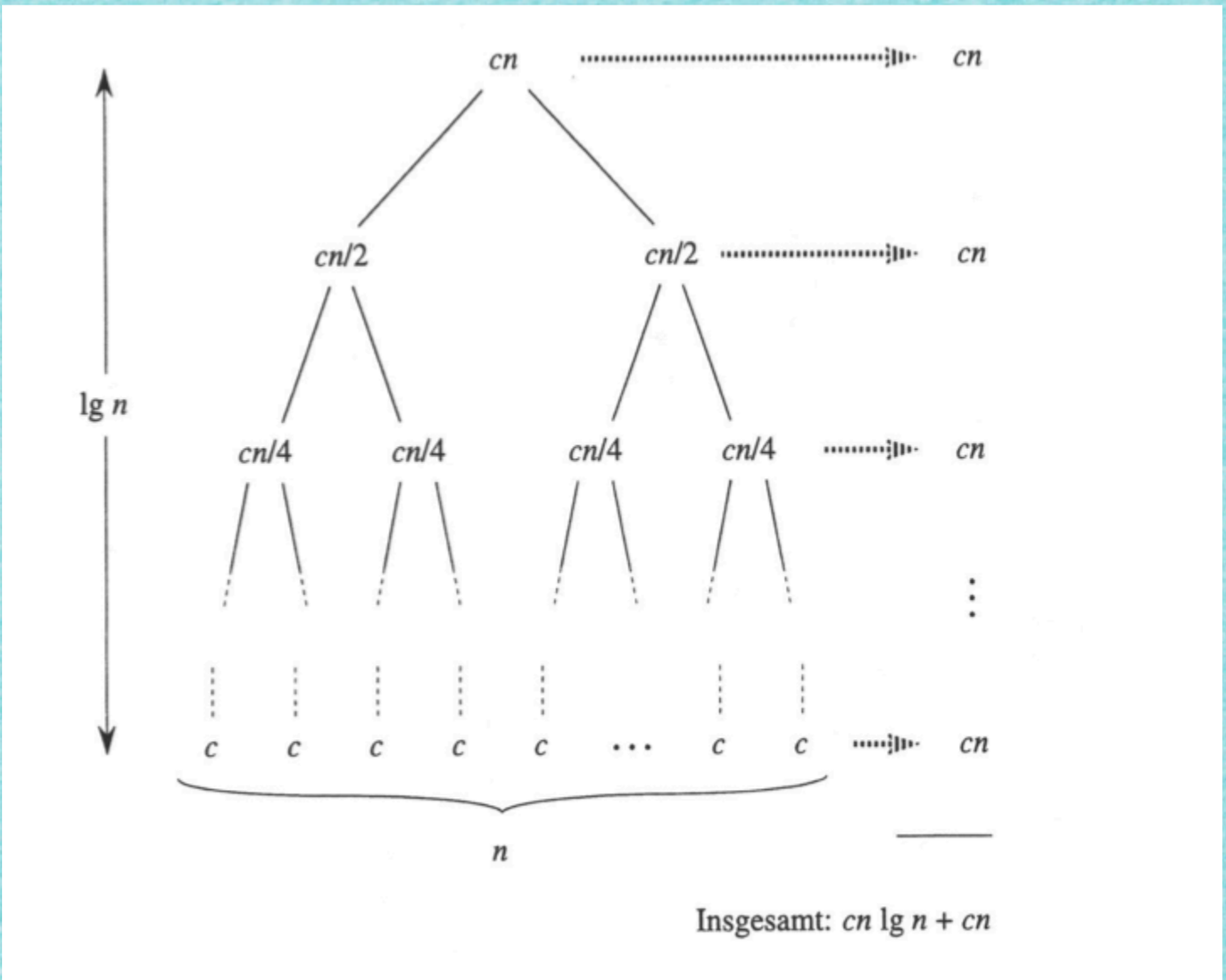
$T(n)$





5.2.3 Laufzeit von Mergesort





5.2.3 Laufzeit von Mergesort

<u>Satz 5.7 (Komplexität von Mergesort)</u>
Für einen n-elementigen Array A hat Mergesort eine Laufzeit von O(n log n).

Satz 5.6. *Für n Objekte $x_1, \ldots, x_n$*

benötigt man zum Sortieren mindestens $\Omega(n \log(n))$,

wenn man die Objekte nur paarweise vergleichen kann.

Kapitel 5.3: Behandeln von Rekursionen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

5.3.1 Substitutionsmethode

5.3 Behandeln von Rekursionen

Welche Möglichkeiten gibt es, Rekursionsgleichungen zu lösen?

5.3.1 Substitutionsmethode

Wie gesehen!

(1) Rate eine Lösung.

(2) Beweise die Richtigkeit per Vollständiger Induktion.

Das haben wir im Beweis von SATZ 5.7 angewendet.

Schwierigkeit: Gute Lösung finden!

(In der Regel ist man an einer möglichst genauen Lösung interessiert – das kann schwer bis unmöglich sein!)

Oft kann man aber Abschätzungen gewinnen, z.B.

$$T(n) \in \Omega(n)$$

$$T(n) \in O(n^2)$$

5.3.2 Erzeugende Funktionen

5.3.2 Erzeugende Funktionen

Man kann Rekursionen auch oft lösen, indem man sie in einen abstrakt-formalen Kontext einbettet und die dafür bekannten Rechenregeln anwendet.

Dafür betrachten wir

(36)

DEFINITION 5.8 (Erzeugende Funktion)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $a_n \in \mathbb{R}$.

Dann heißt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

die (gewöhnliche) erzeugende Funktion von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel

(a) $a_n = 2a_{n-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$a_0 = 1$

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$

5.3.2 Erzeugende Funktionen

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \bar{\varphi}^n \right)$$

bzw. (ganz explizit!)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

5.3.3 Master-Theorem: Lineare Rekursionen

Satz 5.9 (Master-Theorem)

Sei $T: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$: $0 < \alpha_i < 1$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) \text{ mit } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^c = 1 & \text{für } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

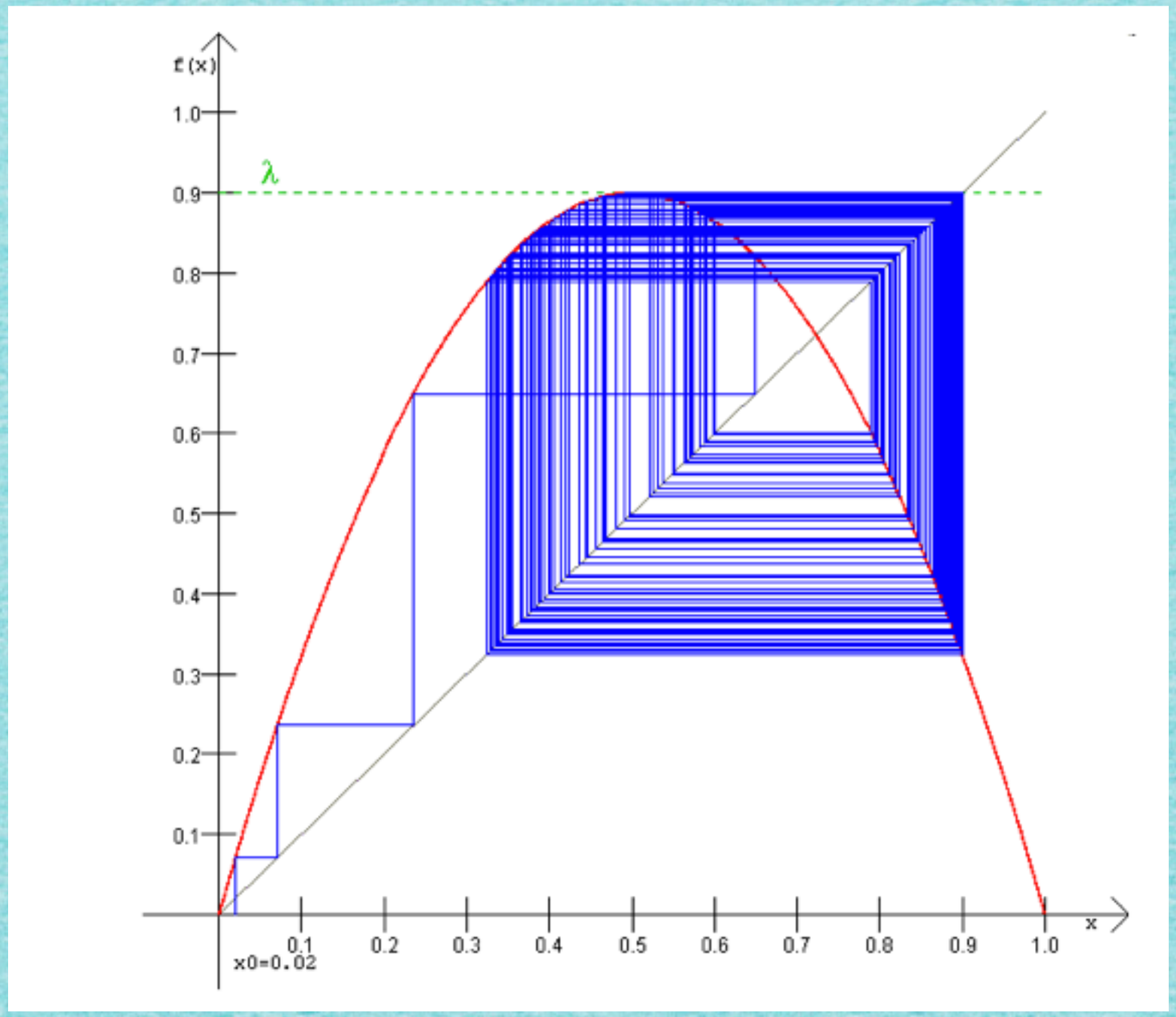
Kapitel 5.4: Nichtlineare Rekursionen

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

5.4.1 Logistische Rekursion

Keinerlei Fixpunkte - deterministisches Chaos:

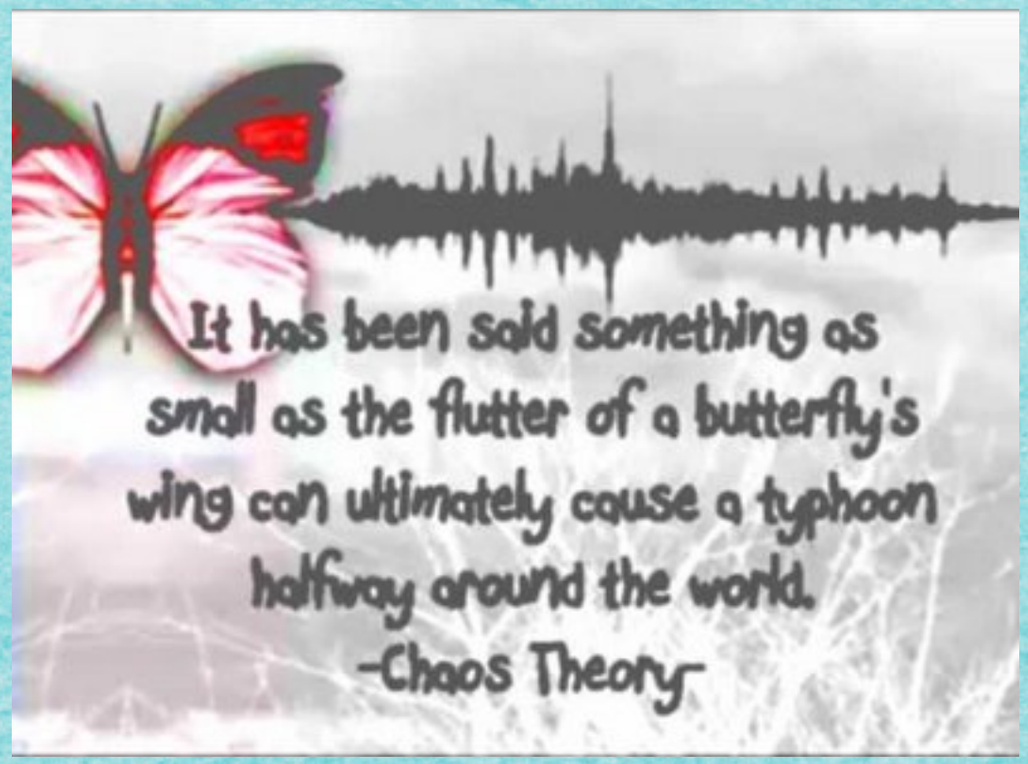


5.4.1 Logistische Rekursion

Edward Lorenz
(1917-2008)

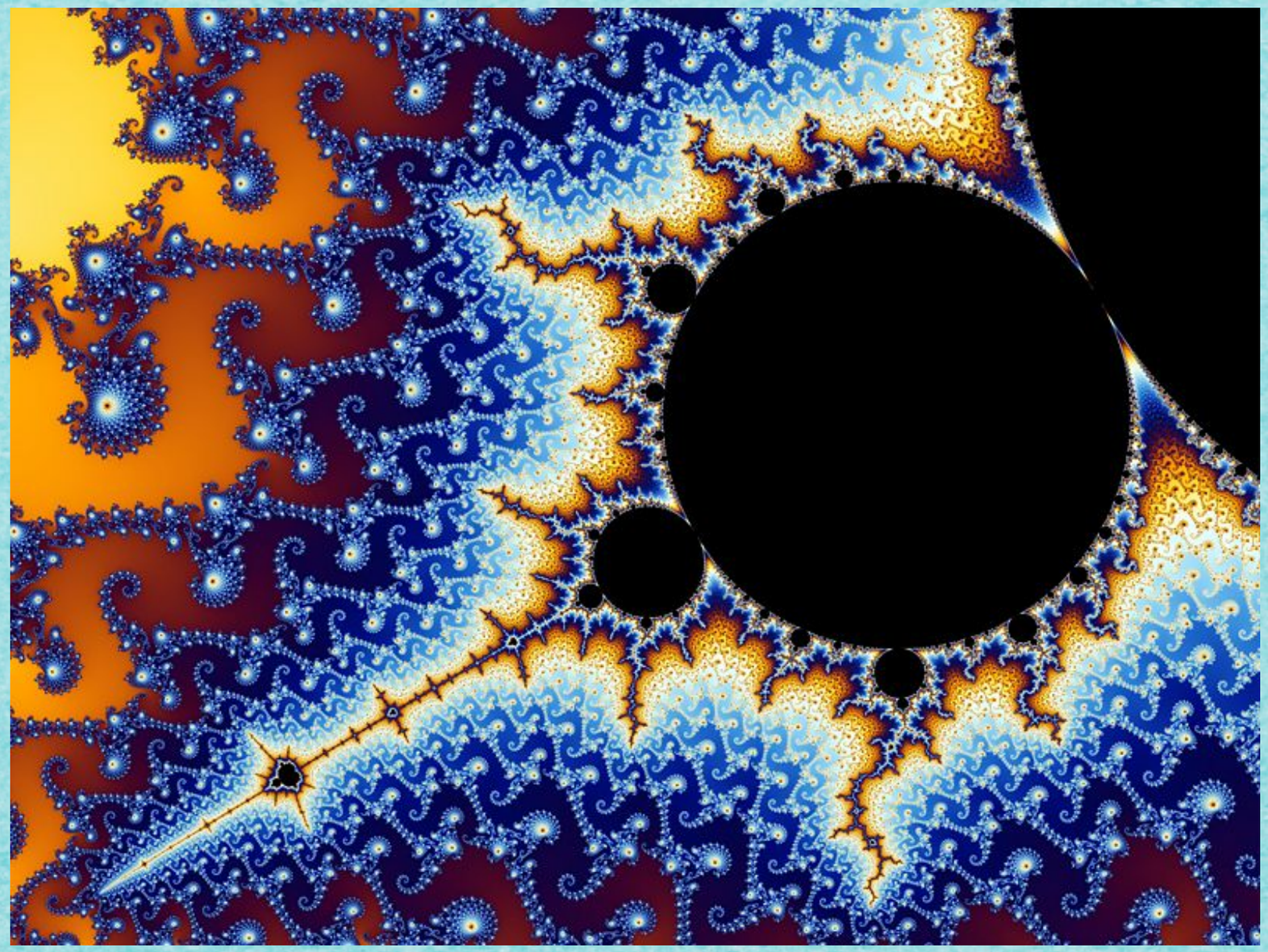
Grenzen der Kausalität!

Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?



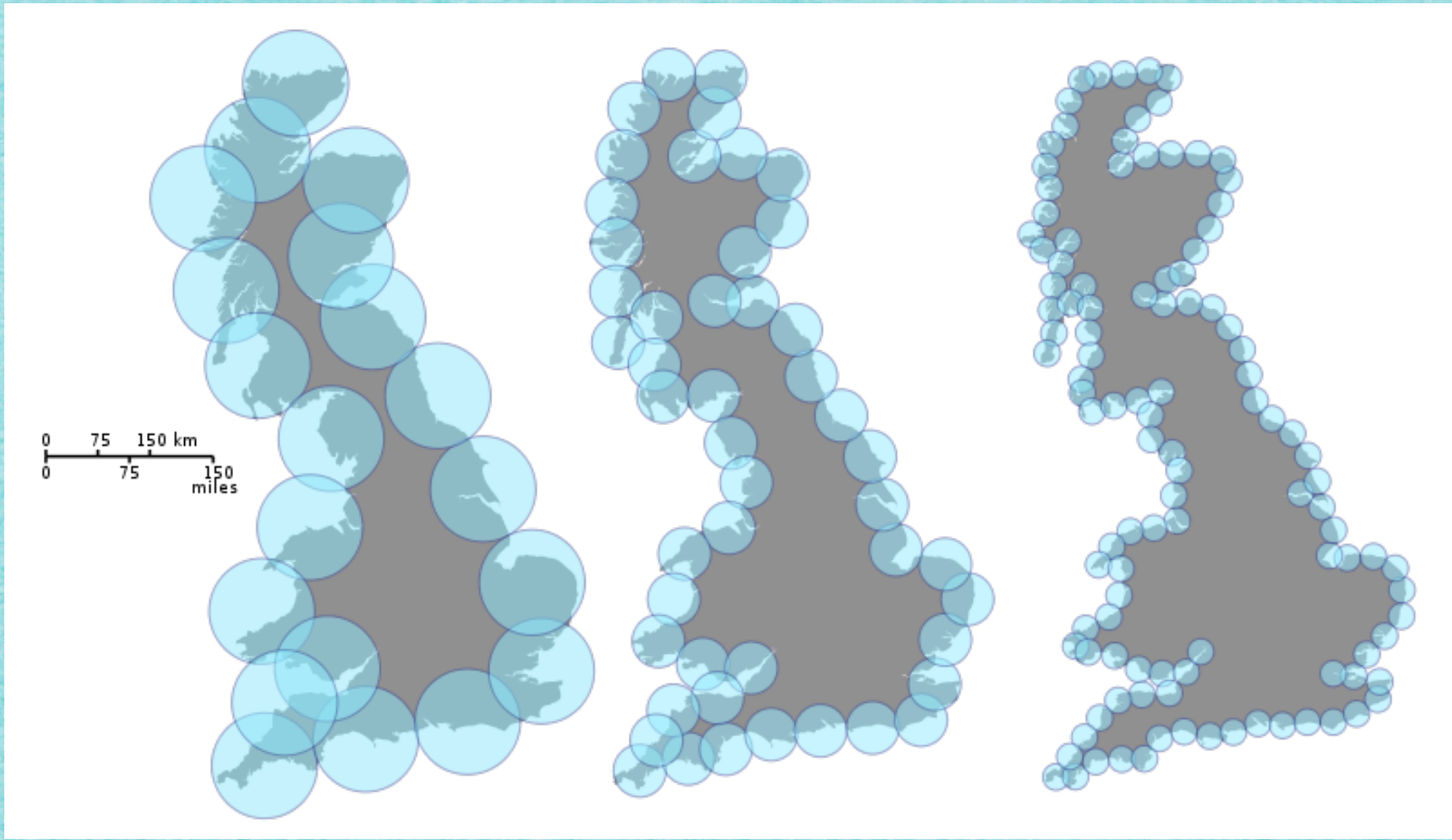
5.4.2 Die Mandelbrotmenge

Ausschnitt:



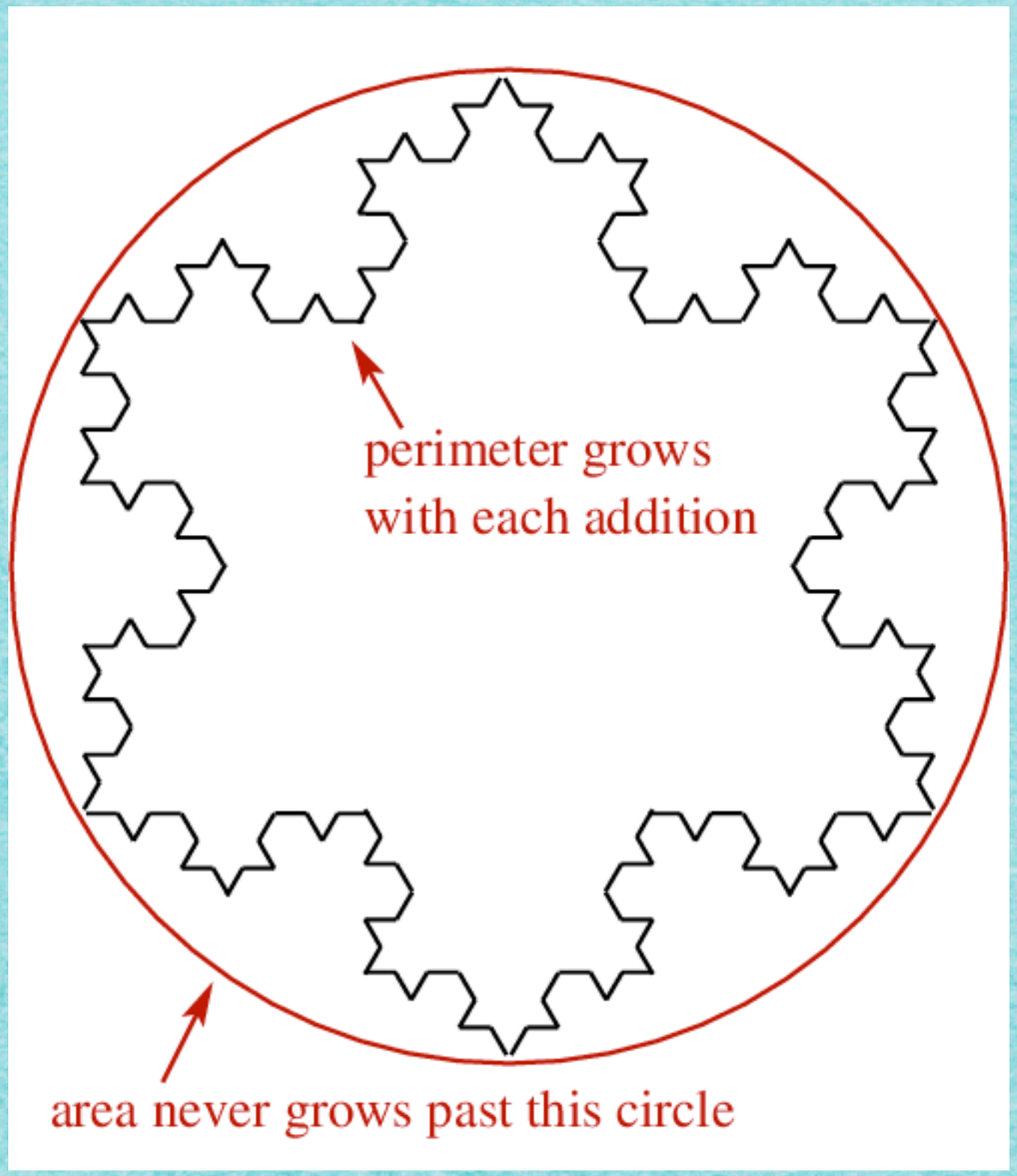
-> Filme!

5.4.3 Fraktale



Hausdorff-Dimension:
Wie wächst das Gesamtmaß in Abhängigkeit von der Größe?

5.4.3 Fraktale

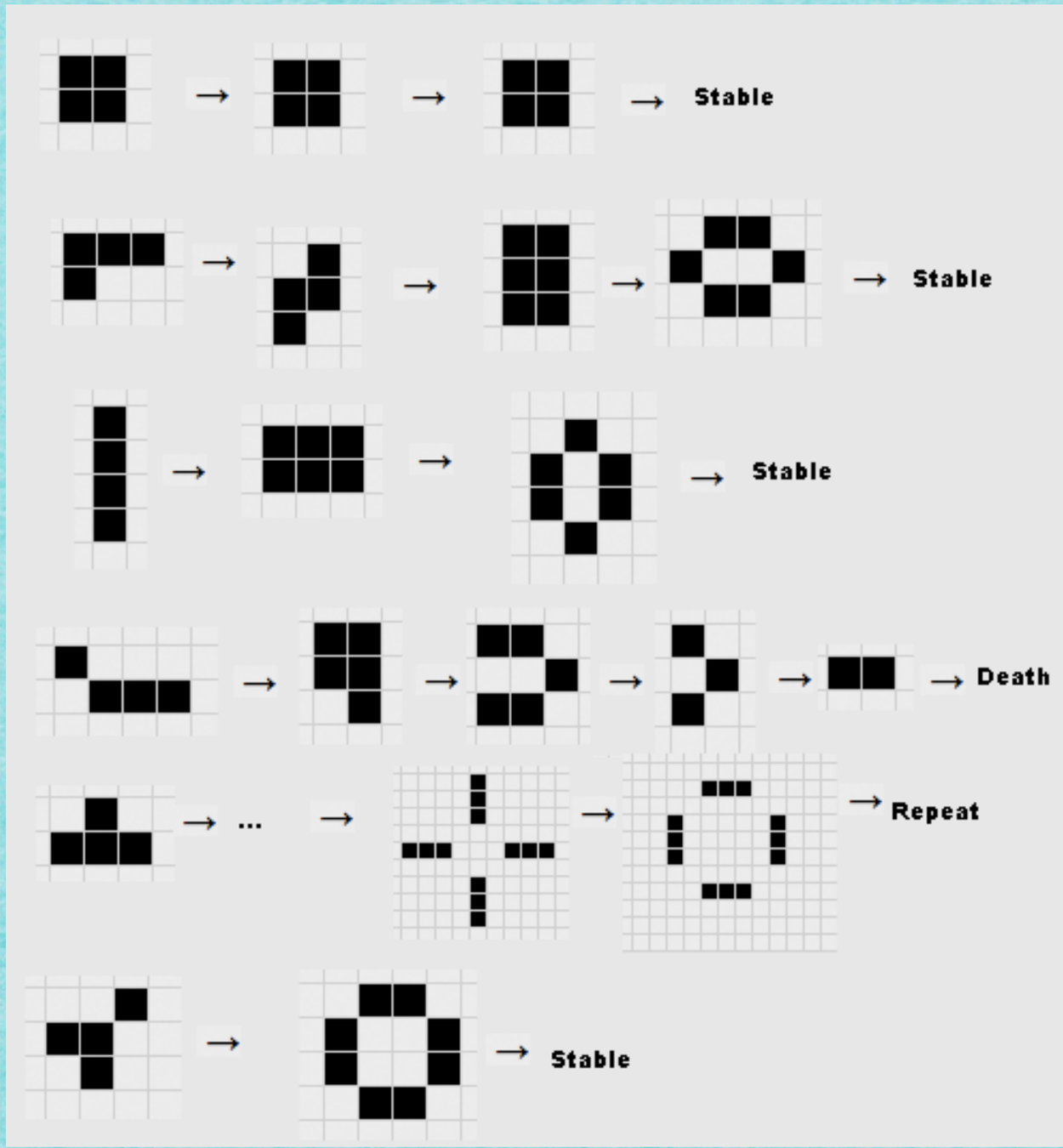


Pro Iteration:
Länge wächst um
Faktor 4/3

Hausdorff-Dimension
des Randes:
log(4)/log(3)
= 1.2618595...

Fläche:
Länge wächst um
Faktor 4/3

5.4.4 Zelluläre Automaten



Kapitel 5.5: Quicksort

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

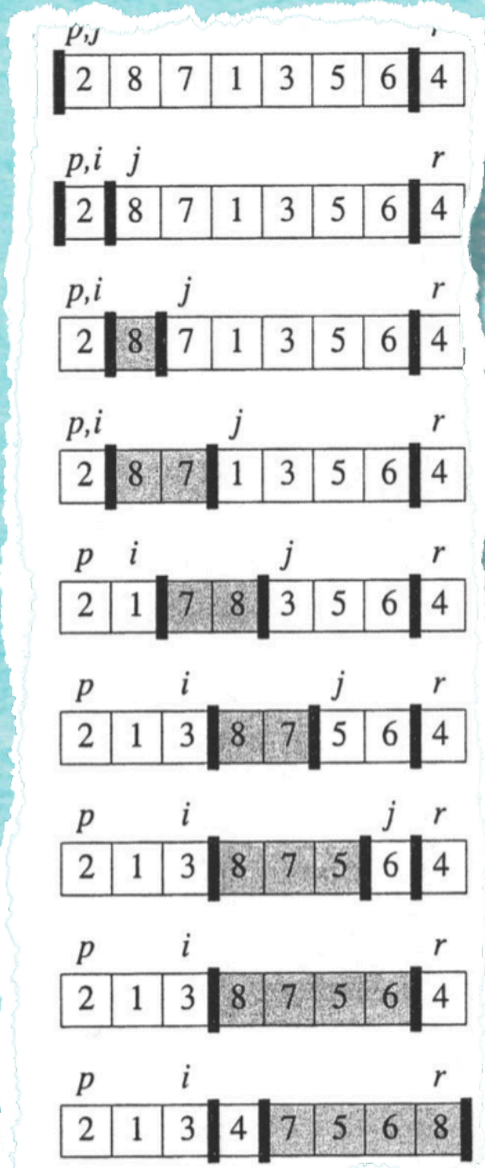
Prof. Dr. Sándor Fekete

Subroutine 5.1.2

<u>INPUT:</u> Subarray von A=[1,...,n], d.h. A[p,...,r]

<u>OUTPUT:</u> Zwei Subarrays A[p,...,q-1] und A[q+1,...,r]
mit A[i]≤A[q] und A[q]<A[j] für i=p,...,q-1 und j=q+1,...,r

```
PARTITION(A, p, r)
x ← A[r]
i ← p − 1
for j ← p to r − 1
        do if A[j] ≤ x
                then i ← i + 1
                        vertausche A[i] ↔ A[j]
vertausche A[i + 1] ↔ A[r]
return i + 1
```



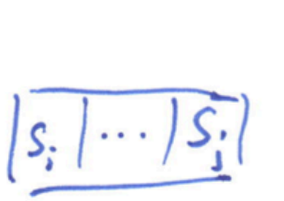
<u>Satz (Komplexität von Quicksort)</u>
Für einen n-elementigen Array A hat Mergesort eine erwartete Laufzeit von O(n log n).

(46)

Wir müssen also die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass s_i und s_j verglichen werden.

Dafür betrachten wir

$$S_{ij} := \{ s_i, \dots, s_j \}.$$



Dann ist

$$P(s_i \text{ wird mit } s_j \text{ verglichen}) = P(s_i \text{ oder } s_j \text{ ist erster Pivot in } S_{ij}).$$

Denn wird s_i oder s_j gewählt, wird es mit allen anderen verglichen; wird aber zuerst ein Pivot dazwischen gewählt, werden s_i und s_j getrennt und nicht mehr verglichen!

Kapitel 5.6: Mediane

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

Satz 5.23

Der Median für n Zahlen kann in $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

Beweisidee:

$$X = \{1, 22, 10, 13, 24, 6, 18, 21, 4, 25, 11, 16, 2, 20, 8, 17, 5, 12, 19, 14, 3, 9, 15, 7, 23\}$$

- Gruppiere die Zahlen in Fünfergruppen.

1	6	11	17	3
22	18	16	5	9
10	21	2	12	15
13	4	20	19	7
24	25	8	14	23

$\mathcal{O}(n)$

- Sortiere die Fünfergruppen.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25	20	19	23

$\mathcal{O}(n)$

Beweisidee (Forts.):

- Berechne den Median der Mediane.

1	4	2	5	3
10	6	8	12	7
13	18	11	14	9
22	21	16	17	15
24	25			

$$T(\frac{n}{5})$$

- Verwende den Median der M … eren.

$$T(n) \in \Theta(n^k) = \Theta(n)$$

… Zahlen

				6
		13	14	18
15	16	22	17	21
23	20	24	19	25

$$T(\frac{3n}{4})$$

$$T(n) = T(\frac{n}{5}) + T(\frac{3n}{4}) + \Theta(n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k = \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{19}{20} < 1.$$

5.6.2 Laufzeit

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7n}{10}\right) + \Theta(n)$$

FRAGE 5.24

Was passiert, wenn man Dreier- statt Fünfergruppen verwendet?
Was passiert bei Siebenergruppen?

Kapitel 5.7: Sortieren in Linearzeit

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

5.7.1 Countingsort

5.7 Sortieren in linearer Zeit

In Satz 5.4 haben wir gezeigt, dass das Sortieren von n Objekten nicht schneller als in $\Omega(n \log n)$ möglich ist – vorausgesetzt, man kann dafür keine Zusatzinformation einsetzen und darf Objekte nur paarweise vergleichen (und ggf. vertauschen).

In vielen Situationen hat man aber zusätzliche Informationen! Das wollen wir hier analysieren.

5.7.1 Countingsort

Im einfachsten Fall sind die n Objekte Zahlen aus dem Bereich $1, \ldots, k$.

5.7.2 Radixsort

5.7.2 Radixsort

Idee: Sortiere nicht gleich nach den Schlüsselwerten, sondern nach den Ziffern der Schlüssel!

(Früher sehr häufig bei Lochkarten eingesetzt.)

Naiver Ansatz: Sortiere nach größter Ziffer, dann nach zweiter Ziffer, ...

Problem: Entweder benötigt man viele temporäre Zwischenmengen – oder die Vorsortierung geht kaputt!

Besserer Ansatz: Sortiere nach letzter Ziffer, dann nach vorletzter Ziffer, ...

Beispiel:

329		720		720		329
457		355		329		355
657		436		436		436
839	→	457	→	839	→	457
436		657		355		657
720		329		457		720
355		839		657		839

Wichtig: Jeweilige Sortierung darf Reihenfolge gleichwertiger Ziffern nicht verändern!

5.7.2 Radixsort

5.7.2 Radixsort

Idee: Sortiere nicht gleich nach den Schlüsselwerten, sondern nach den Ziffern der Schlüssel!

(Früher sehr häufig bei Lochkarten eingesetzt.)

Naiver Ansatz: Sortiere nach größter Ziffer, dann nach zweiter Ziffer, ...

Problem: Entweder benötigt man viele temporäre Zwischenmengen – oder die Vorsortierung geht kaputt!

Besserer Ansatz: Sortiere nach letzter Ziffer, dann nach vorletzter Ziffer, ...

Beispiel:

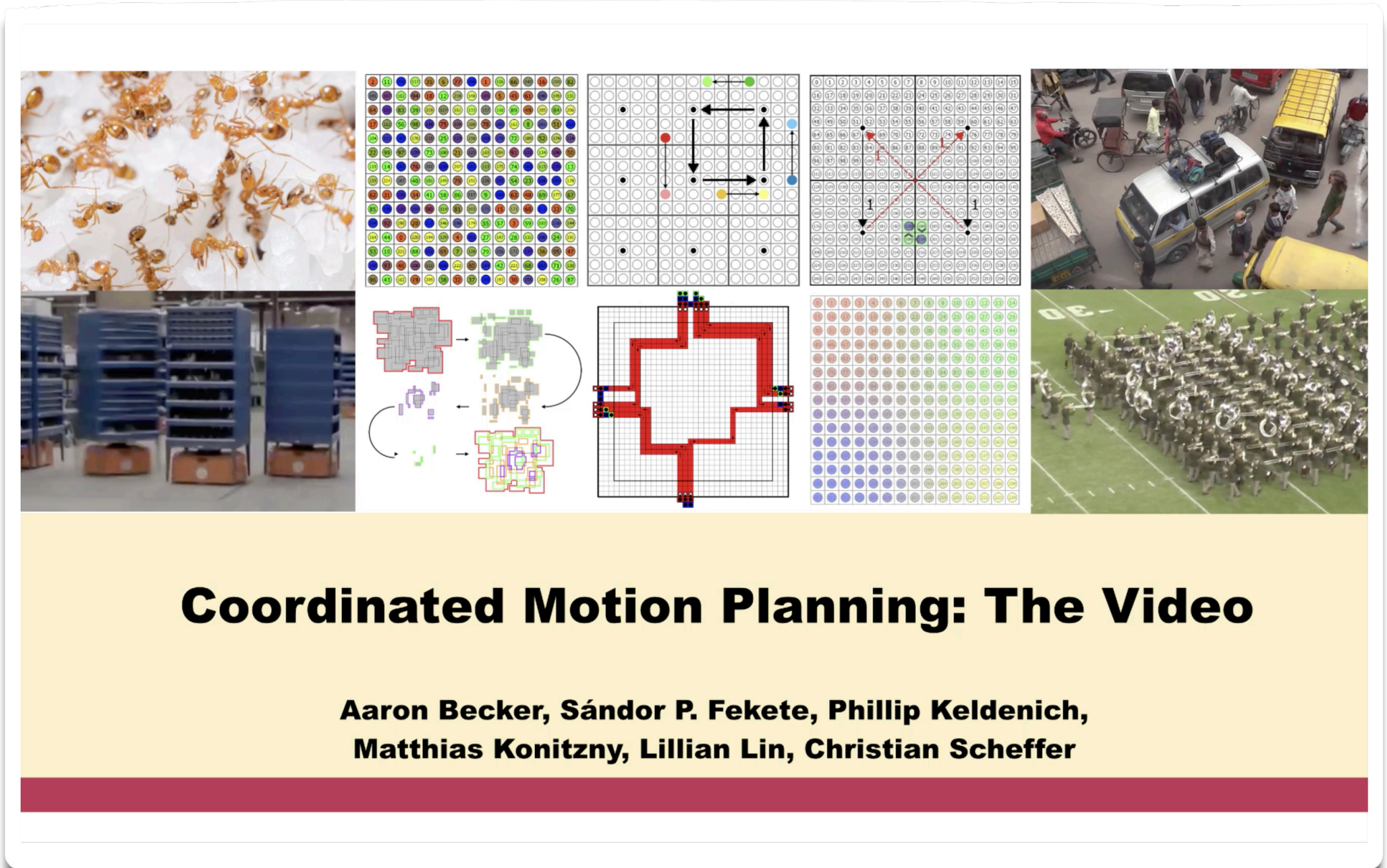
329		720		720		329
457		355		329		355
657		436		436		436
839	→	457	→	839	→	457
436		657		355		657
720		329		457		720
355		839		657		839

Wichtig: Jeweilige Sortierung darf Reihenfolge gleichwertiger Ziffern nicht verändern!

Kapitel 5.8: Paralleles Sortieren

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

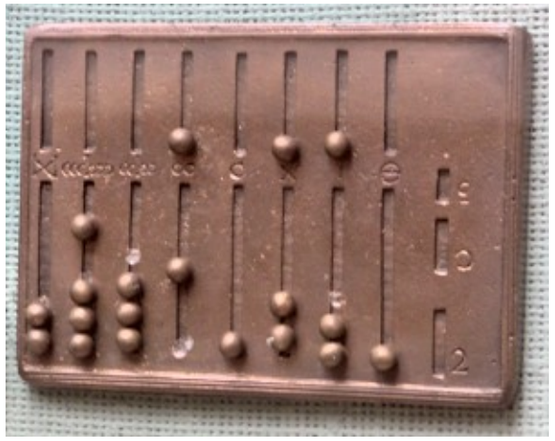

Coordinated Motion Planning: The Video
Aaron Becker, Sándor P. Fekete, Phillip Keldenich,
Matthias Konitzny, Lillian Lin, Christian Scheffer

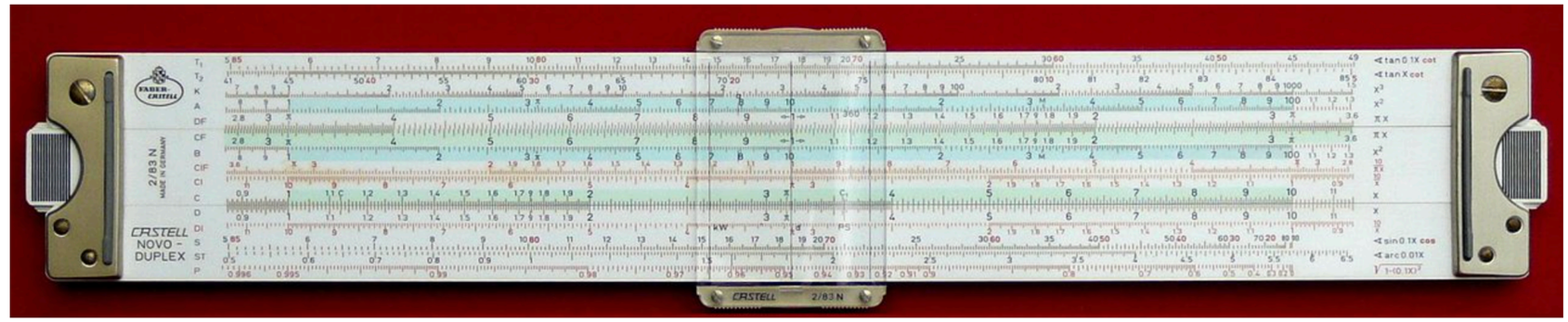
Kapitel 5.9: Analoge Verfahren

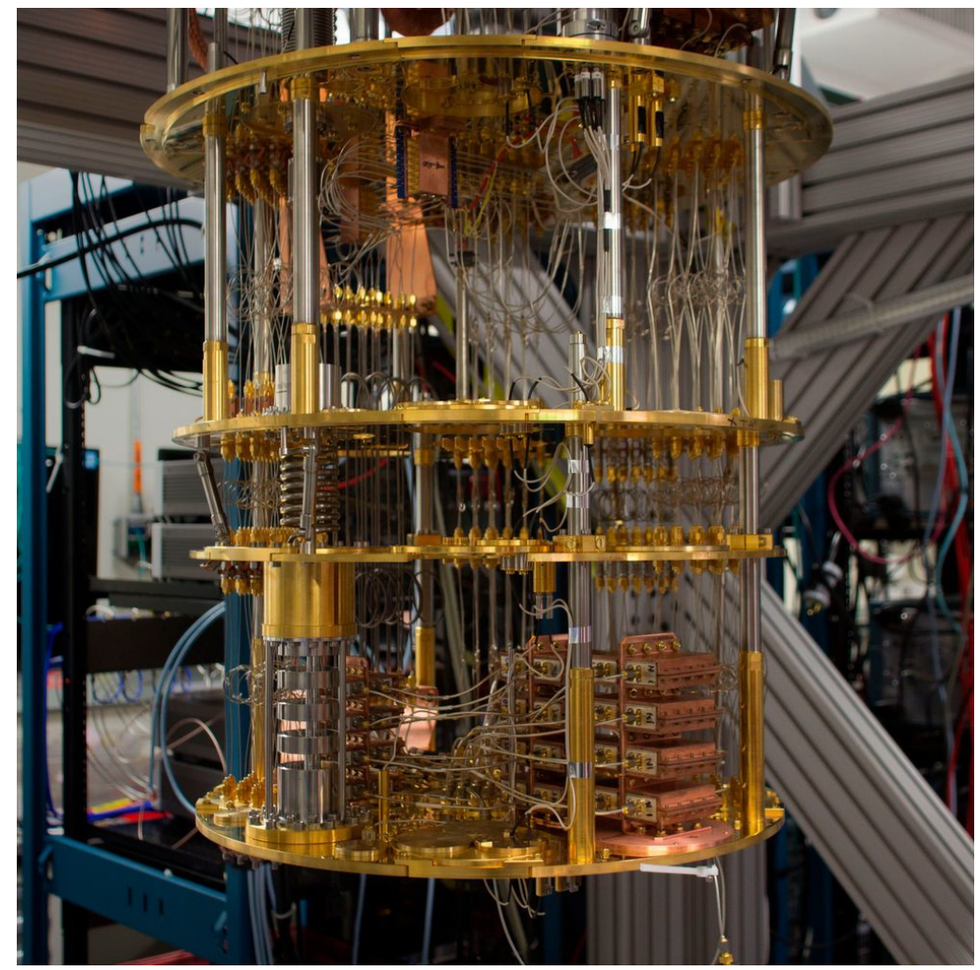
Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

Analogrechner



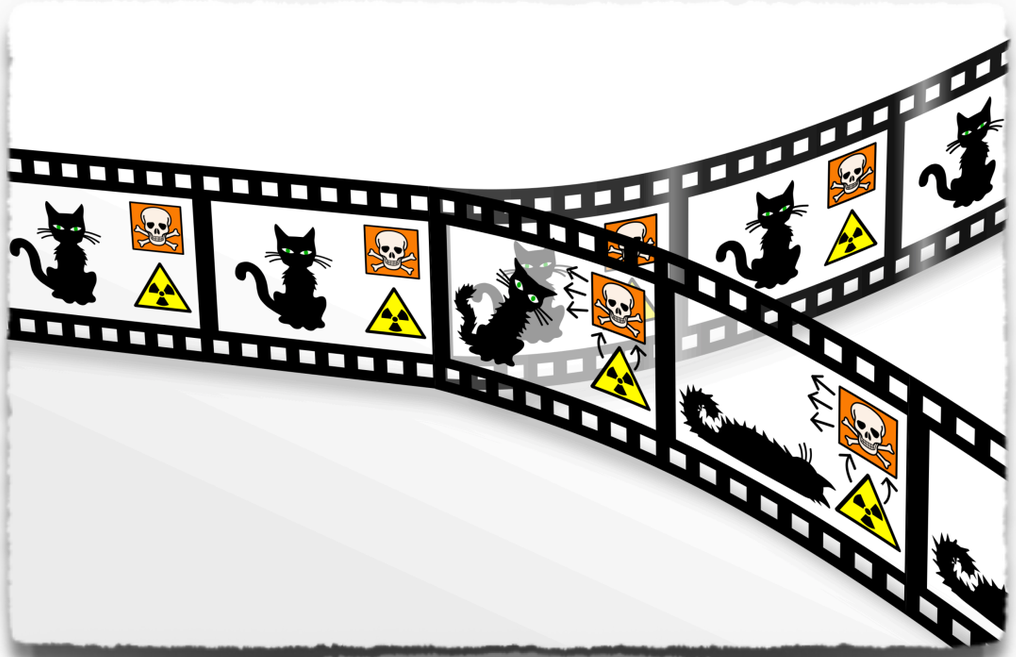


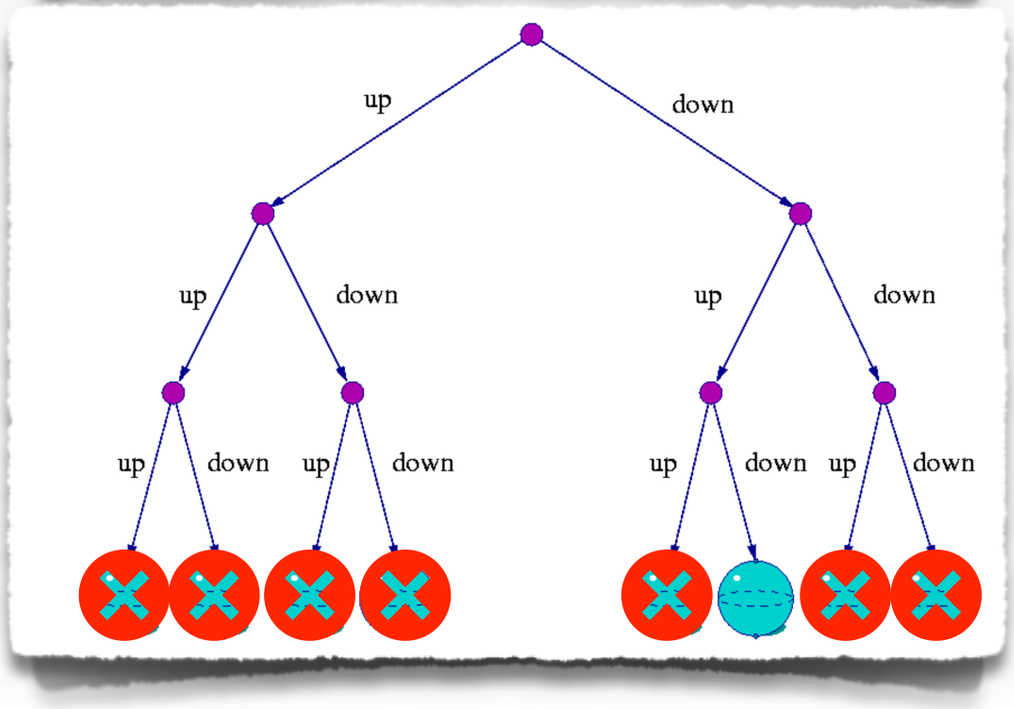


Kapitel 5.10: Unernste Sortierverfahren

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete



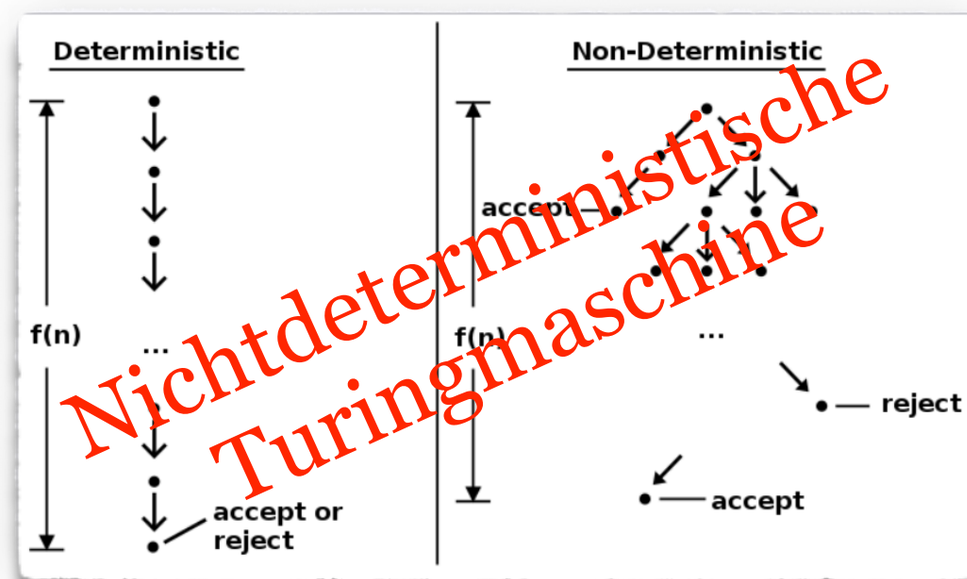


ALGORITHMUS 5.30 (Quantum Bogosort)

INPUT: n Zahlen $A[1], \dots, A[n]$

OUTPUT: Sortierter Array in geeignetem Universum

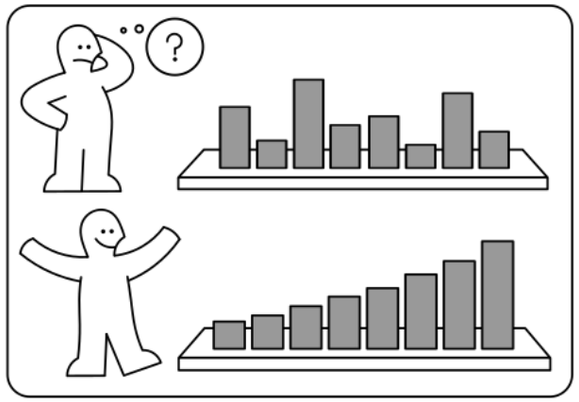
1. Permutiere zufällig
2. IF (Permutation unsortiert)
   2.1 Zerstöre Universum

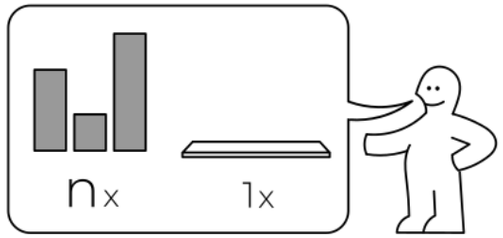


MERGE SÖRT

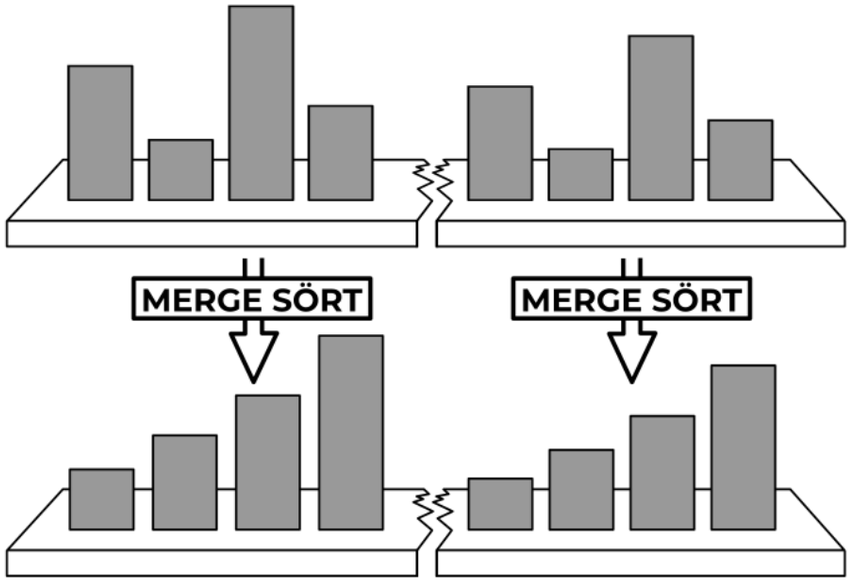
idea-instructions.com/merge-sort/
v1.2, CC by-nc-sa 4.0

IDEA

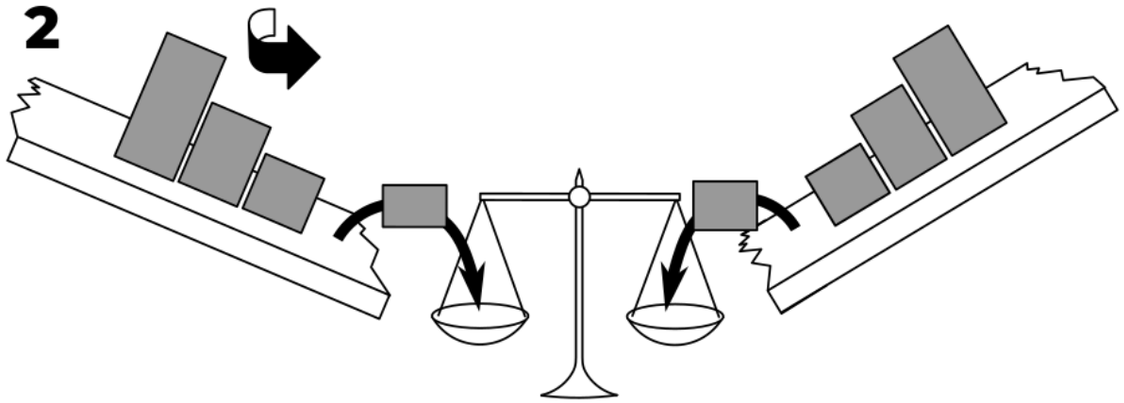




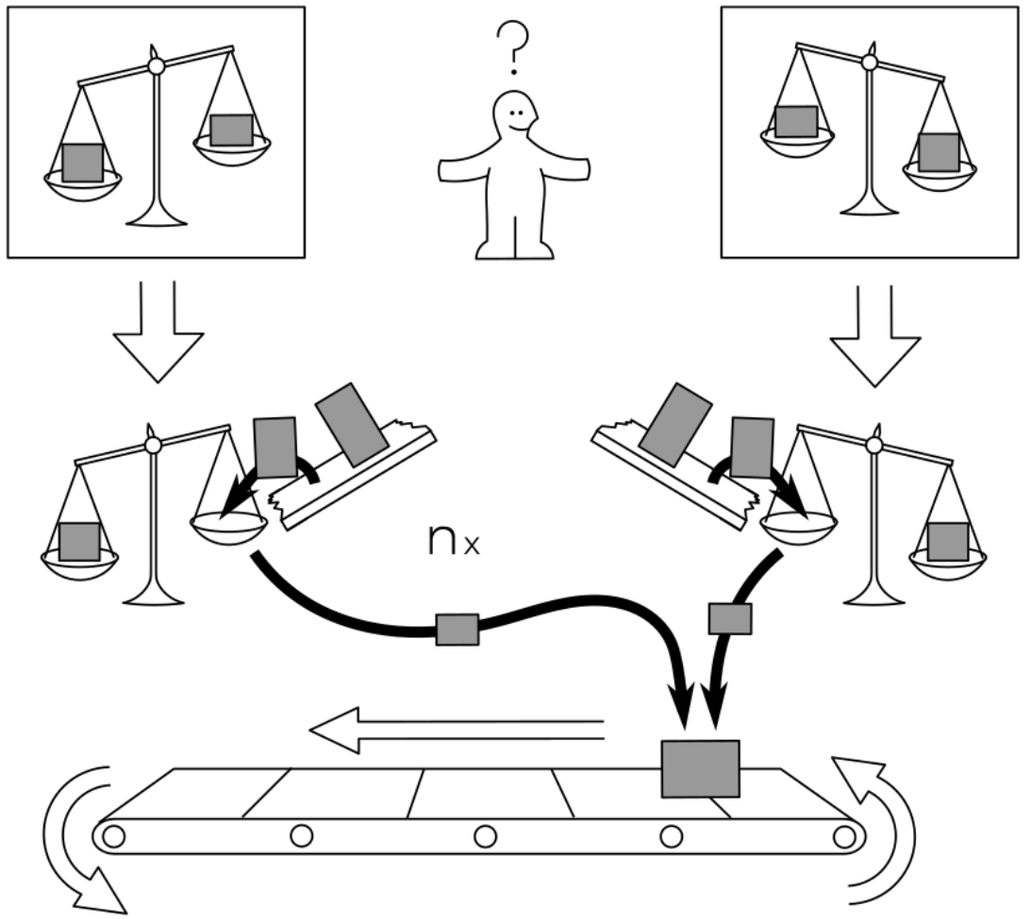
1



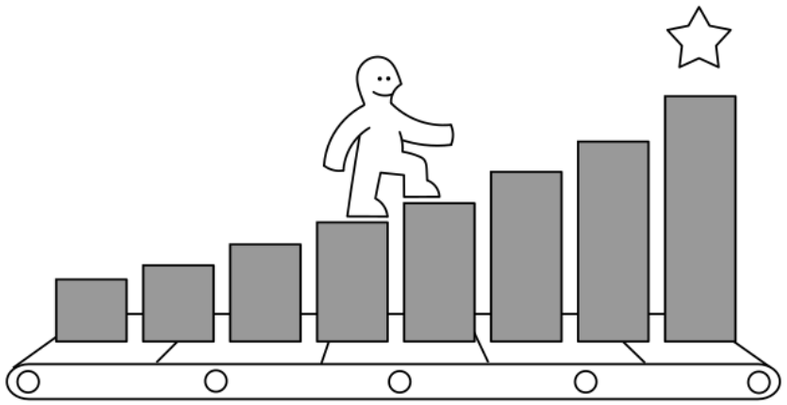
2



3



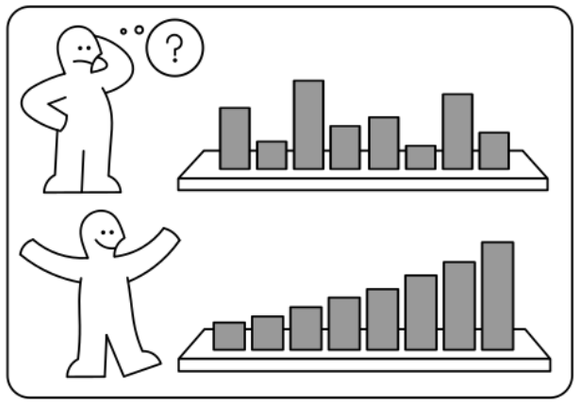
4

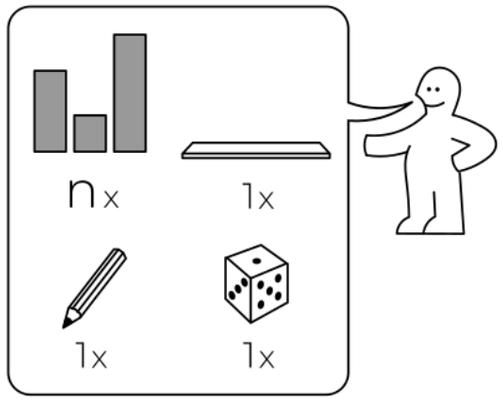


KVICK SÖRT

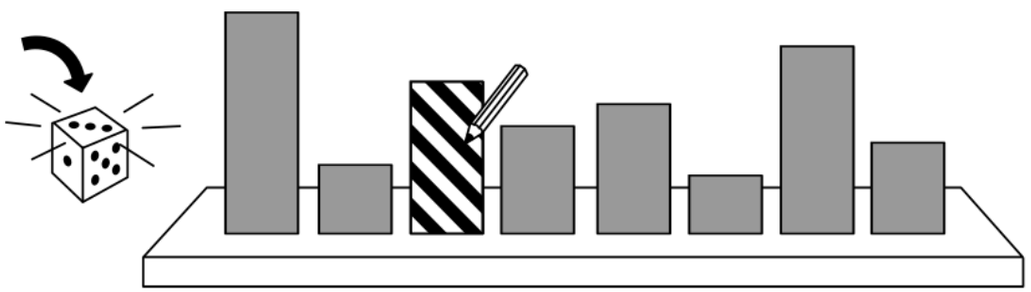
idea-instructions.com/quick-sort/
v1.2, CC by-nc-sa 4.0

IDEA

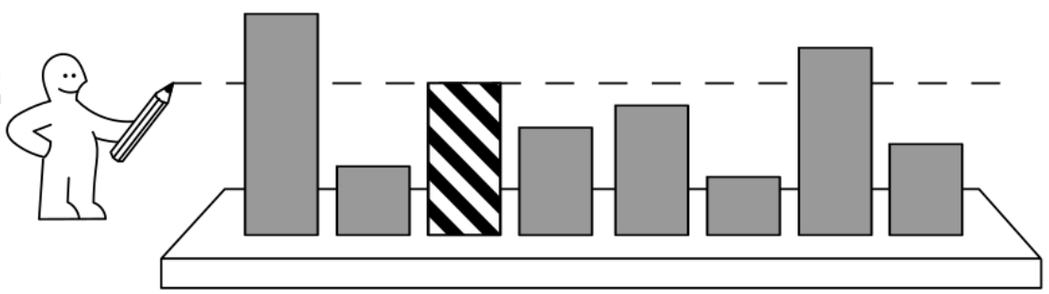




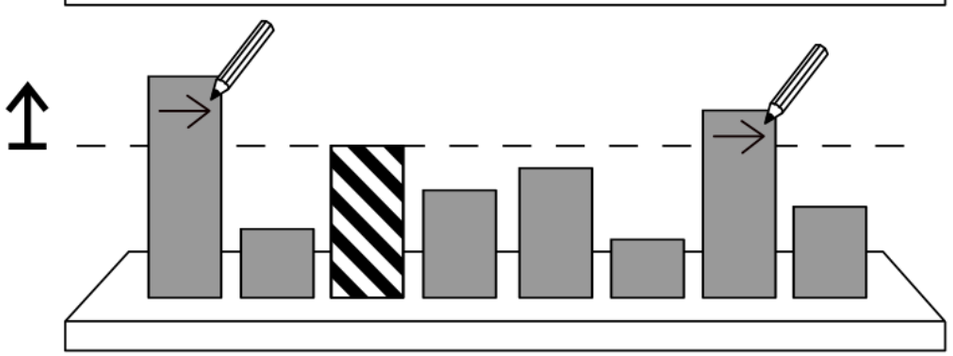
1



2

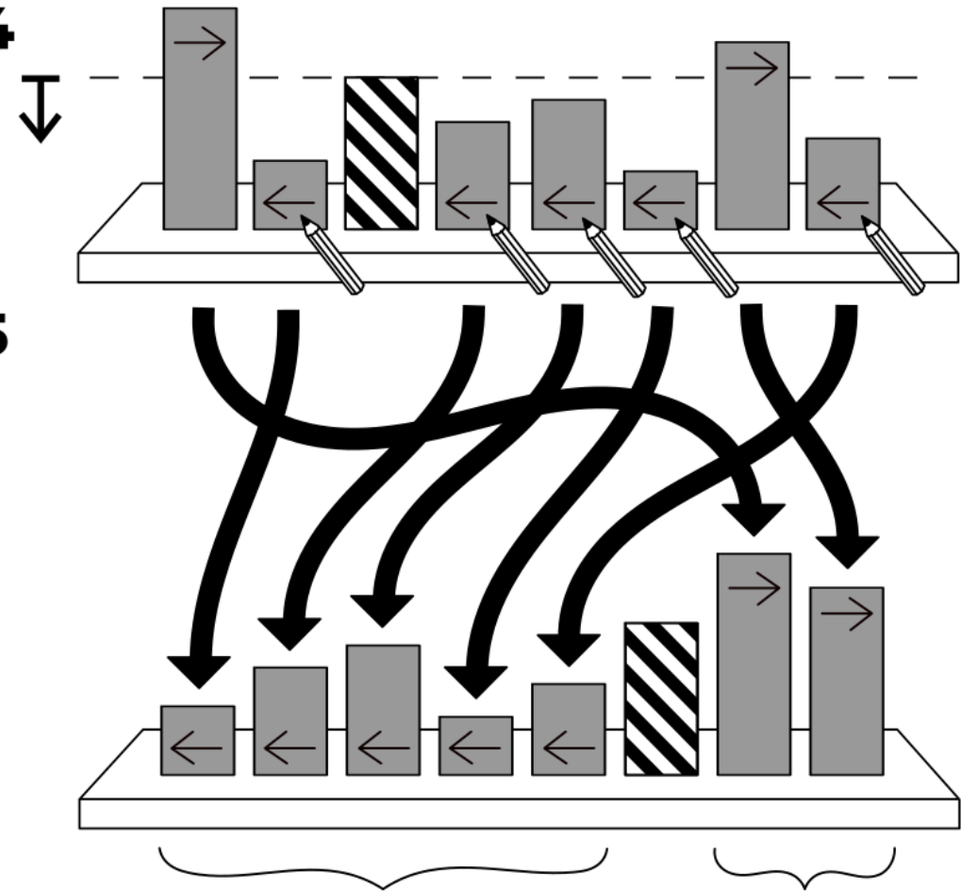


3

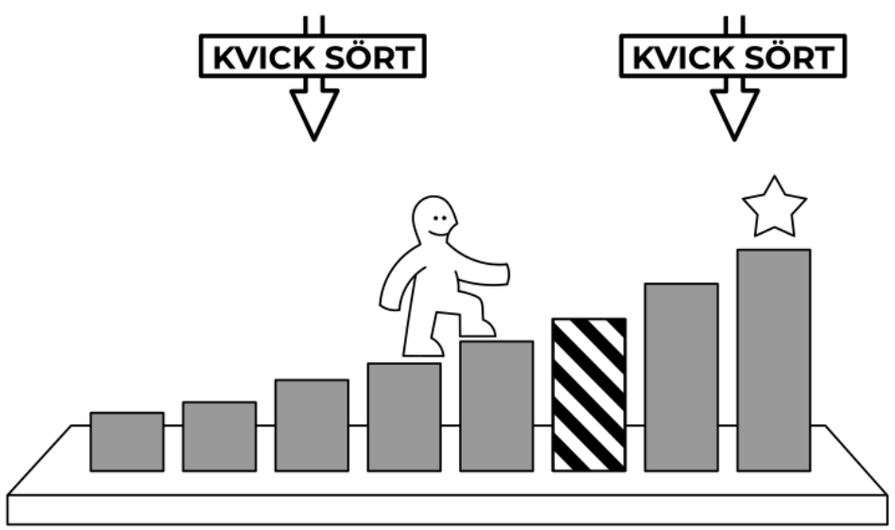


4

5



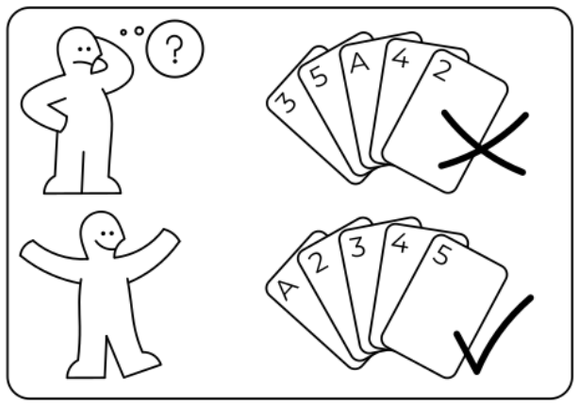
6

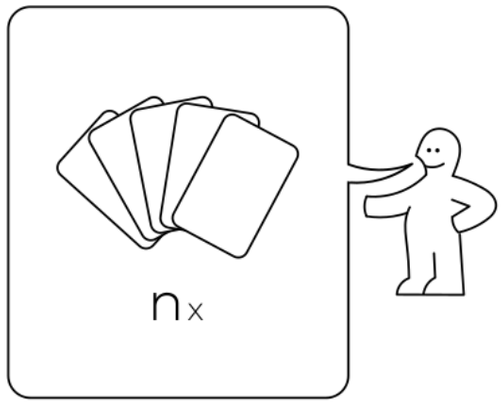


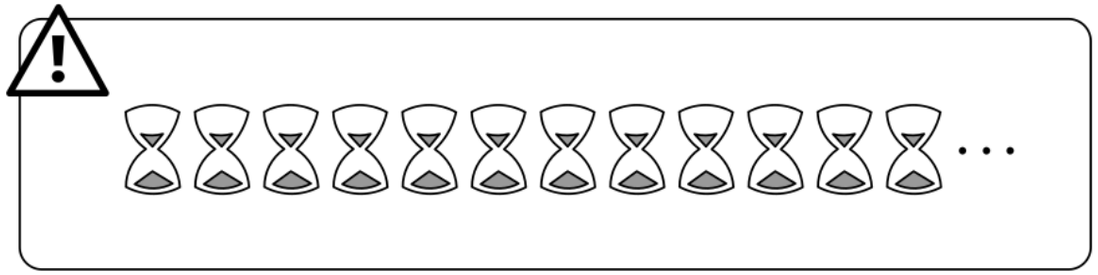
BOGO SÖRT

idea-instructions.com/bogo-sort/
v1.2, CC by-nc-sa 4.0

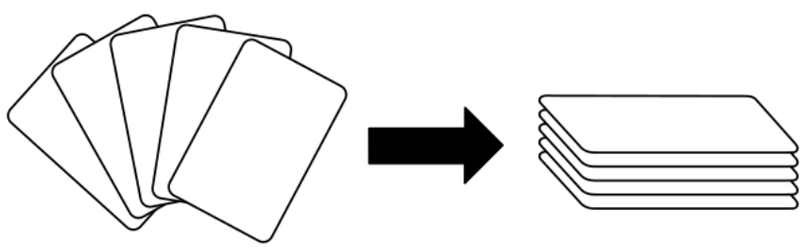
IDEA





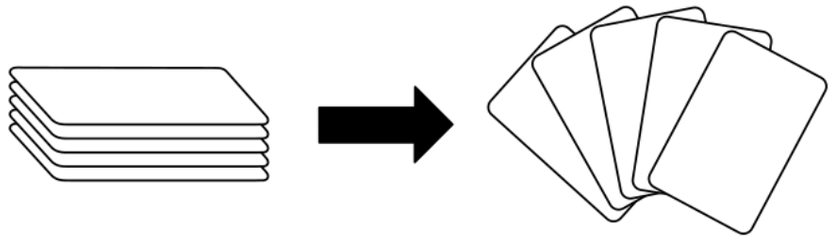


1

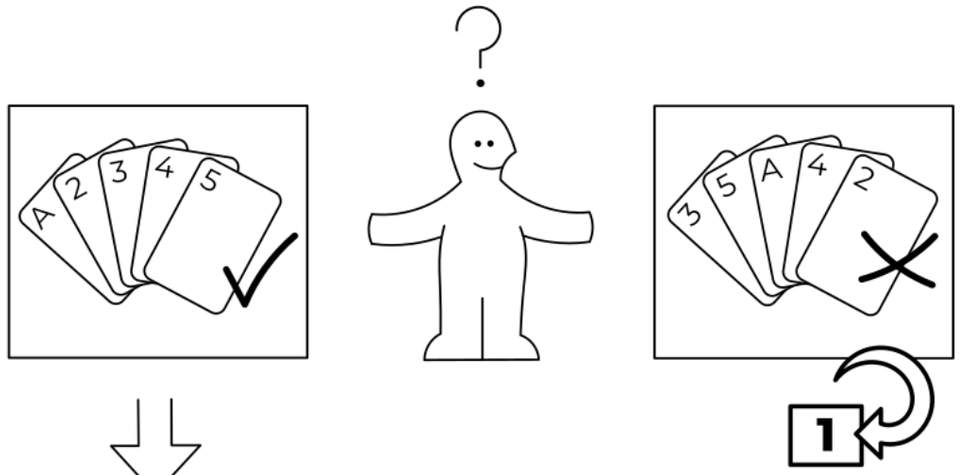


2

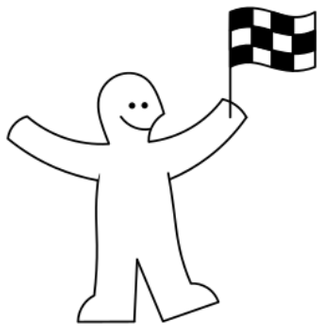
3



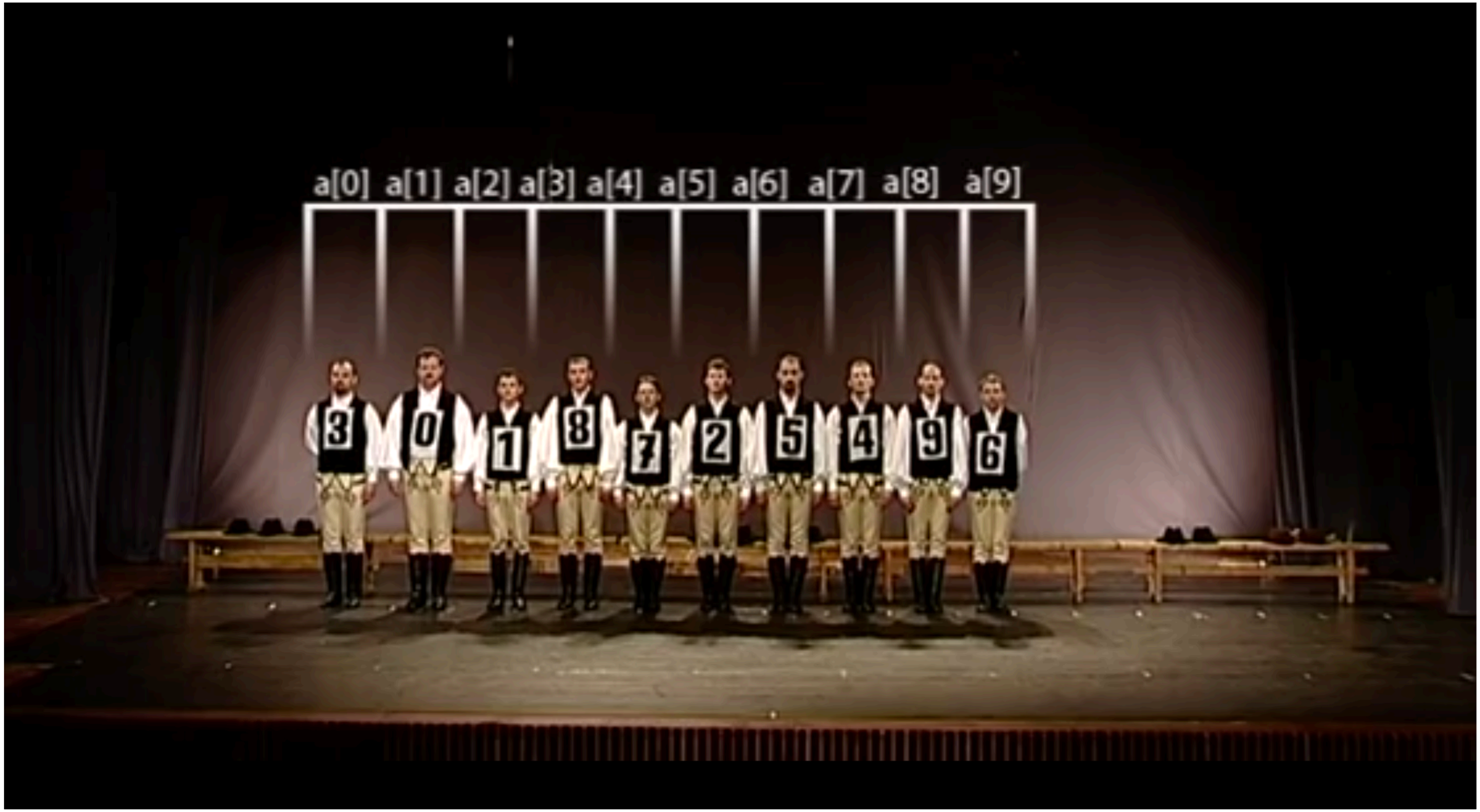
4

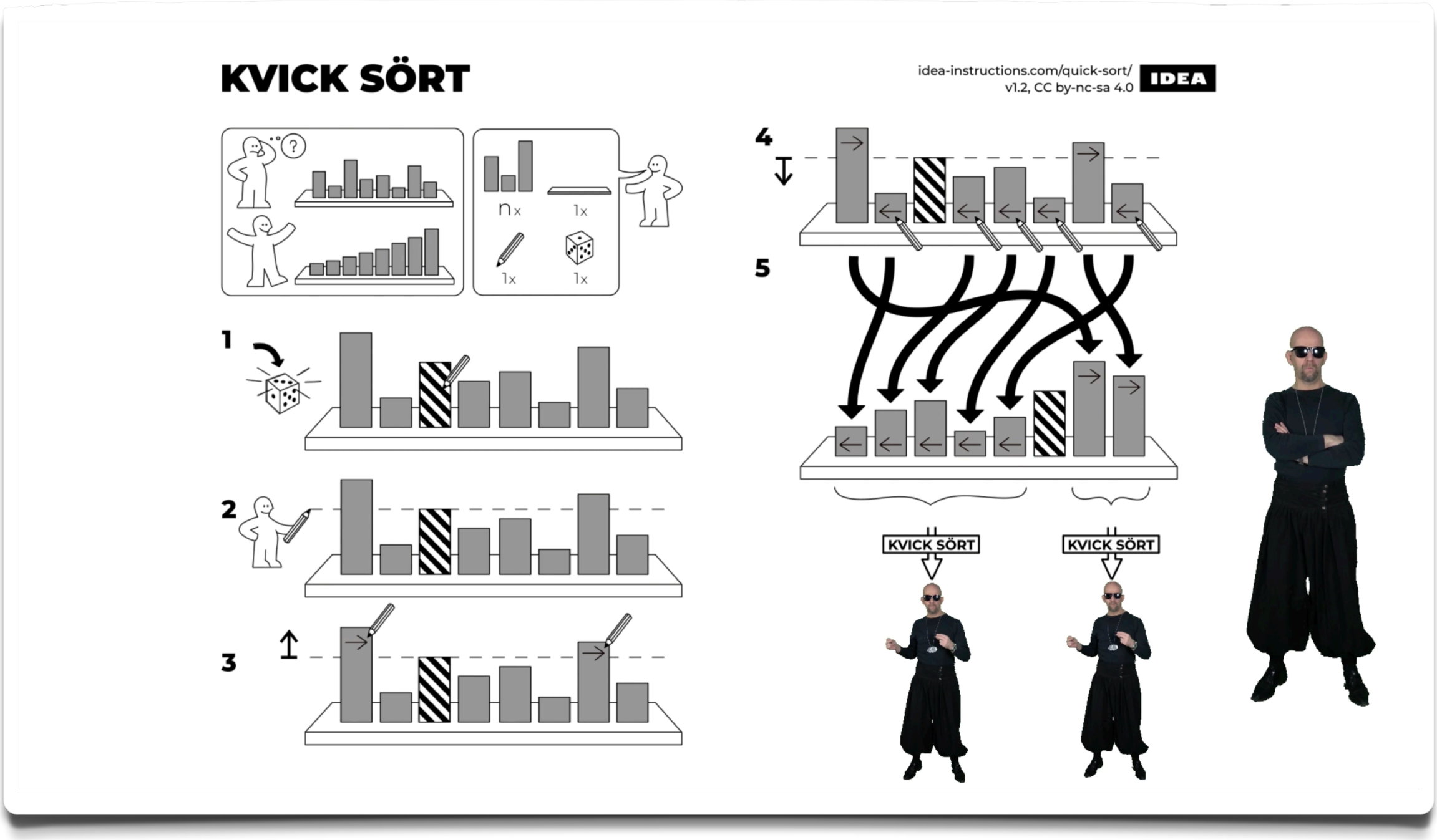


5



Volkstanz!




KVICK SÖRT
idea-instructions.com/quick-sort/
v1.2, CC by-nc-sa 4.0
IDEA
n x
1x
1x
1x
1
2
3
4
5
KVICK SÖRT
KVICK SÖRT

Vielen Dank!

s.fekete@tu-bs.de