

5.4 Behandeln von Rekursionen

(35)

Welche Möglichkeiten gibt es, Rekursionsgleichungen zu lösen?

5.4.1 Substitutionsmethode

Wie gesehen!

(1) Rate eine Lösung.

(2) Beweise die Richtigkeit per Vollständiger Induktion.

Das haben wir im Beweis von Satz 5.7 angewendet.

Schwierigkeit: Gute Lösung finden!

(In der Regel ist man an einer möglichst genauen Lösung interessiert - das kann schwer bis unmöglich sein!)

Oft kann man aber Abschätzungen gewinnen, z.B.

$$T(n) \in \Omega(n)$$

$$T(n) \in O(n^2)$$

5.4.2 Erzeugende Funktionen

Man kann Rekursionen auch oft lösen, indem man sie in einen abstrakt-formalen Kontext einbettet und die dafür bekannten Rechenregeln anwendet.

Dafür betrachten wir

DEFINITION 5.7 (Erzeugende Funktion)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge mit $a_n \in \mathbb{R}$.

Dann heißt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

die (gewöhnliche) erzeugende Funktion von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiel

$$(a) \quad a_n = 2a_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8$$

$$f(x) = 1 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 4 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3 + \dots$$

Wir suchen eine „geschlossene Form“ für a_n , also einen expliziten Ausdruck, um a_n direkt aus n (ohne Rekursion) ausrechnen zu können.

Wir können aufgrund der Rekursion $f(x)$ umformen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot a_{n-1} \cdot x^n \\ &= a_0 + 2x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{f(x)} = a_0 + 2x \cdot f(x) \end{aligned}$$

Auflösen nach $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x f(x) \\ \Leftrightarrow f(x)(1 - 2x) &= 1, \quad \text{d.h.} \quad f(x) = \frac{1}{1 - 2x} \end{aligned}$$

Das kann man auch als Reihe schreiben, indem man

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p} \quad \text{nutzt:}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x^n$$

Damit Gleichheit gilt, müssen die Koeffizienten gleich sein

$$a_0 = 2^0$$

$$a_1 = 2^1$$

$$\vdots$$

$$a_n = 2^n$$

→ Geschlossene Form!

Das geht natürlich auch für kompliziertere

Fälle, die schwerer zu lösen sind!

Offt setzt man dafür auch ein breiteres Arsenal

an Umformungen ein, Tabellen von

Funktionsentwicklungen, etc.

(Mehr dazu nicht hier...)

Zweites Beispiel für Lösung von Rekursionsgleichungen:
Fibonacci-Zahlen!

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2$$

Dafür suchen wir eine geschlossene Form!

Gewöhnliche erzeugende Funktion:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

$$= F_0 x^0 + F_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n$$

$$= 0 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n$$

$$= x + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

$$= x + (x + x^2) \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

$$= x + (x + x^2) F(x)$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Das kann man weiter zerlegen („Partialbruchzerlegung“): (39)

$$\frac{x}{1-x-x^2} \stackrel{!}{=} \frac{A}{1-ax} - \frac{B}{1-bx} = \frac{A(1-bx) - B(1-ax)}{(1-ax)(1-bx)}$$

Daraus rechnet man:

Nenner: $(1-ax)(1-bx) \stackrel{!}{=} 1-x-x^2$

also $1-(a+b)x+abx^2 \stackrel{!}{=} 1-x-x^2$, d.h. $a+b=1$
 $ab=-1$

Somit $b=1-a$ und

$a(a-1)=1$, woraus man
 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ erhält.

Außerdem $A-B + (-Ab+Ba)x = x$,

Zähler: d.h. $A=B$ und $A = \frac{1}{\sqrt{5}} = B$.

Damit hat man

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{5}(1-ax)} - \frac{1}{\sqrt{5}(1-bx)}$$

mit

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Wieder mit geometrischen Reihen ist

$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \quad \text{und} \quad \frac{1}{1-bx} = \sum_{n=0}^{\infty} b^n x^n,$$

also $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (a^n - b^n)$

Nebenrechnung zur Zerlegung!

Mit den gebräuchlicheren Abkürzungen

$$a = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) =: \varphi \quad (\text{"Goldener Schnitt"})$$

und $b = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) =: \bar{\varphi}$ ergibt sich also

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \bar{\varphi}^n \right)$$

bzw. (ganz explizit!)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Erstaunlicherweise liefert das wirklich immer eine ganze Zahl.

Außerdem sieht man, dass die n -te Fibonacci-Zahl der n -ten Potenz des Goldenen Schnittes entspricht - mit dem Korrekturterm $\bar{\varphi}^n$ und um $\frac{1}{\sqrt{5}}$ normiert.

Da $|\bar{\varphi}| < 1$, ist $\left| \frac{\bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{2}$, d.h. F_n ist die ganze Zahl, die am nächsten an $\frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^n$ ist.

(Das erklärt auch, warum das Verhältnis aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen gegen φ konvergiert!)

S.4.3 Das Master-Theorem

(41)

Betrachten wir allgemein

$$T(n) = \sum_{i=1}^m T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k)$$

↑
Aufteilung in
Teilprobleme

↑
Kosten der Aufteilung
+ Zusammenfügung

Dafür suchen wir eine allgemeine Formel!

Satz 5.8 (Master-Theorem)

Sei $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$T(n) = \sum_{i=1}^m T(\alpha_i \cdot n) + \Theta(n^k),$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R} : 0 < \alpha_i < 1, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k < 1 \\ \Theta(n^k \log n) & \text{für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k = 1 \\ \Theta(n^c) & \text{mit } \sum_{i=1}^m \alpha_i^c = 1 \text{ für } \sum_{i=1}^m \alpha_i^k > 1 \end{cases}$$

BEWEIS:

Nicht hier!

(Siehe z.B. Cormen, 4.4)

Beispiele 5.9:

$$(a) \quad U(n) = 8 U\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

(Ausprobieren mit $U(1) = 1$:

$$U(3) = 8 + 9 = 17 \quad \left. \vphantom{U(3)} \right\} 12,76$$

$$U(9) = 8 \cdot 17 + 81 = 217 \quad \left. \vphantom{U(9)} \right\} 11,35$$

$$U(27) = 8 \cdot 217 + 27^2 = 2465 \quad \left. \vphantom{U(27)} \right\} 10,66$$

$$U(81) = 8 \cdot 2465 + 81^2 = 26.281 \quad \left. \vphantom{U(81)} \right\} 10,24$$

$$U(243) = 8 \cdot 26.281 + 243^2 = 269.297$$

:

Im Master-Theorem:

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_8 = \frac{1}{3}, \quad m=8, \quad k=2$$

$$\sum_{i=1}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1, \quad \text{also erster Fall:}$$

$$U(n) \in \Theta(n^2) \quad !$$

$$(b) \quad V(n) = 9 \cdot V\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$$

(Ausprobieren mit $V(1) = 1$:

$$V(1) = 1 = 1 \cdot 3^0 = 1 \cdot 1^2$$

$$V(3) = 9 \cdot 1 + 3^2 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 3^2$$

$$V(9) = 9 \cdot (2 \cdot 3^2) + 9^2 = 3 \cdot 3^4 = 3 \cdot 9^2$$

$$V(27) = 9 \cdot (3 \cdot 9^2) + 27^2 = 4 \cdot 3^6 = 4 \cdot 27^2$$

$$V(81) = 9 \cdot (4 \cdot 27^2) + 81^2 = 5 \cdot 3^8 = 5 \cdot 81^2$$

usw.!

Im Master-Theorem:

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_9 < \frac{1}{3}, \quad m = 9, \quad k = 2,$$

$$\sum_{i=1}^9 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1, \quad \text{also zweiter Fall:}$$

$$V(n) \in \Theta(n^2 \log n)$$

(c) $W(n) = 10 \cdot W\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

(Ausprobieren mit $w(1) = 1$:

$w(1) = 1$	$\}$	19
$w(3) = 10 \cdot 1 + 3^2 = 19$	$\}$	14,26
$w(9) = 10 \cdot 19 + 9^2 = 271$	$\}$	12,69
$w(27) = 10 \cdot 271 + 27^2 = 3439$	$\}$	11,90
$w(81) = 10 \cdot 3439 + 81^2 = 40.951$	$\}$	11,44
$w(243) = 10 \cdot 40.951 + 243^2 = 468.559$		

usw. !

Wegen Konvergieren die Quotienten ?!
→ Gegen 10 !

Im Master-Theorem :

$\alpha_1 = \dots = \alpha_{10} = \frac{1}{3}$, $m = 10$, $k = 2$,

$\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow 1$, also dritter Fall !

Gesucht wird c mit $\sum_{i=1}^{10} \alpha_i^c = 1$,

d.h. $10 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^c = 1$,

also $\left(\frac{1}{3}\right)^c = \frac{1}{10}$, oder $c = \log_3 10 \approx 2,096$.

Das liefert $W(n) = \Theta(n^{2,096...})$!