Kapitel 5: Sortieren

Algorithmen und Datenstrukturen
WS 2024/25

Prof. Dr. Sándor Fekete

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

23 17 13 19 33 28 15

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

13 15 17 19 23 28 33

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

23 17 19 33 28 15

13

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

23 17 19 33 28

13 15

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

23 19 33 28

13 15 17

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

23 33 28

13 15 17 19

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

33 28

13 15 17 19 23

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

33

13 15 17 19 23 28

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

13 15 17 19 23 28 33

Gesucht: Eine Sortierung nach Größe

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

13 15 17 19 23 28 33

Zahl der Vergleiche: $O(n^2)$

„Geht‘s nicht noch etwas schneller?“

Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

13 15 17 19 23 28 33

Zahl der Vergleiche:

„Geht‘s nicht noch etwas schneller?“

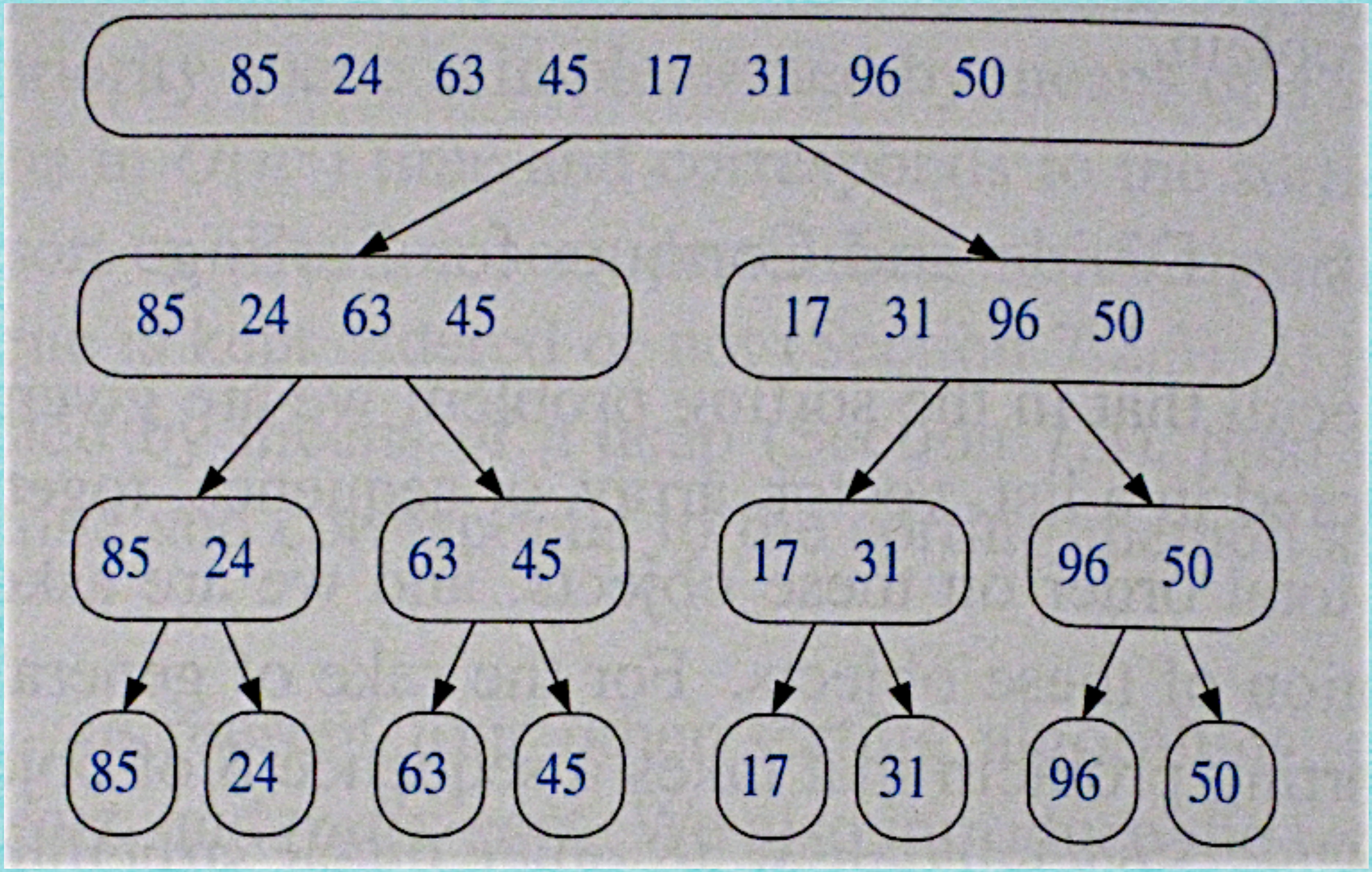
Sortieren von Objekten

Gegeben: n Objekte unterschiedlicher Größe

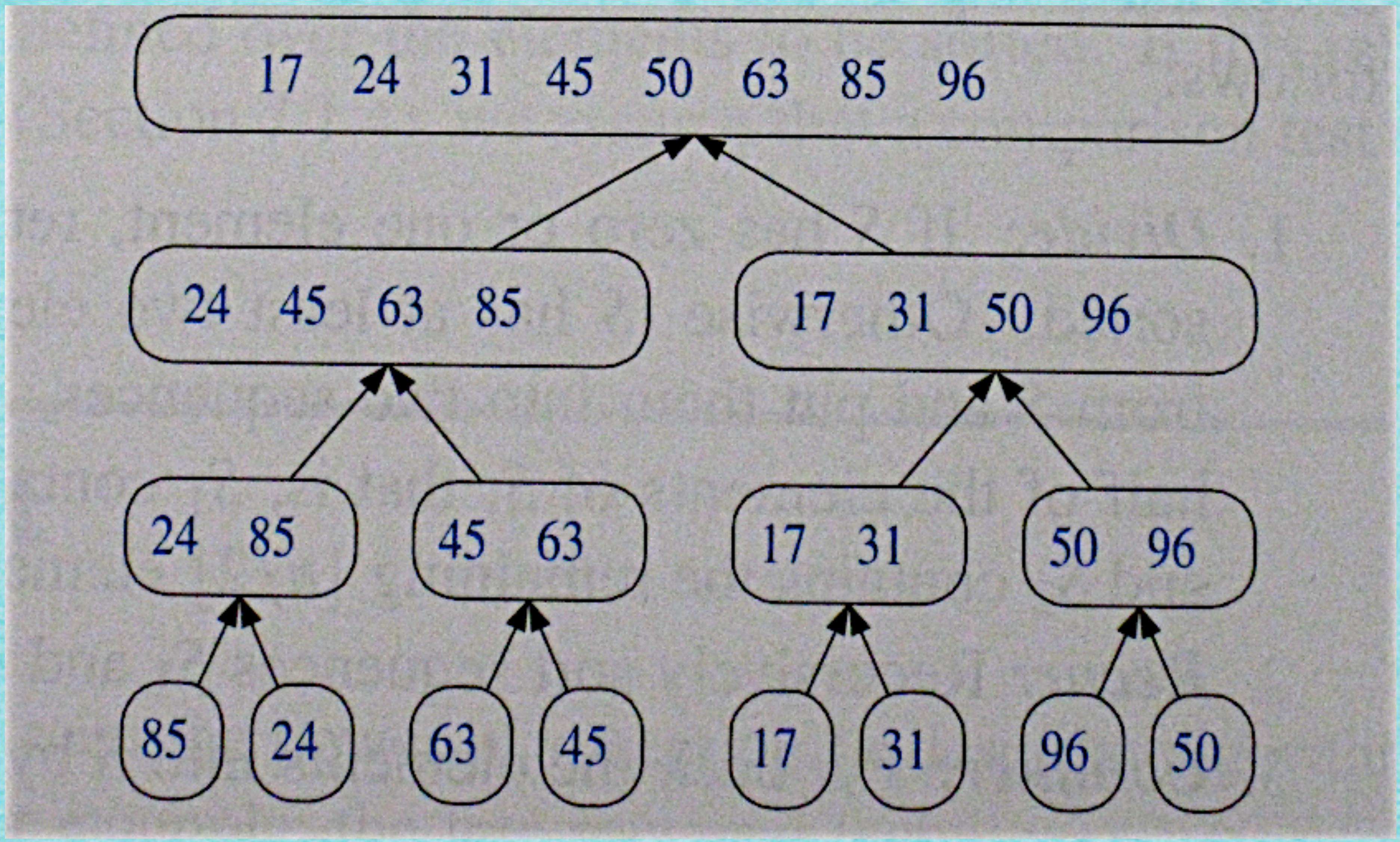
13 15 17 19 23 28 33

Zahl der Vergleiche: $O(n \log n)$

5.1 Mergesort



5.1 Mergesort



5.1.2 Algorithmische Beschreibung

Algorithmus 5.1

<u>INPUT:</u> Subarray von A=[1,...,n],
der bei Index p beginnt und bei Index r endet, d.h. A[p,...,r]

<u>OUTPUT:</u> Sortierter Subarray

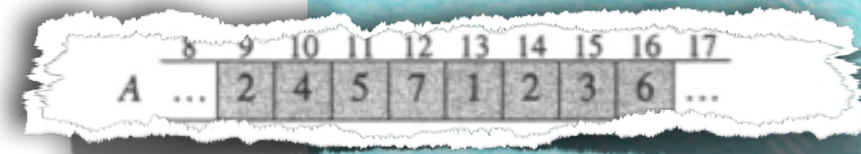
MERGE-SORT(A,p,r)

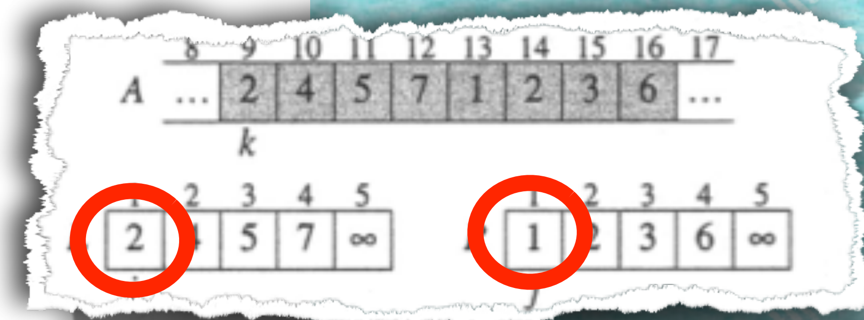
if $p < r$
  then $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
    MERGE-SORT(A, p, q)
    MERGE-SORT$(A, q+1, r)$
    MERGE(A, p, q, r)

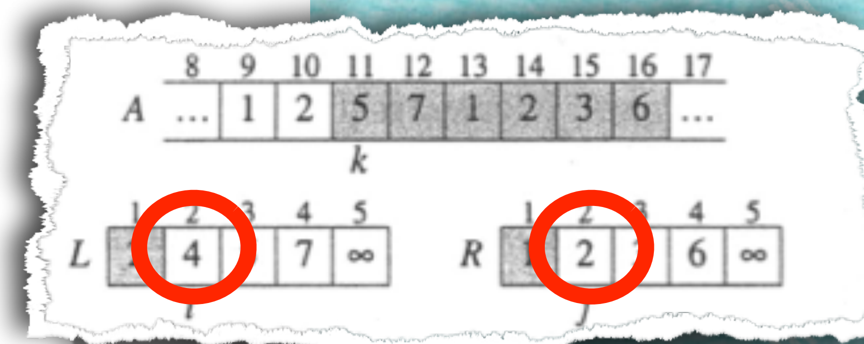
Subroutine 5.2

INPUT:	Zwei sortierte Subarrays von A=[1,...,n], d.h. A[p,...,q] und A[q+1,...,r]
OUTPUT:	Sortierter Subarray A[p,...,r]

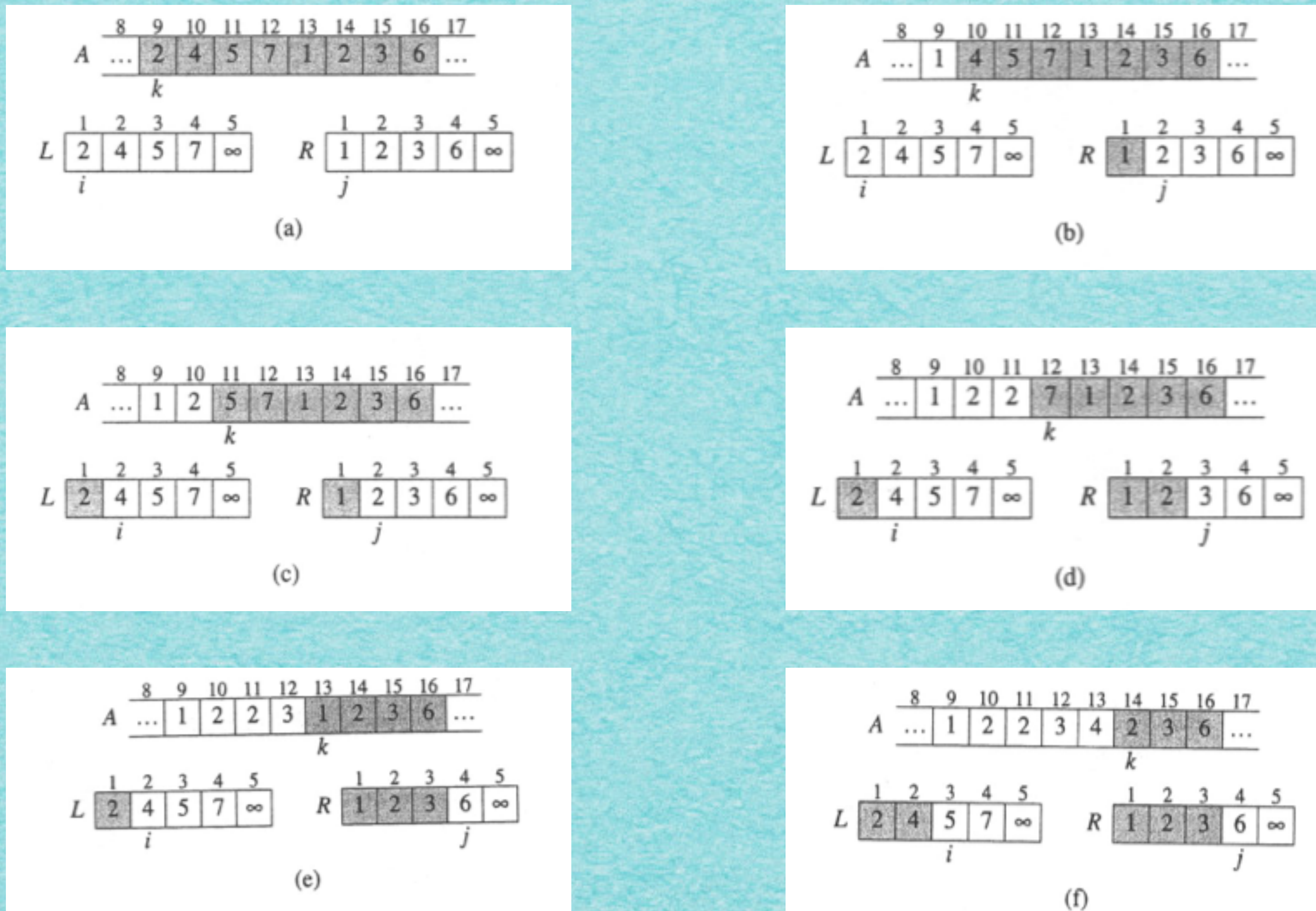
```
MERGE(A, p, q, r)
n1 ← q − p + 1
n2 ← r − q
erzeuge die Felder L[1 . . n1 + 1] und R[1 . . n2 + 1]
for i ← 1 to n1
        do L[i] ← A[p + i − 1]
for j ← 1 to n2
        do R[j] ← A[q + j]
L[n1 + 1] ← ∞
R[n2 + 1] ← ∞
i ← 1
j ← 1
for k ← p to r
        do if L[i] ≤ R[j]
              then A[k] ← L[i]
                   i ← i + 1
              else A[k] ← R[j]
                   j ← j + 1
```

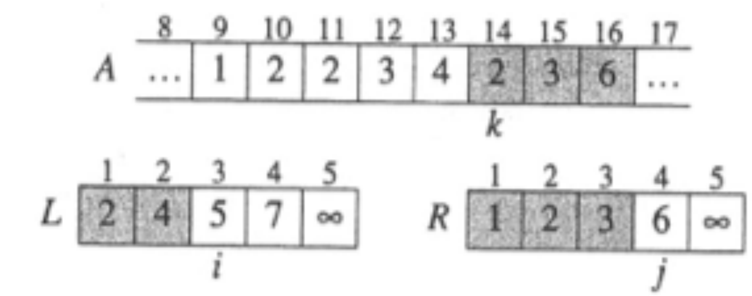




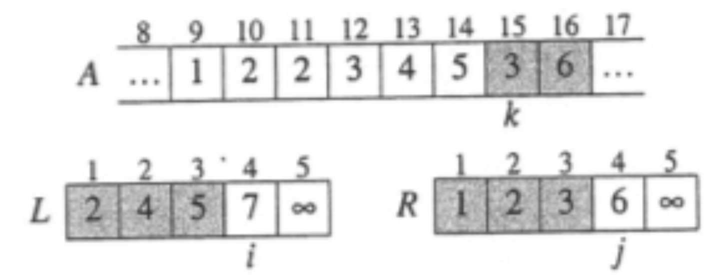


5.1 Mergesort

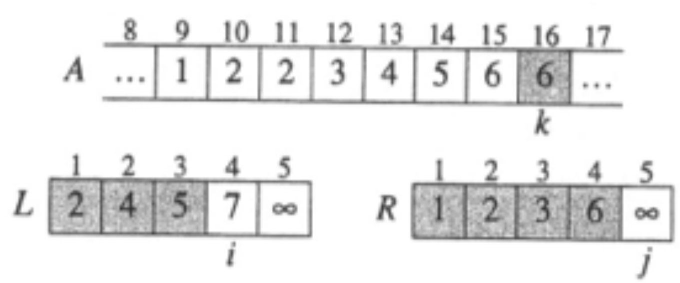



8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
A … 1 2 2 3 4 2 3 6 …
k
1 2 3 4 5
L 2 4 5 7 ∞
i
1 2 3 4 5
R 1 2 3 6 ∞
j

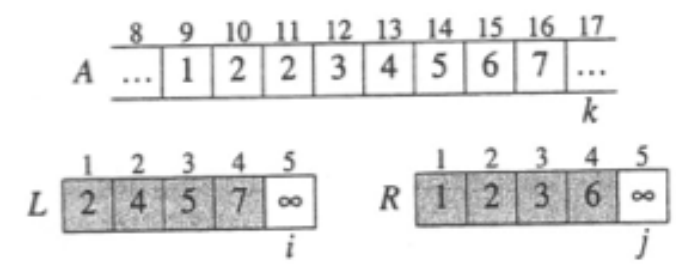
(f)


8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
A … 1 2 2 3 4 5 3 6 …
k
1 2 3 4 5
L 2 4 5 7 ∞
i
1 2 3 4 5
R 1 2 3 6 ∞
j

(g)


8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
A … 1 2 2 3 4 5 6 6 …
k
1 2 3 4 5
L 2 4 5 7 ∞
i
1 2 3 4 5
R 1 2 3 6 ∞
j

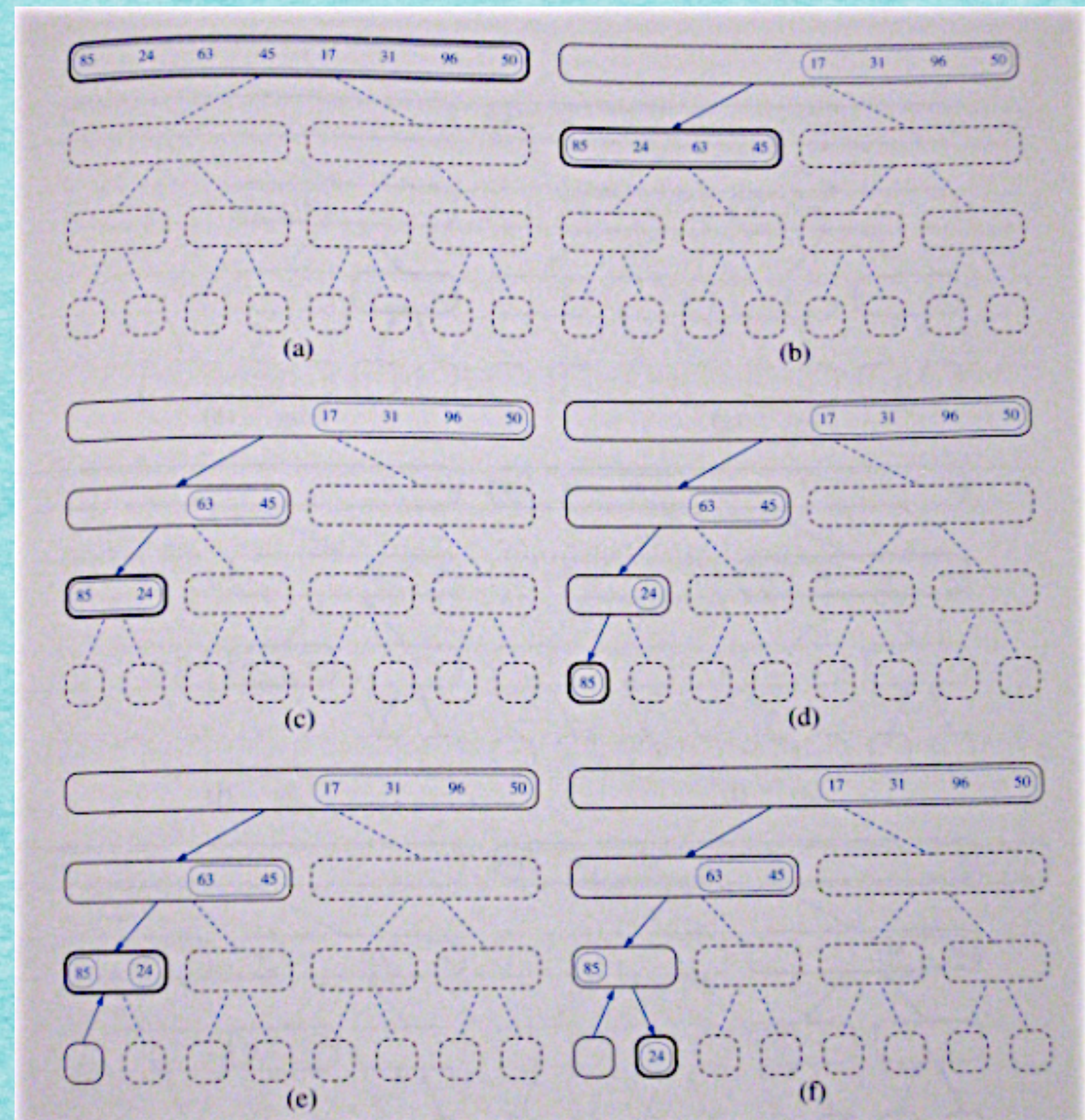
(h)


8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
A … 1 2 2 3 4 5 6 7 …
k
1 2 3 4 5
L 2 4 5 7 ∞
i
1 2 3 4 5
R 1 2 3 6 ∞
j

(i)

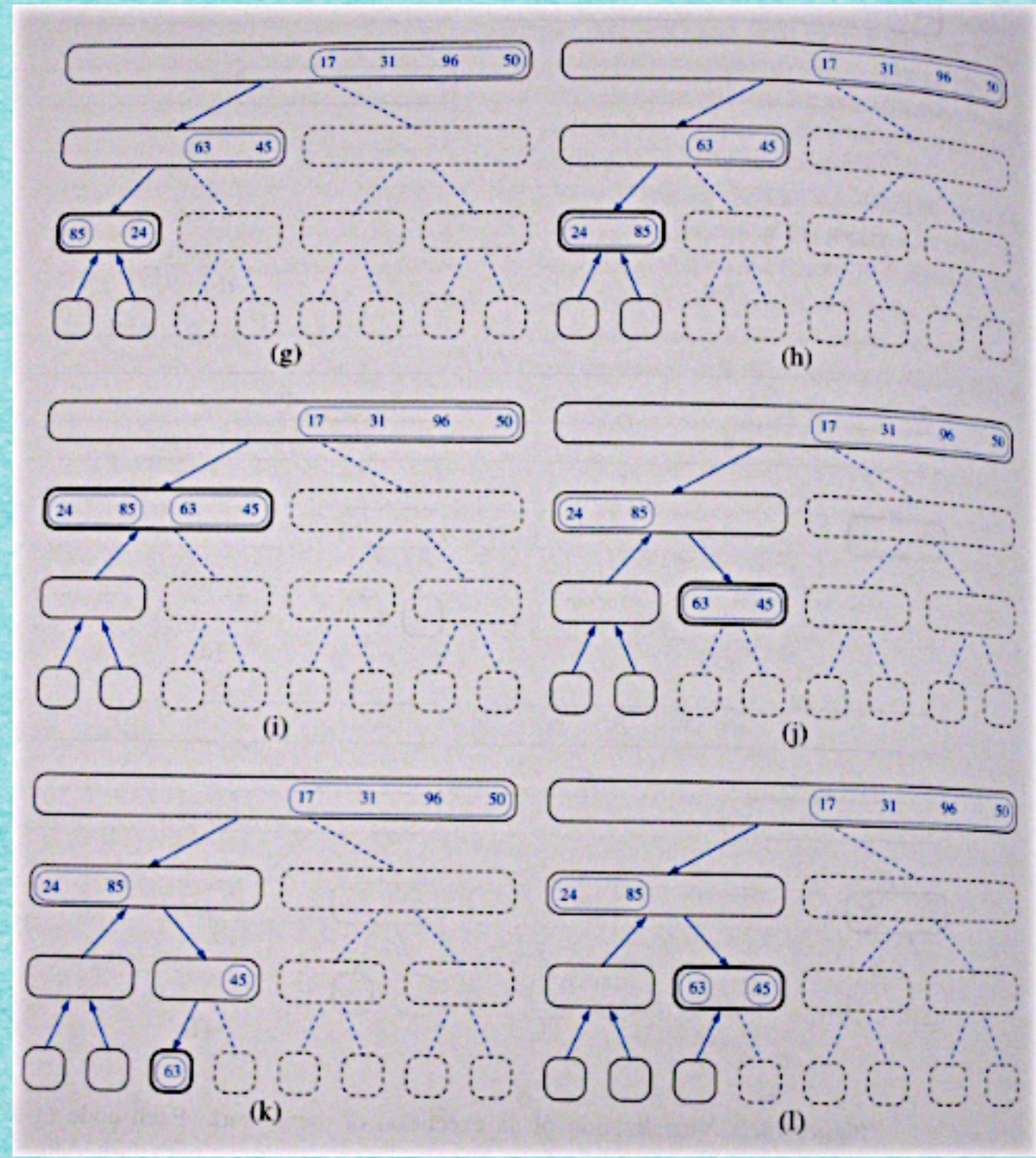
Ablauf makroskopisch

```
if p < r
   then q ← ⌊(p + r)/2⌋
        MERGE-SORT(A, p, q)
        MERGE-SORT(A, q + 1, r)
        MERGE(A, p, q, r)
```



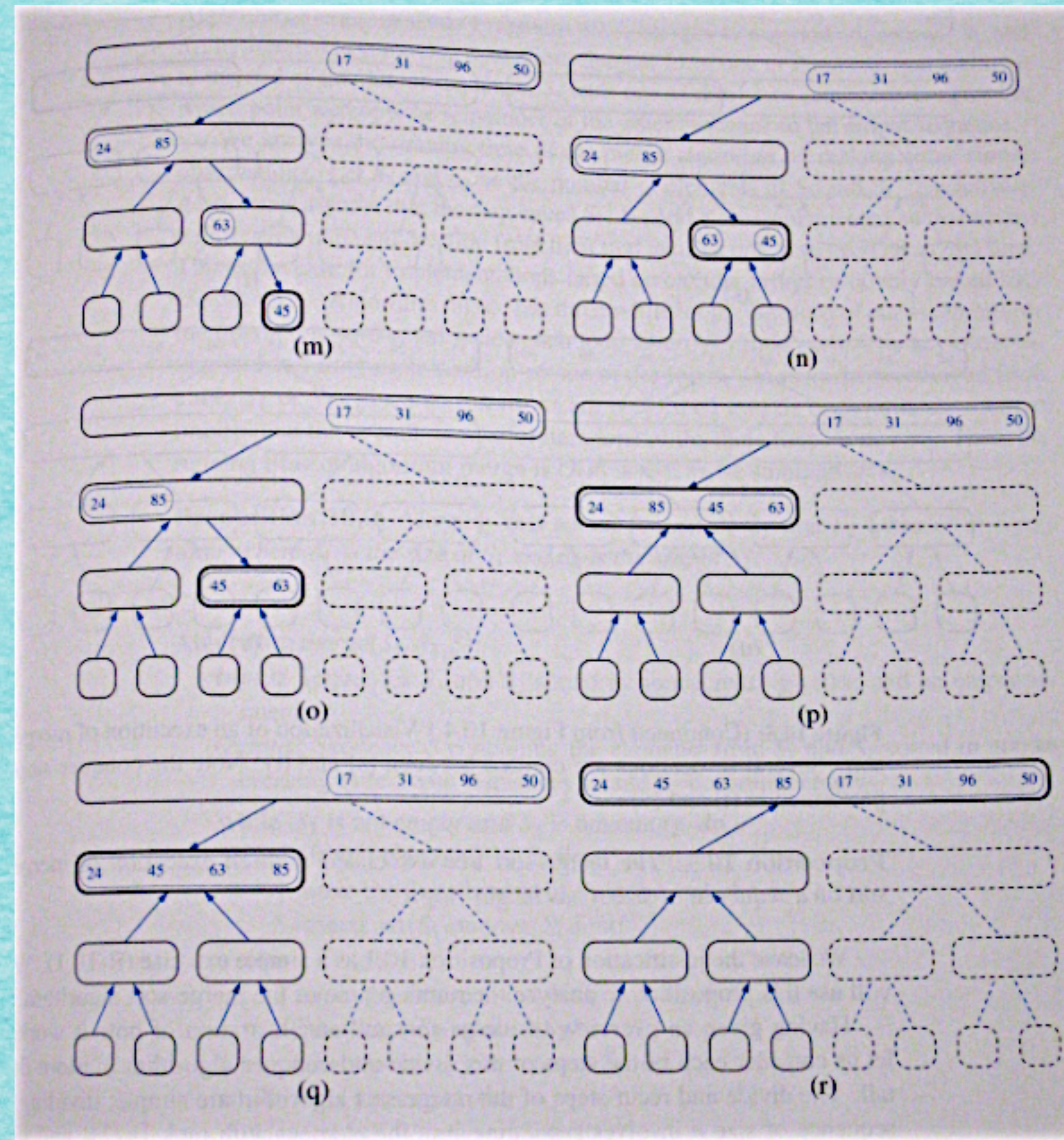
Ablauf makroskopisch

```
if p < r
    then q ← ⌊(p + r)/2⌋
         MERGE-SORT(A, p, q)
         MERGE-SORT(A, q + 1, r)
         MERGE(A, p, q, r)
```



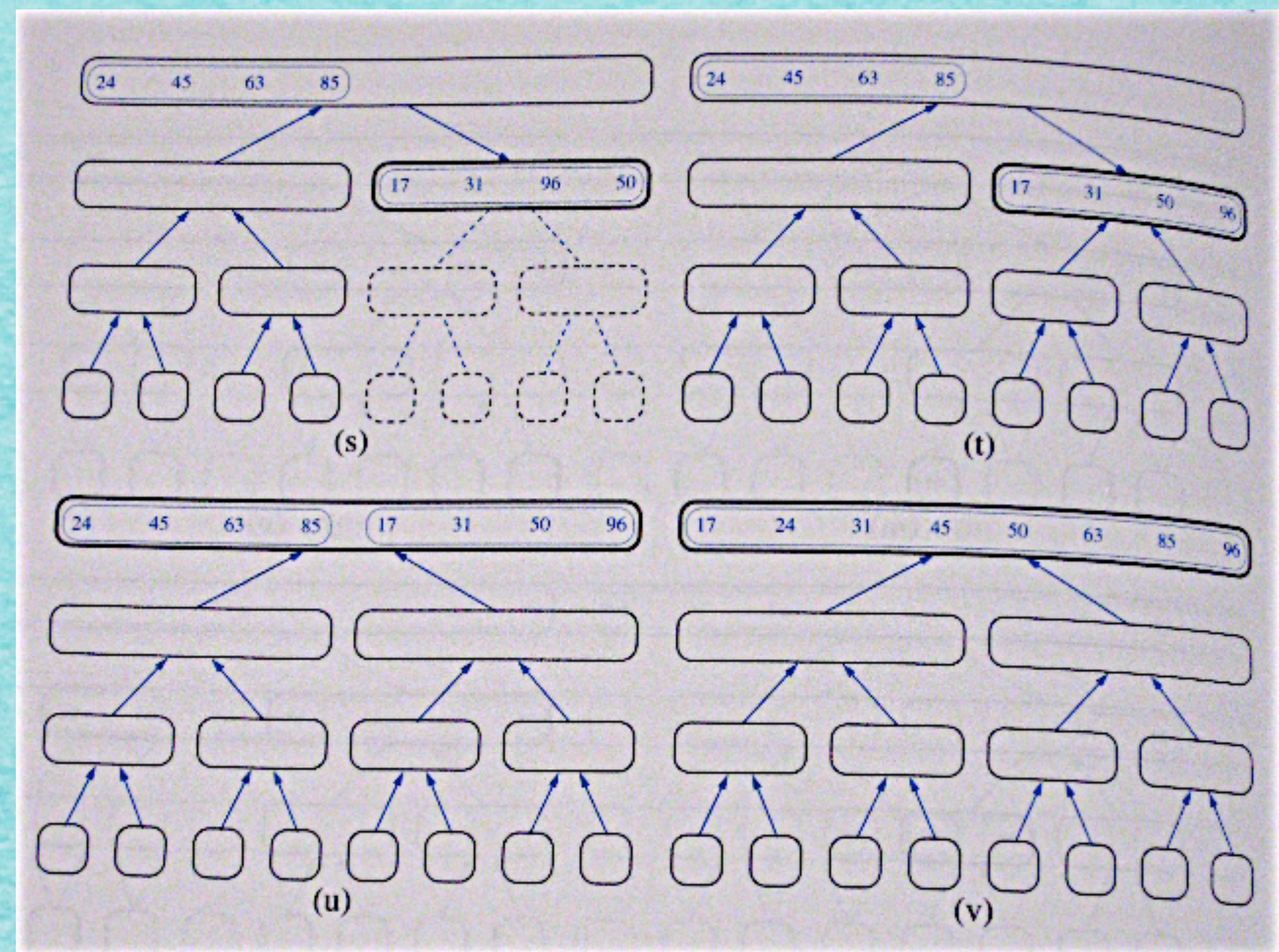
Ablauf makroskopisch

```
if p < r
    then q ← ⌊(p + r)/2⌋
         MERGE-SORT(A, p, q)
         MERGE-SORT(A, q + 1, r)
         MERGE(A, p, q, r)
```



Ablauf makroskopisch

```
if p < r
    then q ← ⌊(p + r)/2⌋
         MERGE-SORT(A, p, q)
         MERGE-SORT(A, q + 1, r)
         MERGE(A, p, q, r)
```

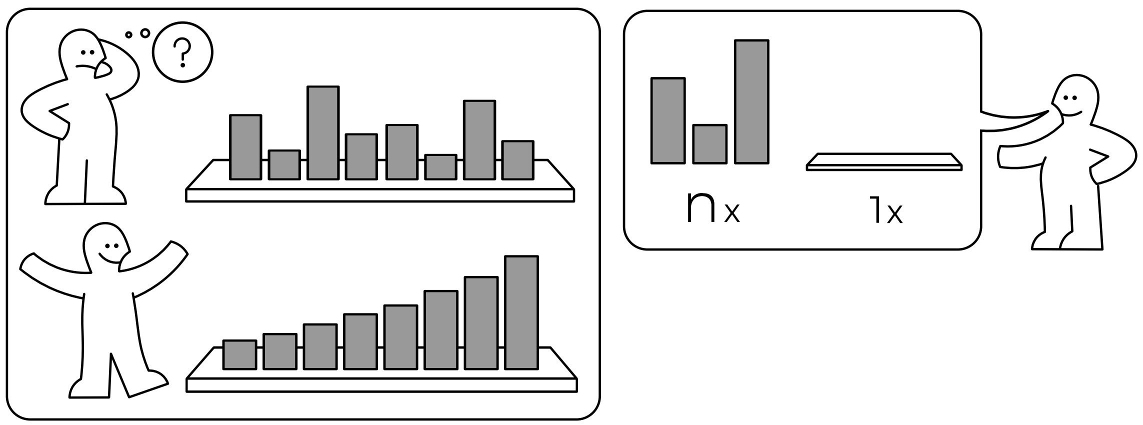


5.1 Mergesort

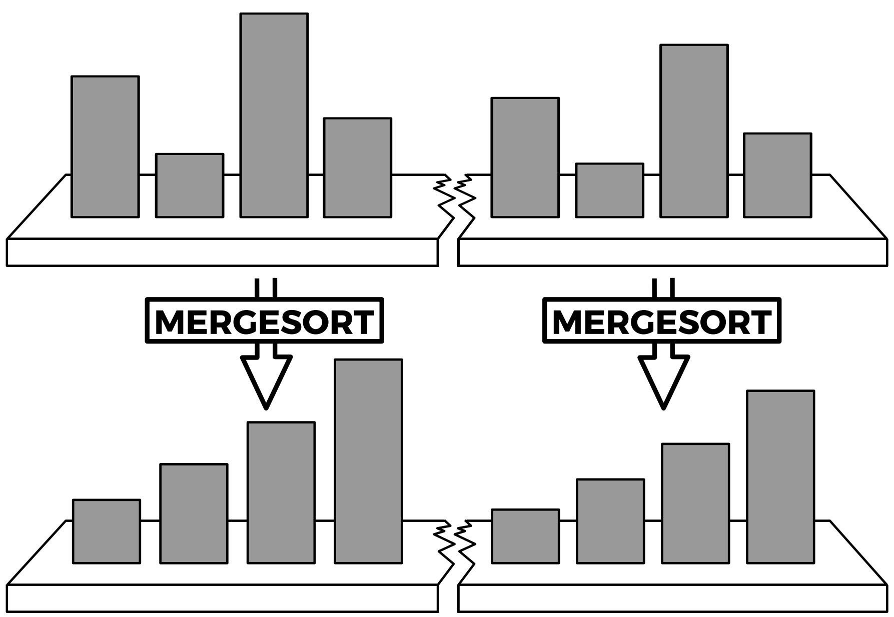
MERGE SÖRT

idea-instructions.com/merge-sort/

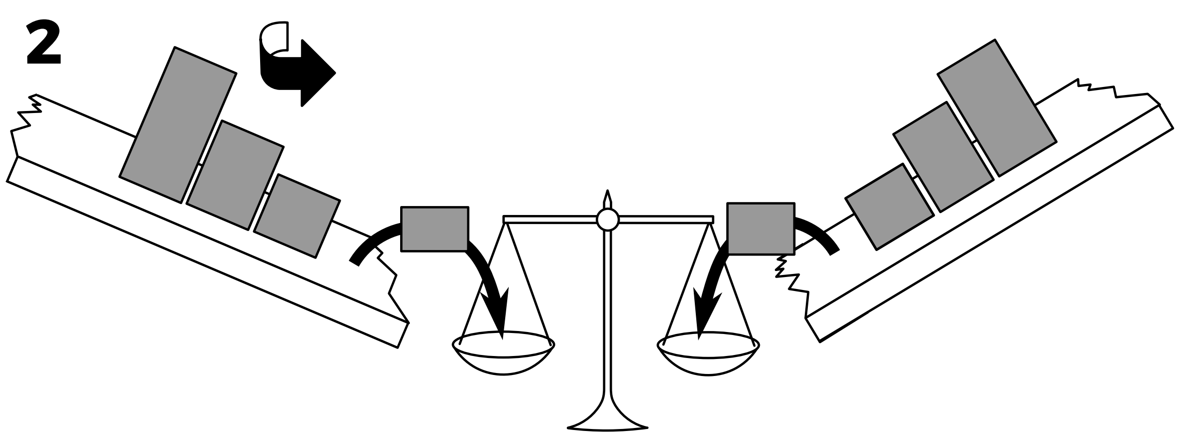
IDEA



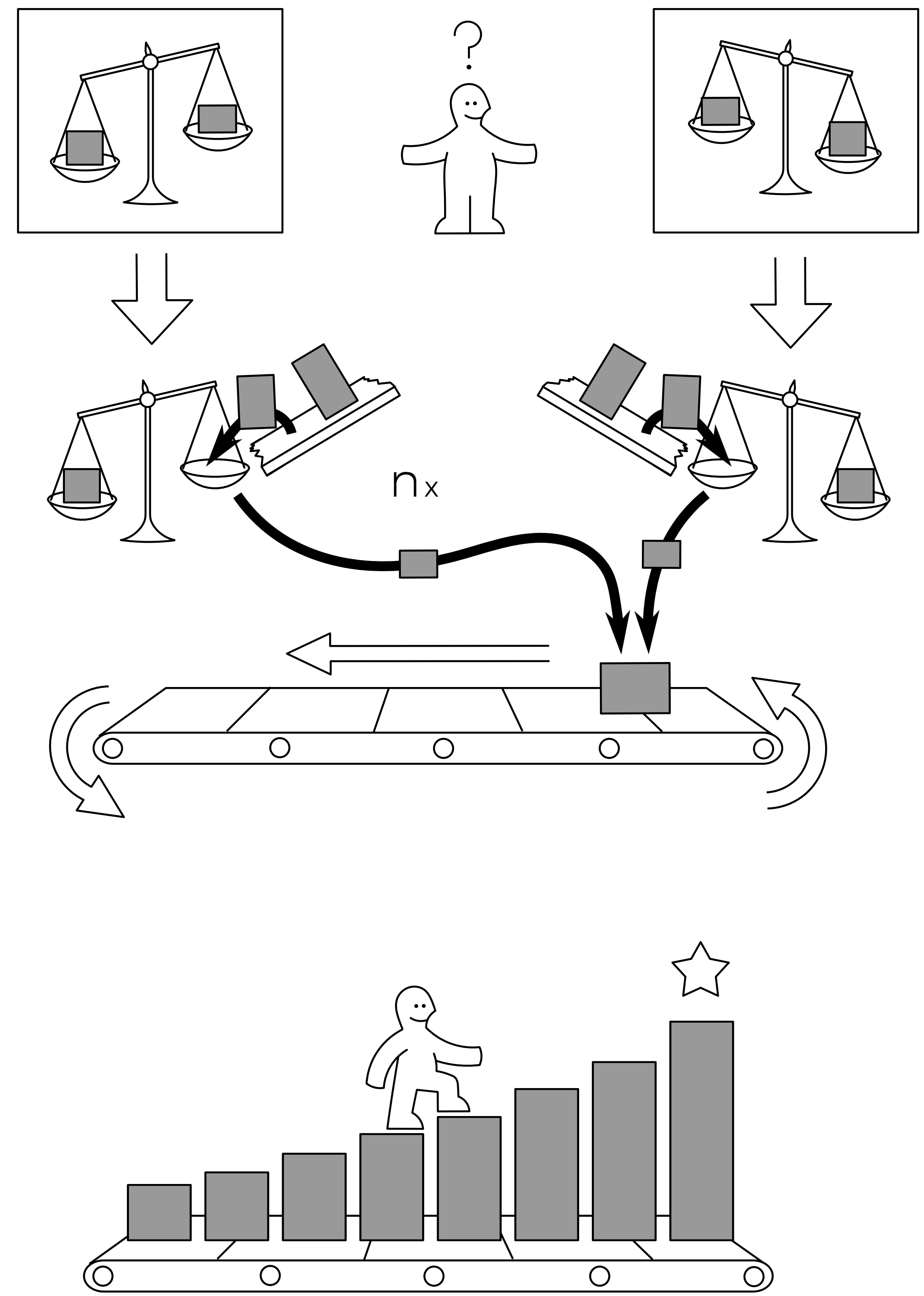
1



2



3



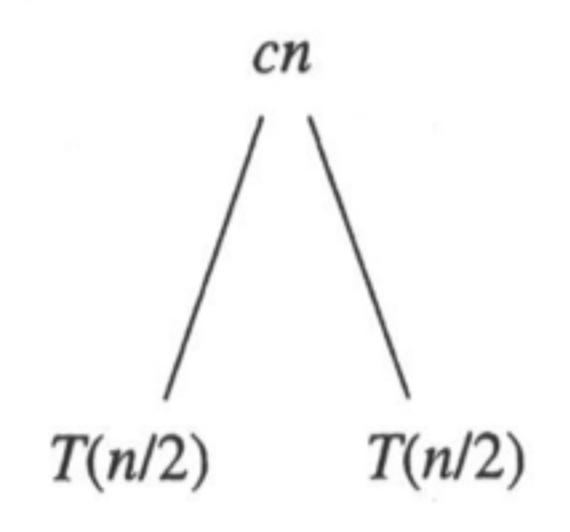
5.1.3 Laufzeit von Mergesort

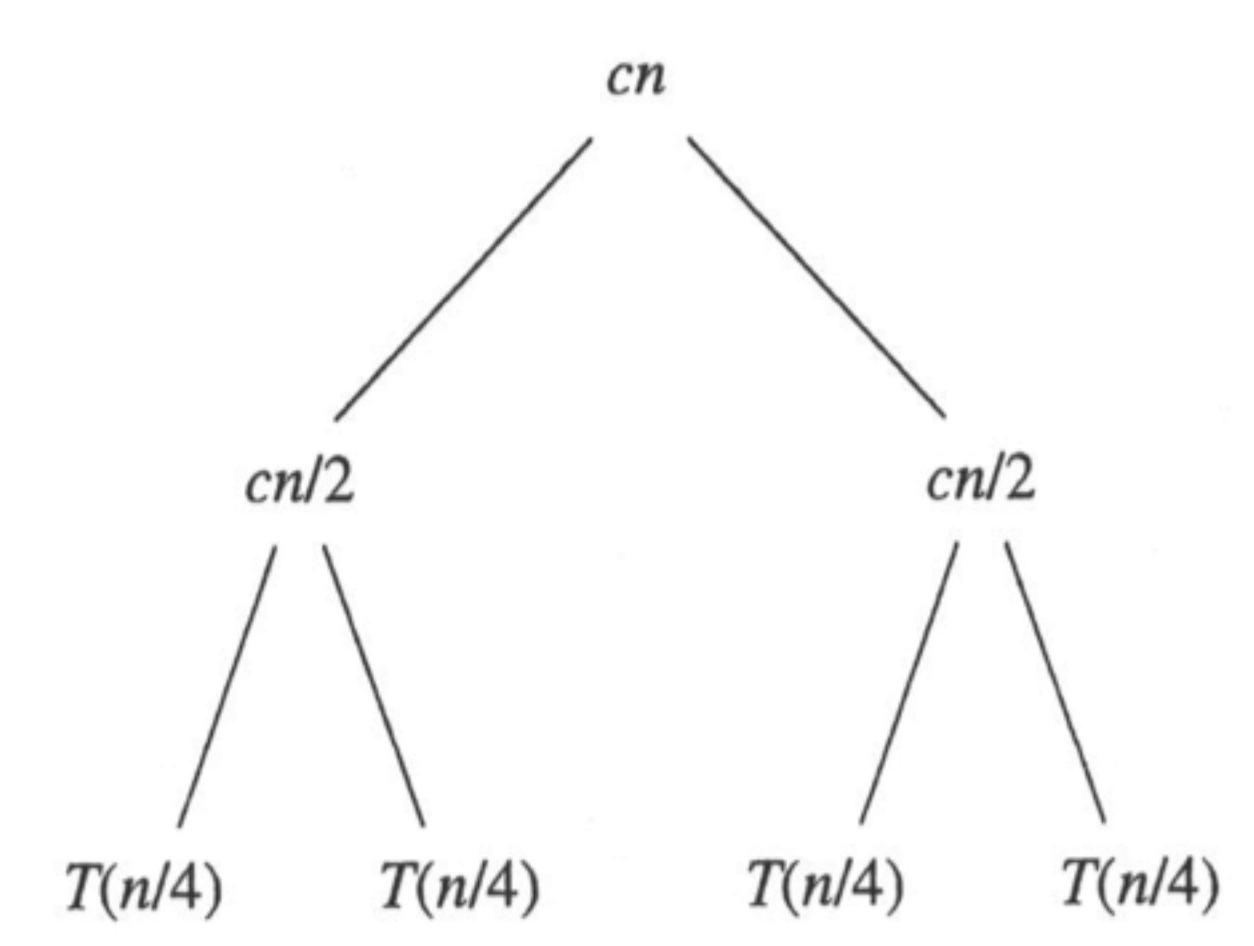
Wie viele Schritte benötigt Merge-Sort für einen Array der Länge n?

$$T(n)$$

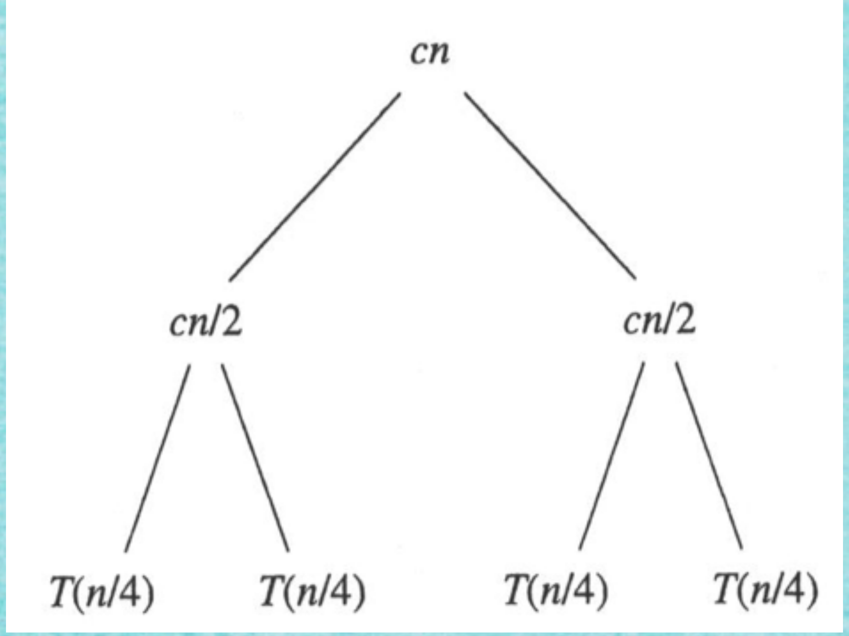
5.1.3 Laufzeit von Mergesort

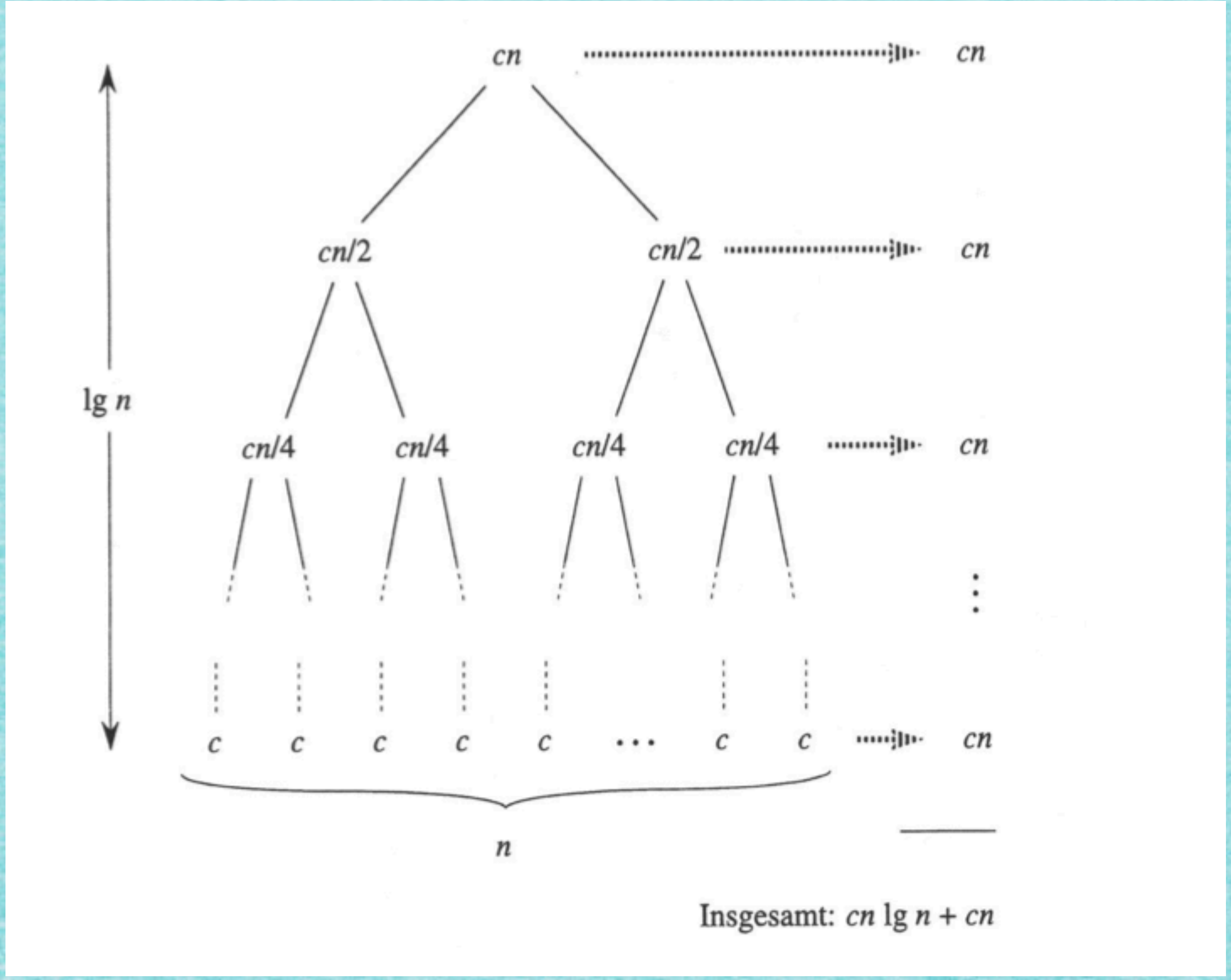
$T(n)$





5.1.3 Laufzeit von Mergesort





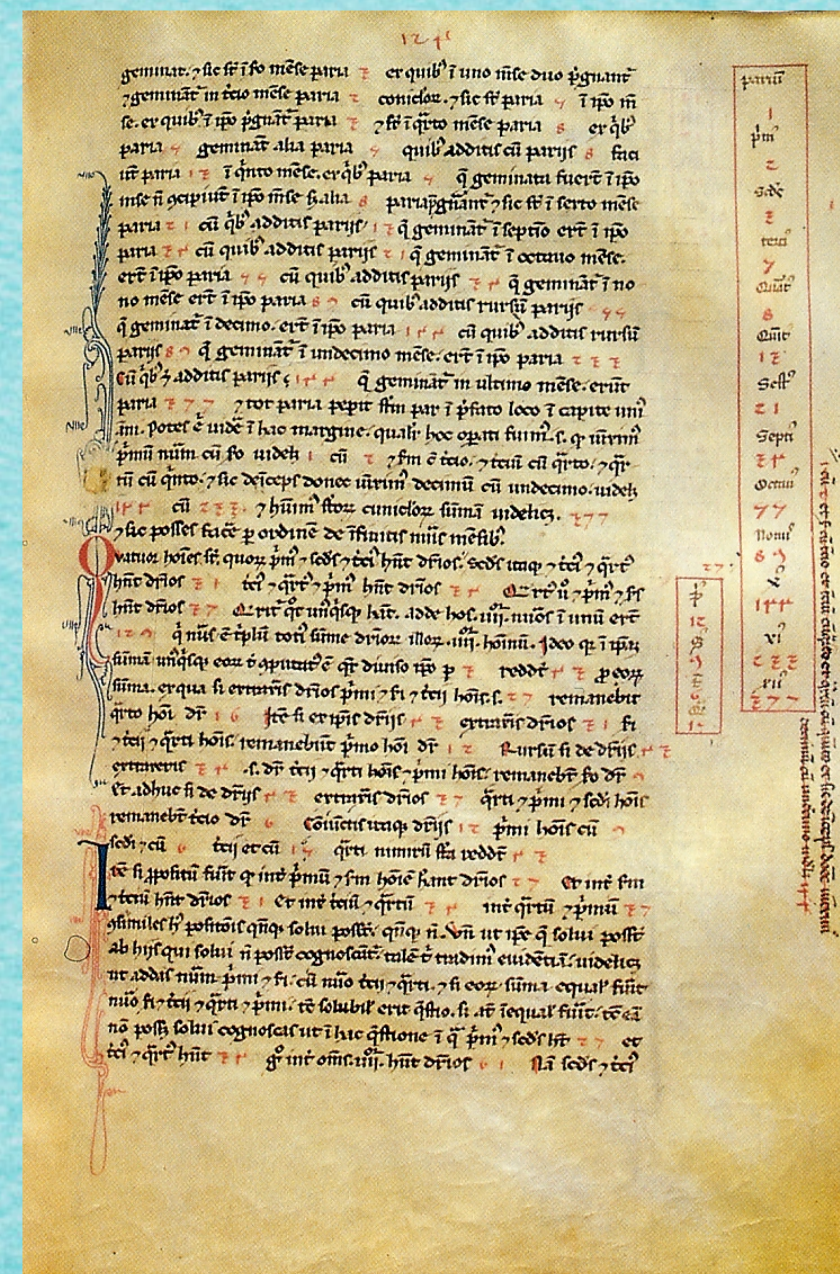
<u>Satz 5.3 (Komplexität von Mergesort)</u>
Für einen n-elementigen Array A hat Mergesort eine Laufzeit von O(n log n).

Mehr an der Tafel!

s.fekete@tu-bs.de

5.2 Fibonacci-Zahlen

Leonardo da Pisa,
gen. Fibonacci
1180-1241



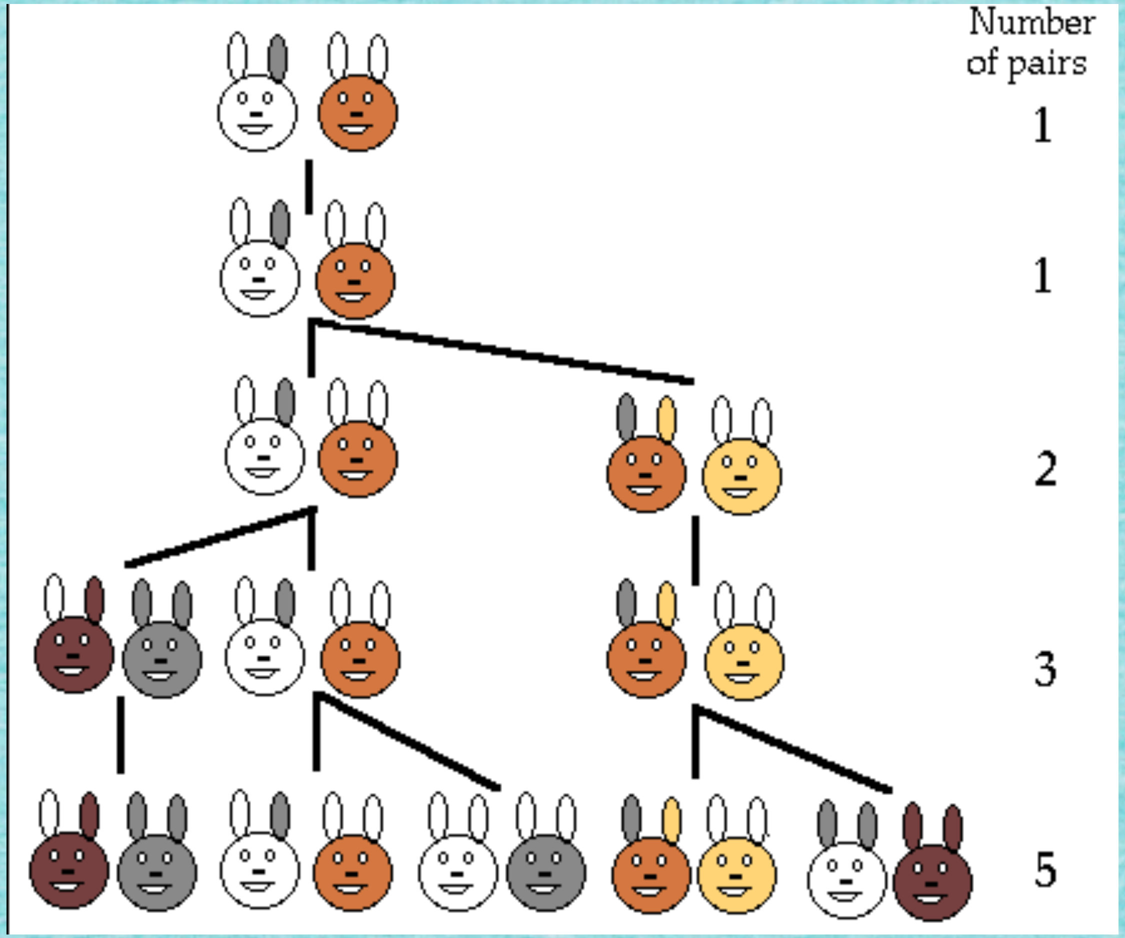
Fibonacci-Zahlen

$$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen

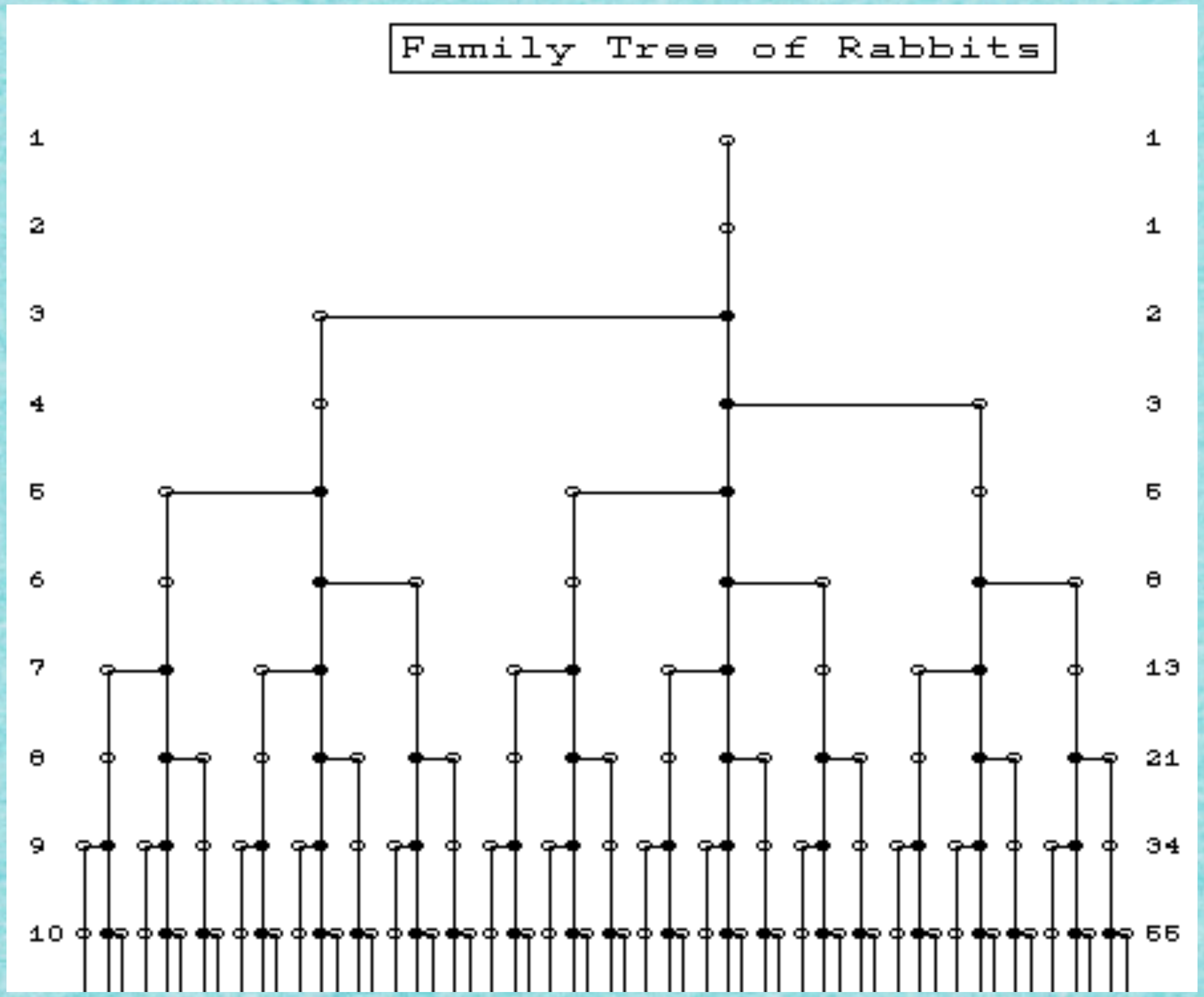
$$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen



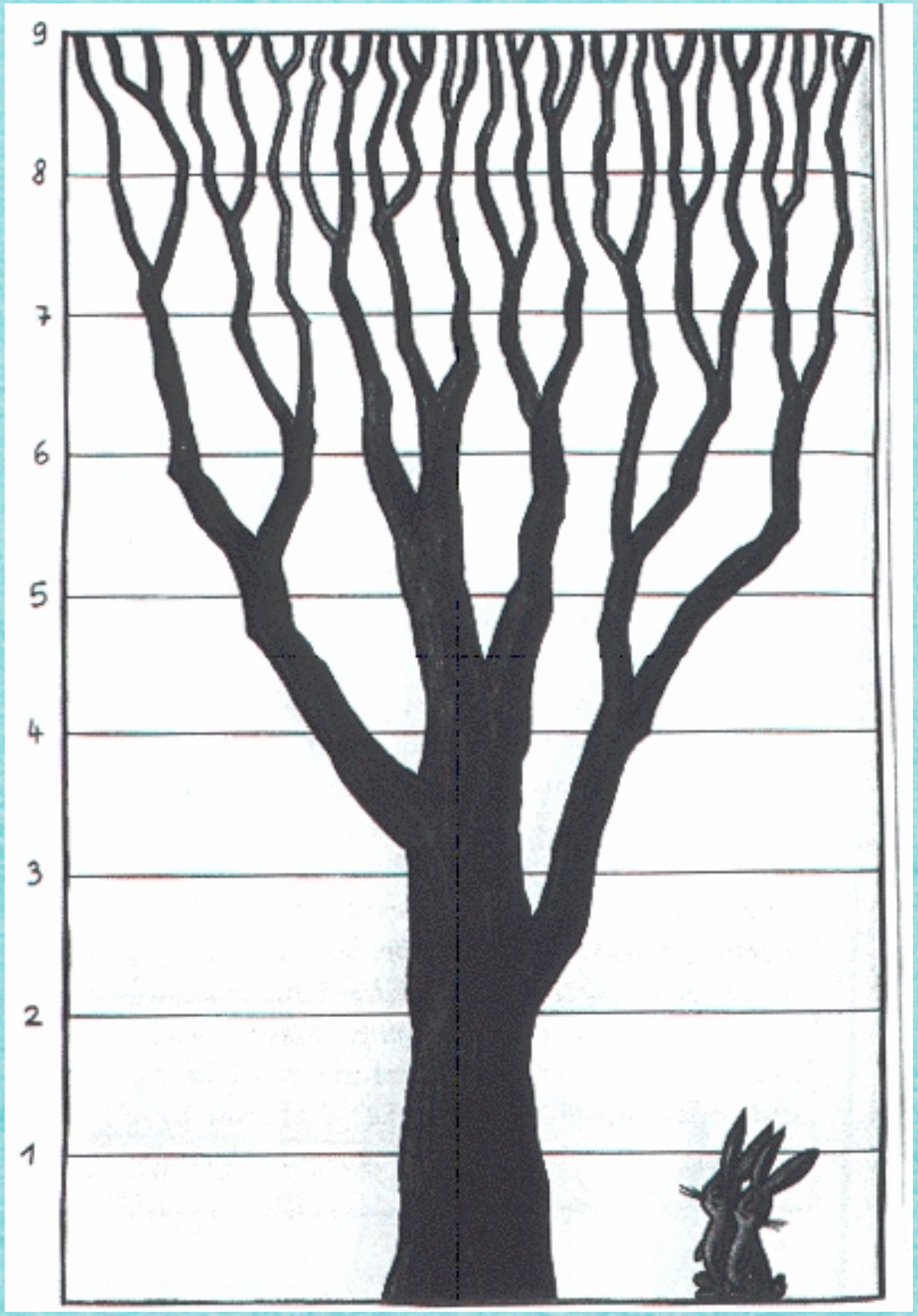
$$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$$

Fibonacci-Zahlen

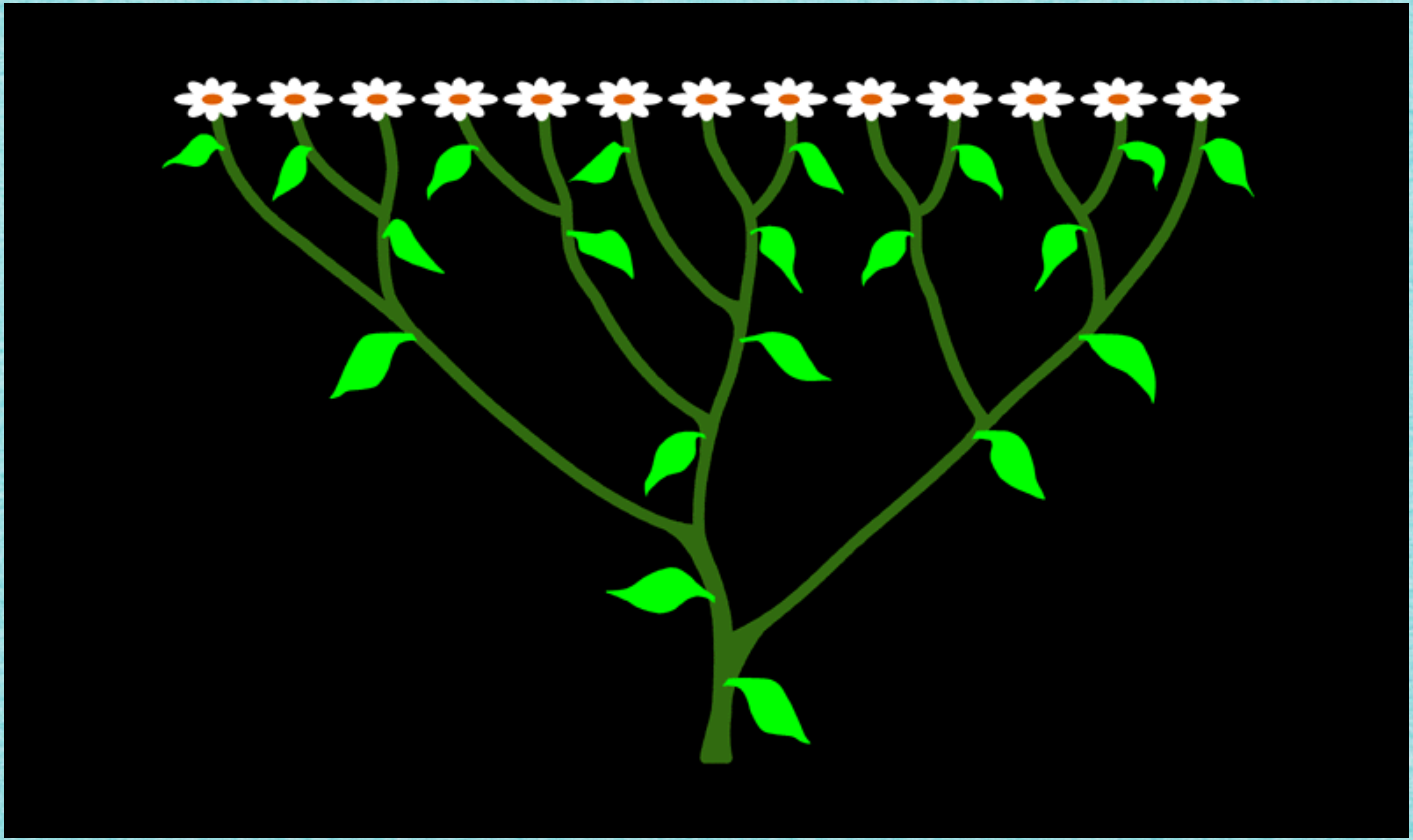


$$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$$

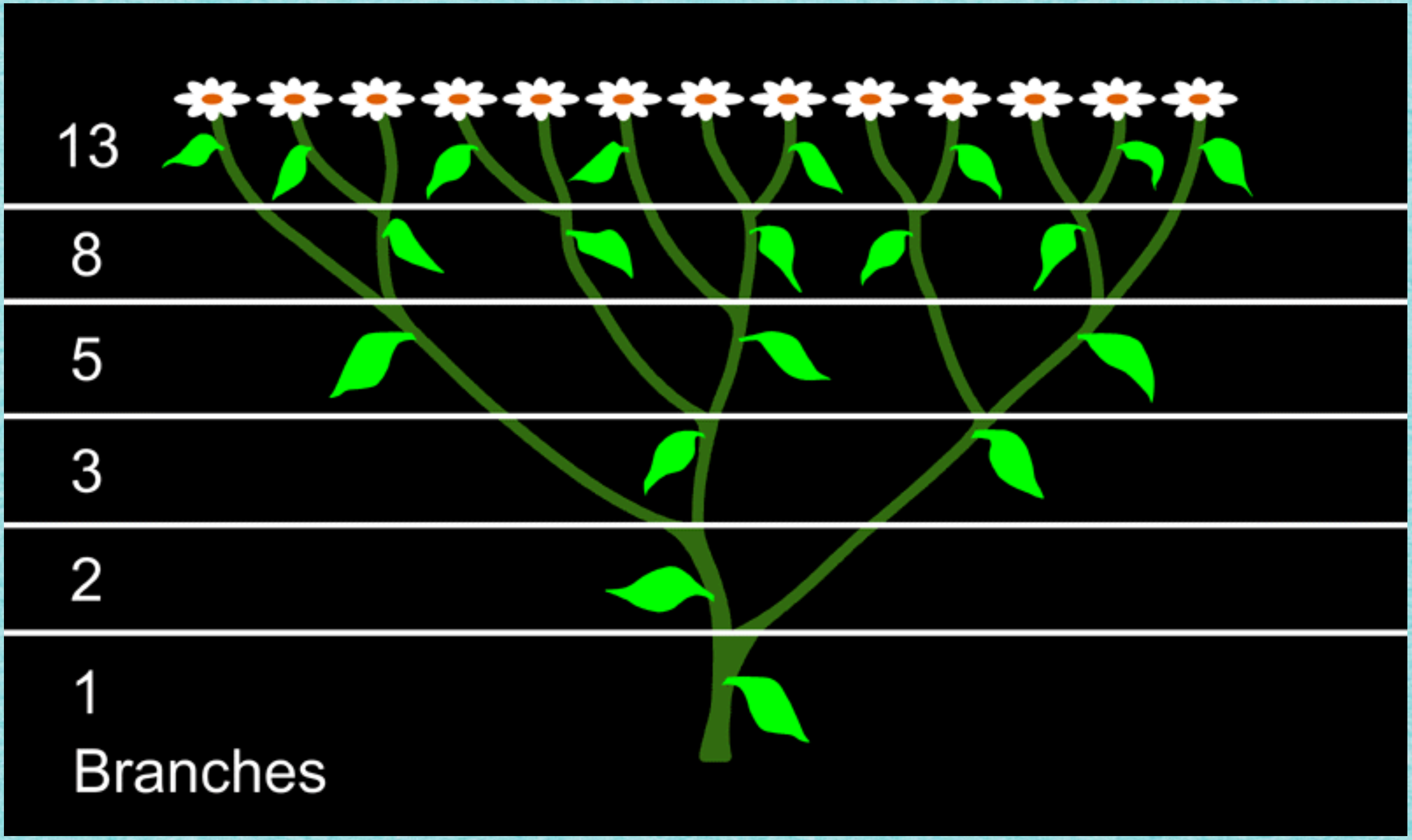
Fibonacci-Zahlen



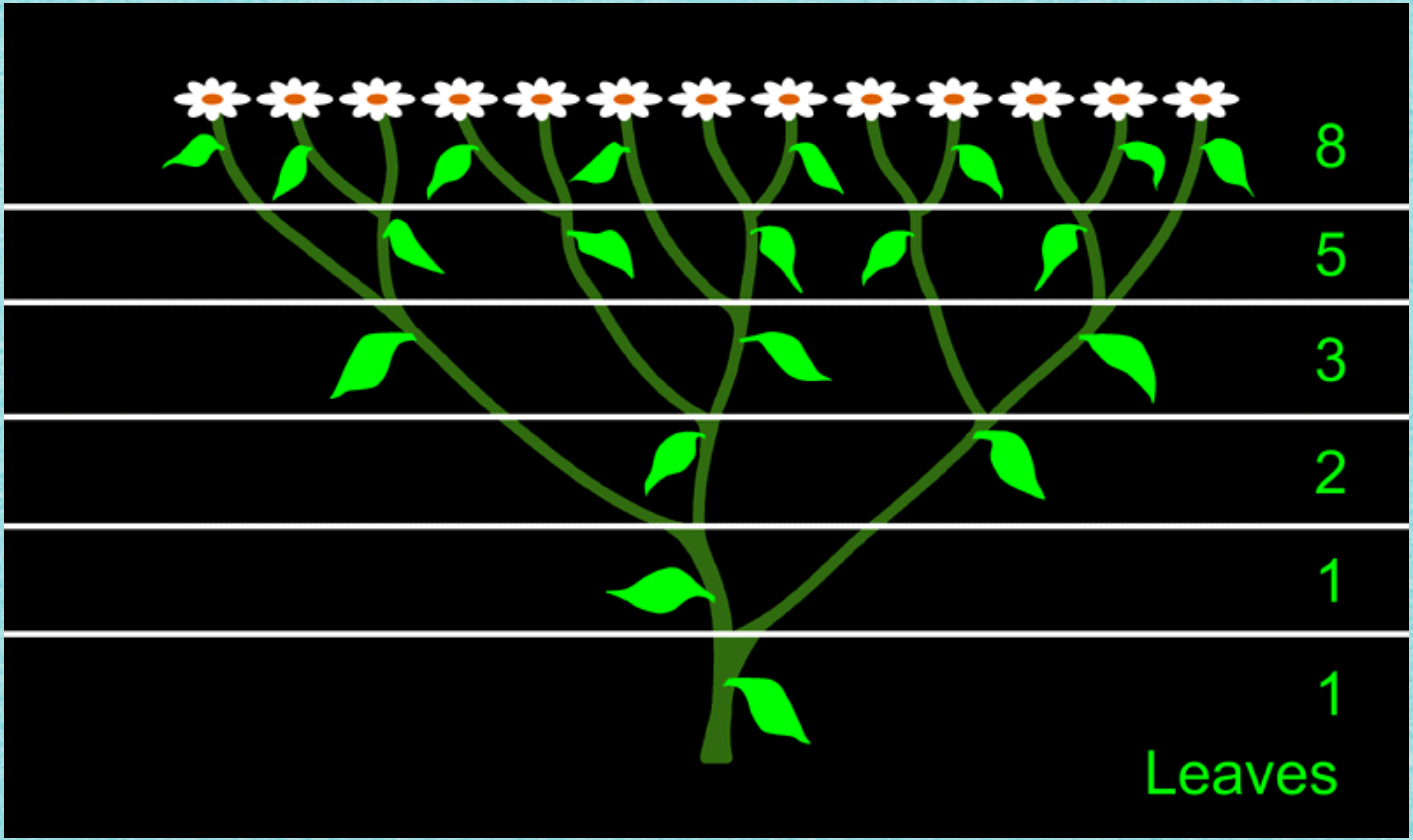
Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

1

Fibonacci-Zahlen

2

Fibonacci-Zahlen

3

Fibonacci-Zahlen

5

Fibonacci-Zahlen

8

Fibonacci-Zahlen

13

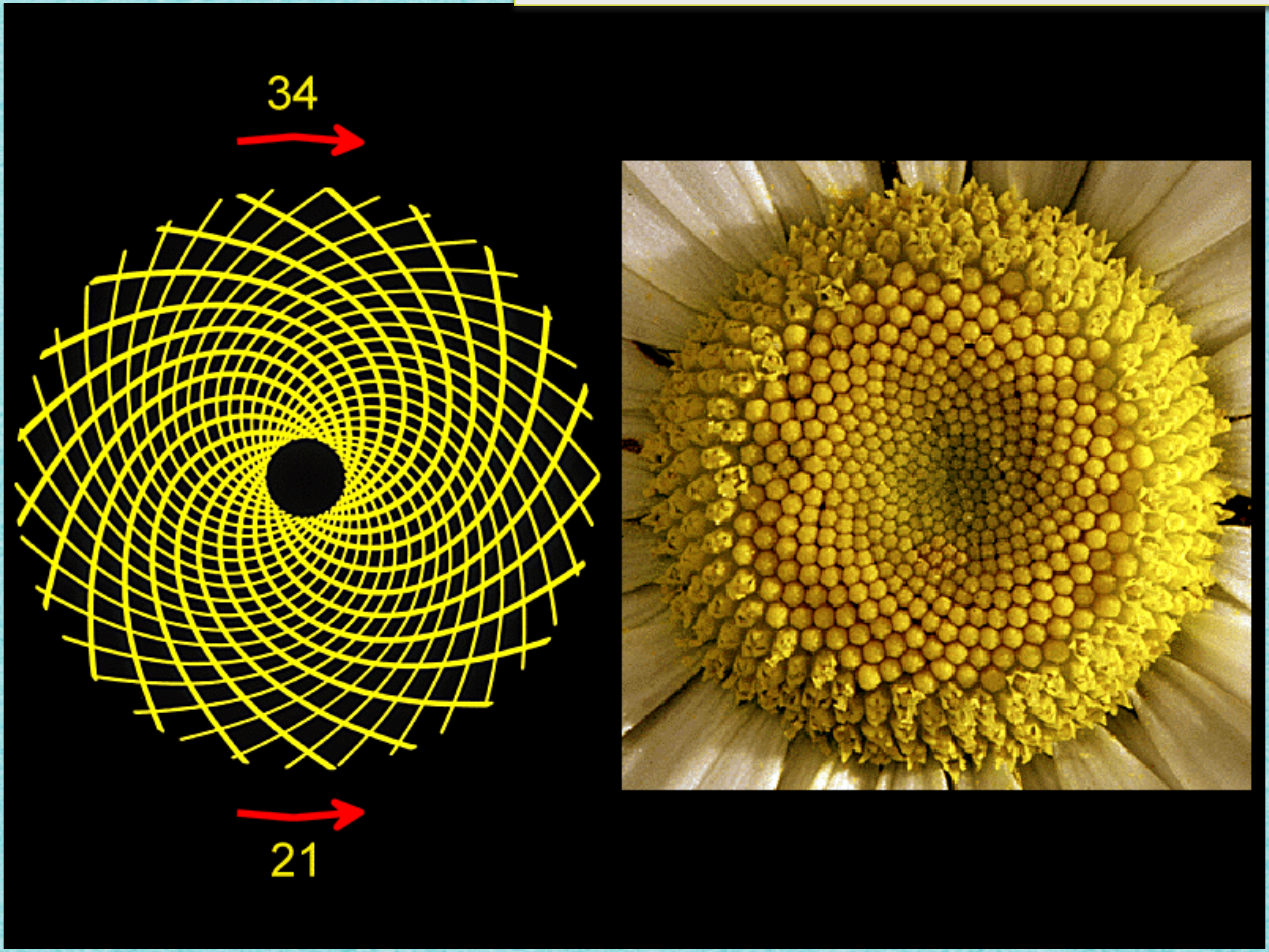
Fibonacci-Zahlen

21

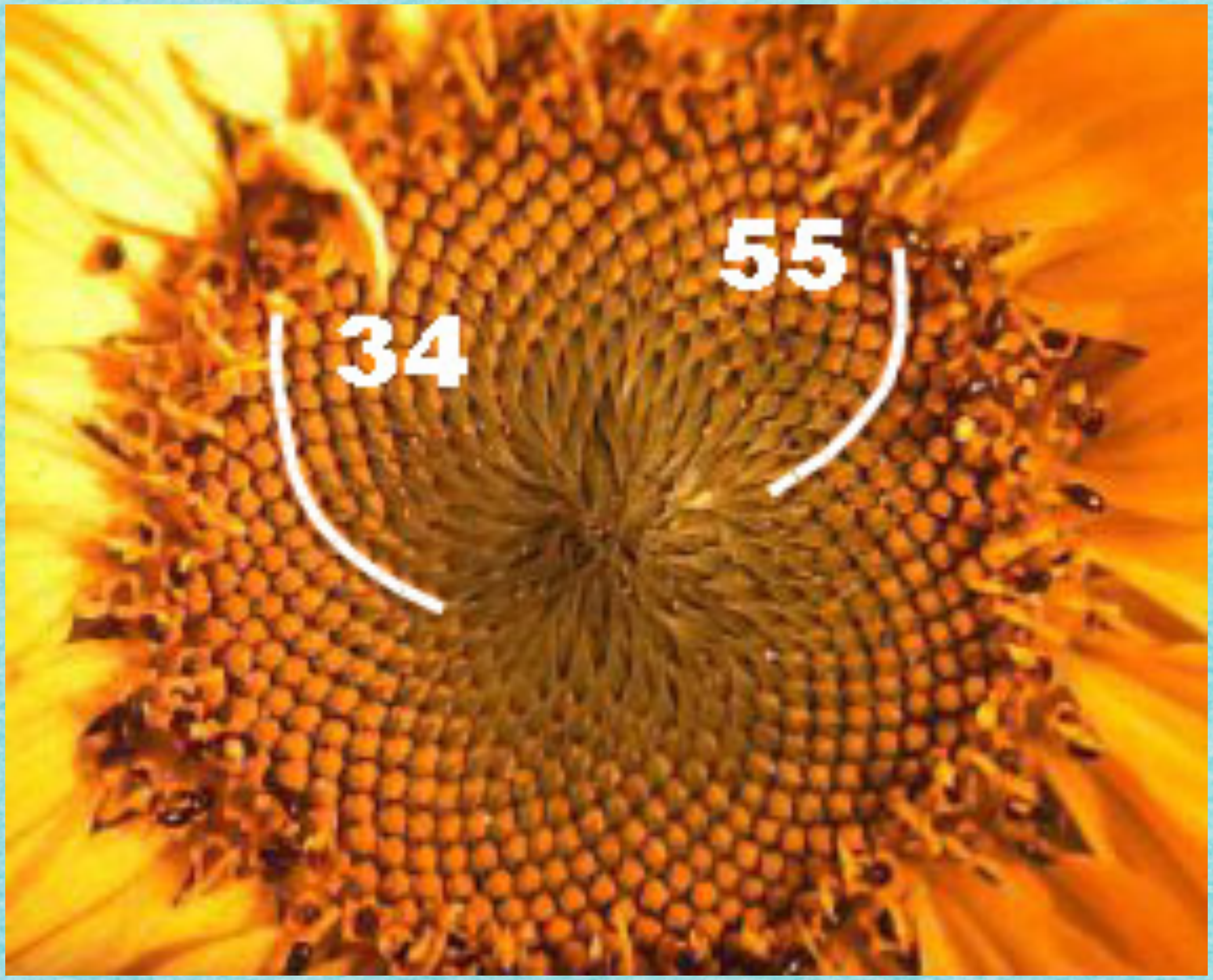
Fibonacci-Zahlen

34

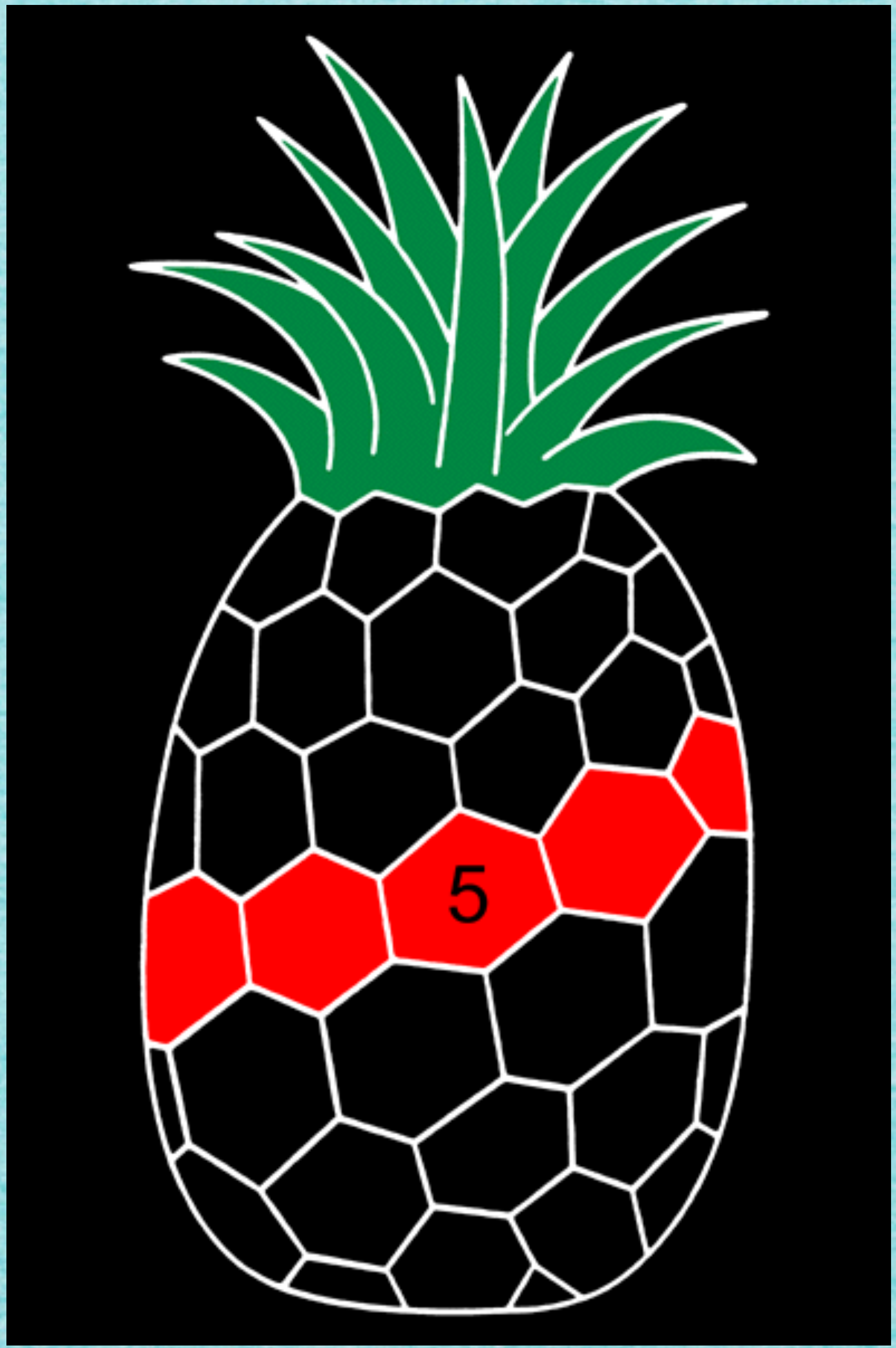
Fibonacci-Zahlen



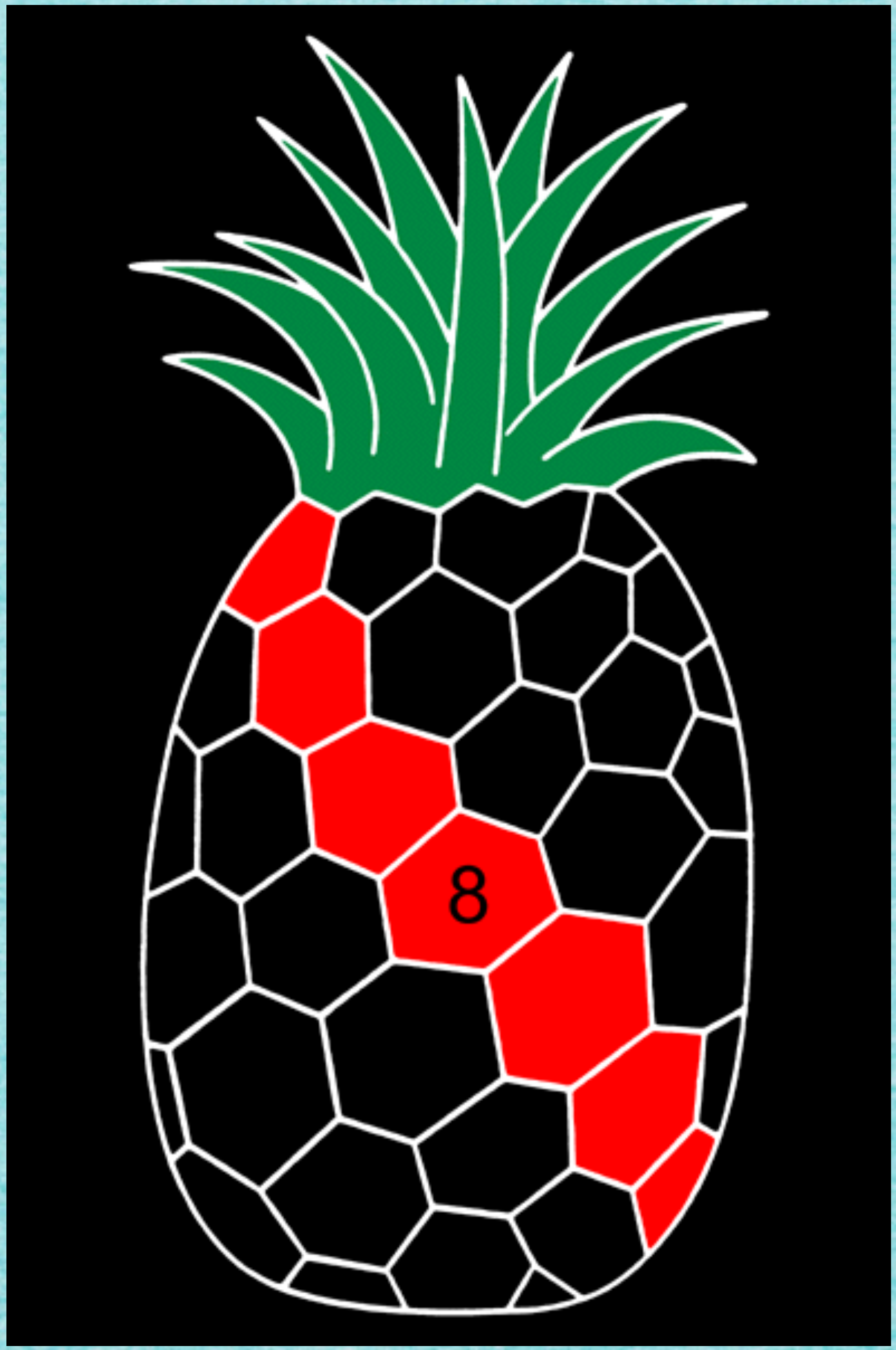
Fibonacci-Zahlen



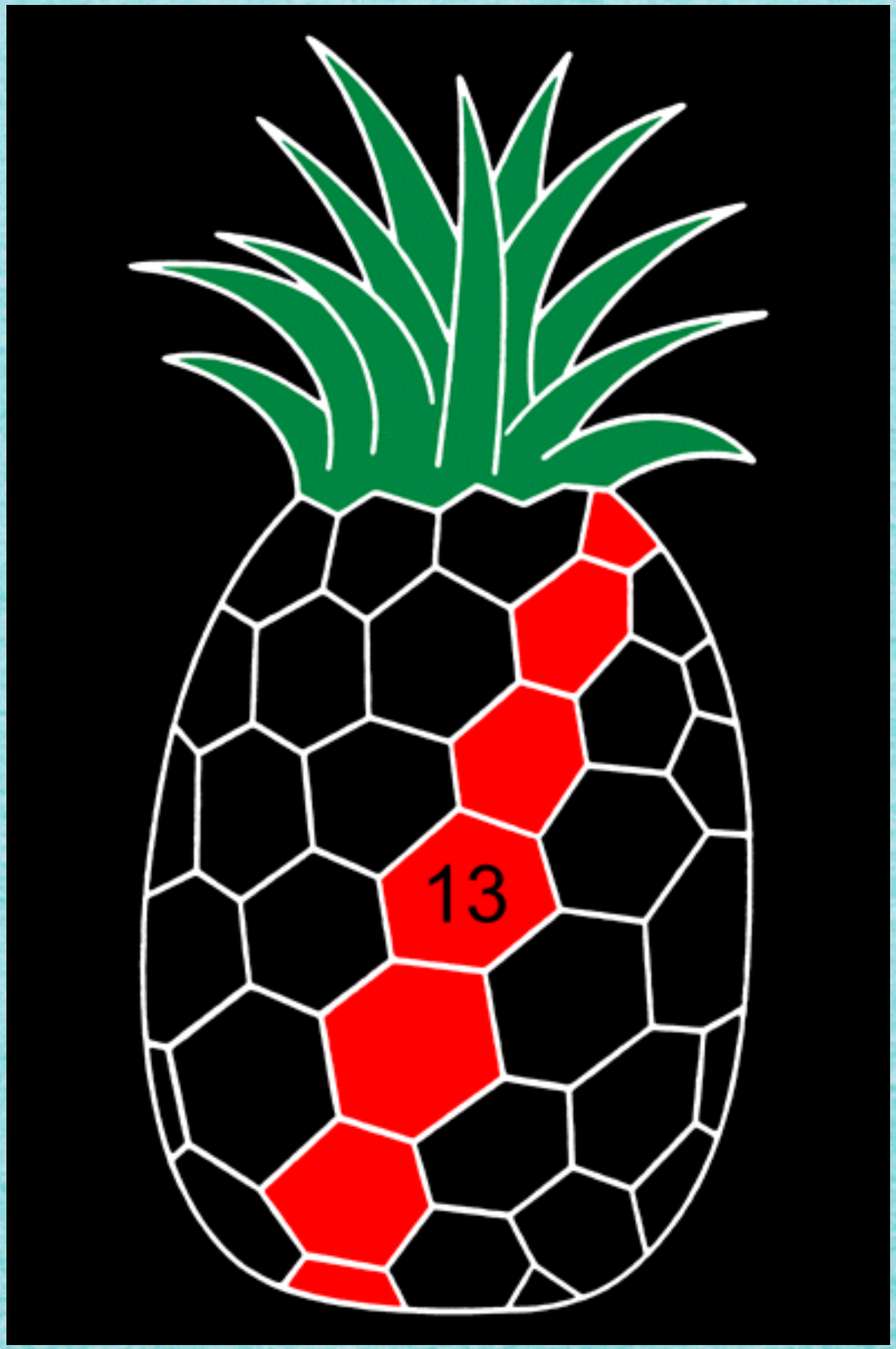
Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen



Fibonacci-Zahlen

3:2=1.500

5:3=1.666

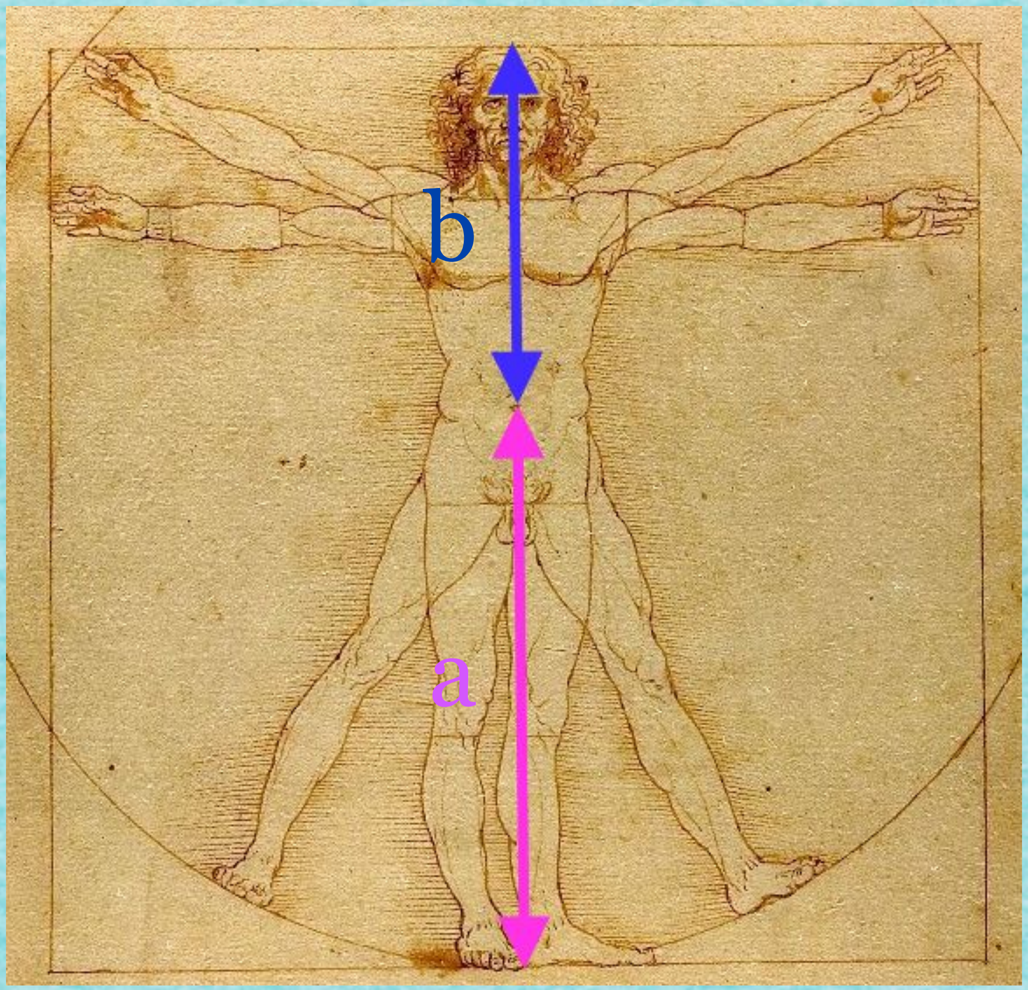
8:5=1.600

13:8=1.625

21:13=1.615

34:21=1.619

Fibonacci-Zahlen

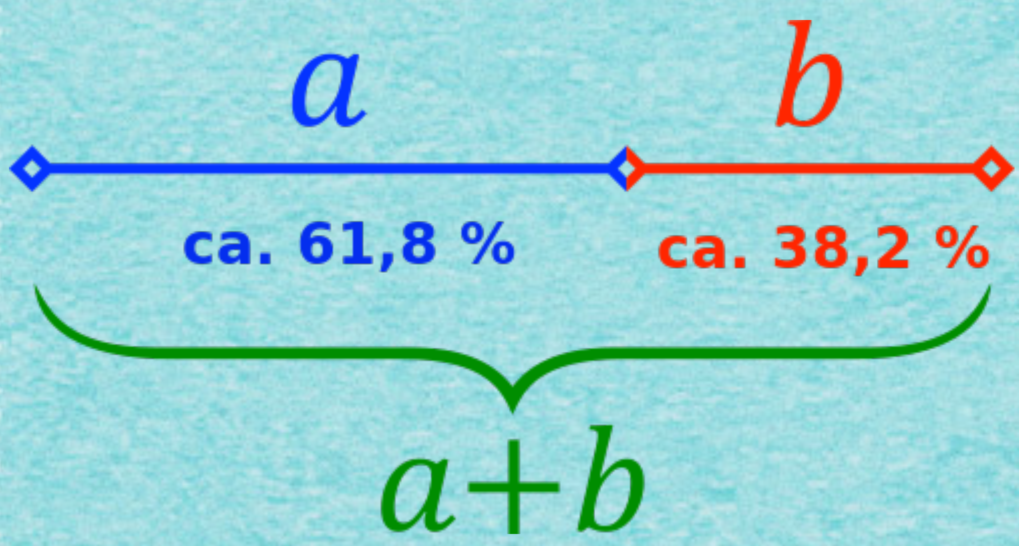


Goldener Schnitt:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$

Fibonacci-Zahlen

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$$



Herleitung des Zahlenwertes [Bearbeiten]

Aus der oben angegebenen Definition

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

bzw.

$$\frac{a}{b} - 1 - \frac{b}{a} = 0$$

folgt mit $\Phi = \frac{a}{b}$ und $\frac{1}{\Phi} = \frac{b}{a}$

$$\Phi - 1 - \frac{1}{\Phi} = 0\,.$$

Multiplikation mit Φ ergibt die quadratische Gleichung

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0\,.$$

Diese Gleichung hat genau die beiden Lösungen

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,033$$

und

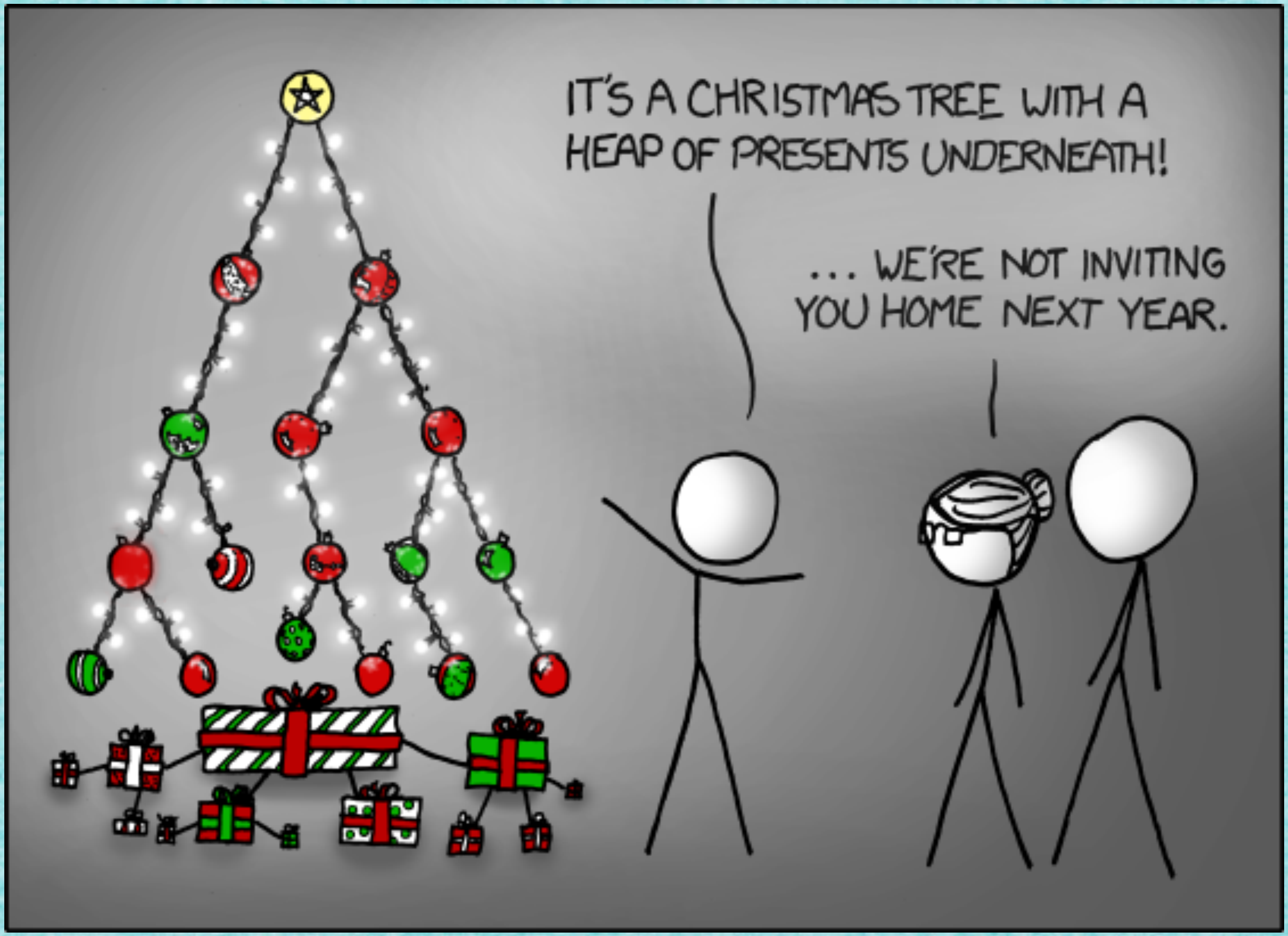
$$\bar{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = -\frac{1}{\Phi} \approx -0{,}618\,033\,.$$

Da $\bar{\Phi}$ negativ ist, ist Φ die gesuchte Goldene Zahl.

Aus diesen Betrachtungen folgt unmittelbar die interessante Beziehung:

$$\frac{1}{\Phi} + 1 = \Phi = \Phi^2 - 1$$

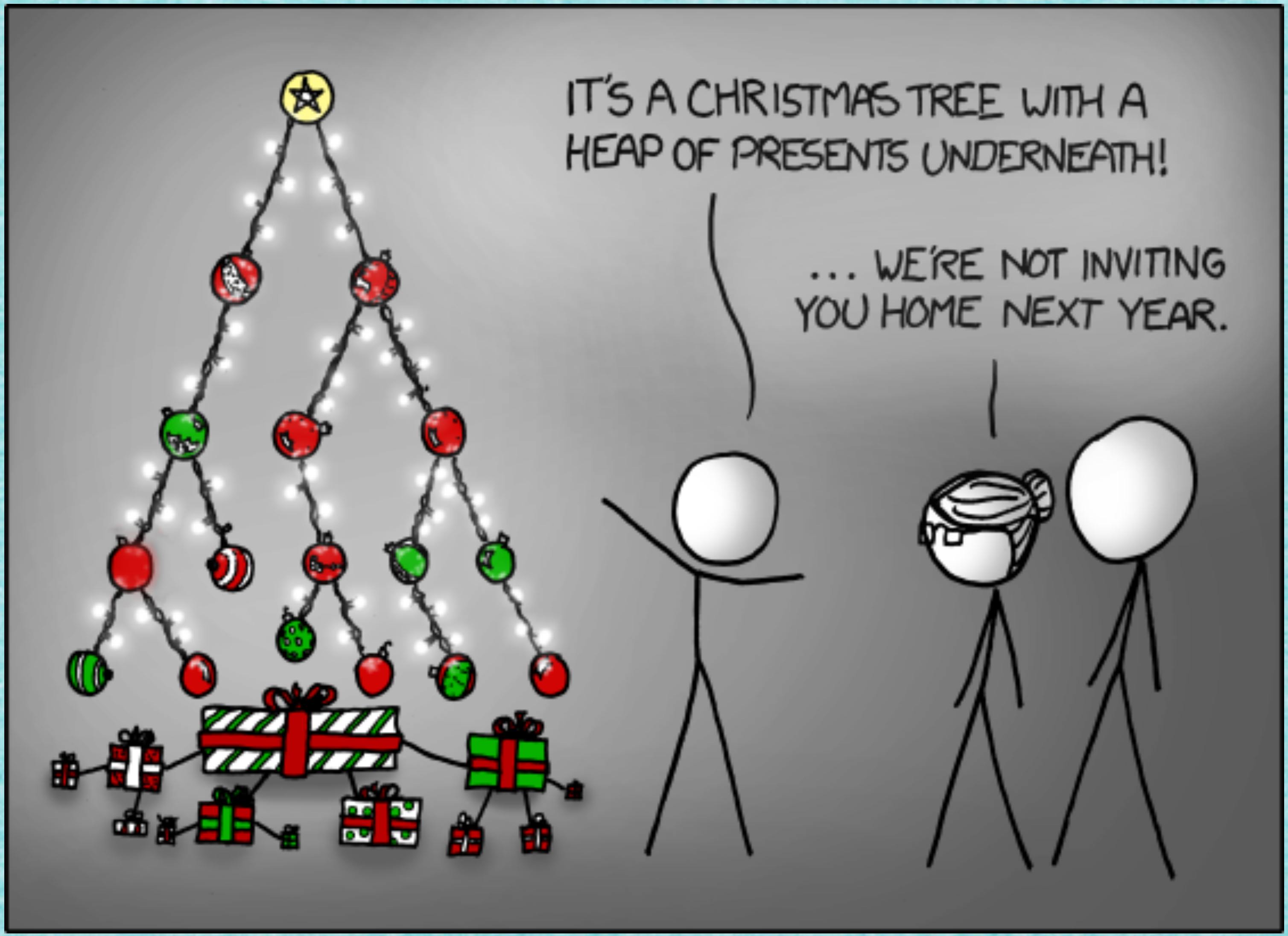
Zusammenfassung Kapitel 4!



Zusammenfassung Kapitel 4!

NIKOLAUS

Zusammenfassung Kapitel 4!



Frohe Weihnachten!